S. GODOUNOV

ÉQUATIONS DE LA PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИР

С. К. ГОДУНОВ

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА

ÉQUATIONS DE LA PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

par

S. GODOUNOV

ÉDITIONS MIR · MOSCOU

CDU 517.944=40

Traduit du russe
par ÉDOUARD GLOUKHIAN

На французском языке

Г $\frac{0223-258}{041(01)-73}$

© *Traduction française Editions Mir·1973*

AVANT-PROPOS

Ce livre a été écrit d'après les matériaux de conférences que j'ai faites durant trois ans à l'intention des étudiants en mécanique de l'Université de Moscou, et que je fais pour la troisième fois à l'Université de Novossibirsk. Le choix des questions sur l'exemple desquelles sont étudiées les positions de problèmes en théorie des équations aux dérivées partielles a été conditionné par le fait que je me suis beaucoup occupé des applications des équations à la mécanique des milieux continus et de l'élaboration de méthodes numériques pour résoudre ces équations. Il me semble que l'orientation du cours qui en est résultée sera utile aux étudiants qui se spécialisent dans les domaines indiqués.

Certaines sections du cours sont inspirées par des travaux relativement récents. Ainsi, l'exposé de la théorie des problèmes mêlés pour les systèmes hyperboliques dans le plan est basé sur un travail de I. Guelfand et K. Babenko sur la forme générale de l'intégrale d'énergie. La théorie de la méthode de Fourier est exposée sous l'impression des travaux de K. Brouchlinski, L. Diki et Keiz sur la stabilité d'écoulements hydrodynamiques.

Un paragraphe est consacré aux problèmes mal posés et suit un travail de M. Lavrentiev. Lors de sa préparation j'ai profité de consultations de A. Tikhonov. En 1952, j'ai assisté à l'élaboration par I. Guelfand et O. Lokoutsievski de la méthode du double parcours pour résoudre les équations aux différences. Le paragraphe consacré à cette méthode reproduit la démonstration proposée par Mme V. Oghniev dans un récent travail. Le livre se termine par l'exposé d'un travail de Douglas et Rackford sur la résolution de l'équation aux différences de Laplace.

Je me suis efforcé de choisir des matériaux devenus aujourd'hui classiques pour les spécialistes, bien que peut-être on ne les rencontre pas encore trop souvent dans les manuels et monographies accessibles à une sphère large de mécaniciens et de physiciens.

Les matériaux du premier chapitre (préliminaire) constituent en fait un aperçu achevé de l'objet, susceptible, il me semble, d'être

posé à la base d'un cours abrégé d'équations de la physique mathématique pour les grandes écoles techniques ou pédagogiques. Il sera utile sans doute de compléter un tel cours par les matériaux du dernier chapitre, lequel est consacré aux méthodes aux différences de résolution d'équations aux dérivées partielles.

Je suis infiniment reconnaissant à la chaire d'équations différentielles de l'Université de Moscou et à son chef I. Pétrovski de l'invitation à faire ce cours et de la liberté accordée dans le choix du programme.

A. Iline, qui a relu le manuscrit, m'a apporté une aide inestimable en ce qui concerne la composition du texte à partir des notes de conférences. Grâce à son intervention, non seulement le plan du cours a subi un certain changement rationnel, mais encore l'exposé a été notablement amélioré. Il a notamment remplacé plusieurs démonstrations par des démonstrations plus simples et plus intuitives.

Je dois aussi remercier Mme T. Godounov qui n'a pas ménagé sa peine pour préparer le manuscrit et le texte définitif.

S. Godounov

CHAPITRE PREMIER

PRÉLIMINAIRES

§ 1. Potentiel newtonien

Quelques remarques préliminaires sur le caractère des équations étudiées dans ce cours. Remarques historiques sur les travaux de Laplace qui l'ont conduit à l'équation du potentiel de gravitation. Potentiel de distribution continue de masses (ou de charges). Le potentiel est continu et continûment dérivable. Le potentiel vérifie l'équation de Poisson. Il décroît à l'infini.

Le cours d'équations aux dérivées partielles diffère essentiellement du cours d'équations différentielles du fait qu'il n'embrasse pas, tant s'en faut, toutes les équations qui peuvent s'écrire en utilisant les symboles $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial t}$, ..., $\frac{\partial^3}{\partial x\,\partial t^2}$, etc. Nous nous bornerons à quelques exemples concrets peu nombreux d'équations et de systèmes :

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{\partial v}{\partial y}=0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial x}=0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}+\dfrac{1}{\rho_0}\dfrac{\partial p}{\partial x}=0, \\ \dfrac{\partial p}{\partial t}+\rho_0 c_0^2\dfrac{\partial u}{\partial x}=0. \end{cases}$$

Nous généraliserons parfois quelque peu ces exemples.

En règle générale, les exemples ici traités sont posés dans les problèmes de la physique mathématique, le plus souvent en mécanique des milieux continus. Ceci justifie l'appellation «Equations de la physique mathématique».

On aurait tort de penser que les exemples étudiés sont fortuits au point de vue de la théorie mathématique. L'étude des équations de la physique mathématique a conduit à une classification des positions des problèmes, en vertu de laquelle les équations et systèmes envisagés sont des représentants typiques des classes les plus importantes. Des équations qui, de prime abord, présentent entre elles une différence mineure, correspondent à des problèmes très différents. Il en est ainsi, par exemple, des équations

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$$

d'écritures semblables, mais aux propriétés essentiellement différentes.

Dans cette première partie du cours nous considérons des exemples de quelques problèmes importants dont les solutions peuvent s'écrire sous forme explicite. Ce faisant, nous apprendrons à nous orienter dans les questions étudiées, et nous préparerons l'appareil nécessaire pour construire la théorie.

La première des équations envisagées est l'*équation de Laplace*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

et l'*équation de Poisson* un peu plus générale

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=f(x,\ y,\ z).$$

Je me propose de raconter comment l'équation de Laplace a fait son apparition en physique mathématique, apparition due à l'évolution non triviale des idées en sciences naturelles. Un tournant subi dans les idées de Laplace a entraîné, semble-t-il, certaines considérations majeures, qui ont eu pour conséquence les équations de Maxwell du champ électromagnétique et, actuellement, les équations des champs liés aux particules élémentaires.

On sait que Kepler, analysant les observations de Tycho Brahé faites sur le mouvement des planètes, a déduit les trois lois suivantes :

1. Chaque planète décrit une ellipse dont le Soleil occupe un des foyers.

2. Le rayon vecteur mené du Soleil à la planète balaie des aires égales dans des laps de temps égaux.

3. Les carrés des périodes de révolution de deux planètes sont proportionnels aux cubes des grands axes de leurs orbites.

Bien qu'elles soient élégantes, ces lois sont assez compliquées. Par la suite, Newton leur a trouvé une forme plus simple, mais non moins étonnante, dite loi de gravitation universelle :

«Deux corps quelconques subissent une force d'attraction proportionnelle à leurs masses et inversement proportionnelle au carré de la distance entre ces corps.»

Les lois de Kepler, la loi de Newton et le lien entre ces lois sont étudiés en détail dans le cours de mécanique. Aussi me bornerai-je à un rappel succinct.

On s'étonne, en effet, que deux corps séparés par des distances considérables puissent agir l'un sur l'autre. Cette action à distance rend perplexe, et les tentatives pour l'expliquer ont, semble-t-il, conduit Laplace à l'interprétation suivante.

La présence d'un corps attractif quelconque engendre dans tout l'espace un certain champ, dont l'intensité u en un point (x, y, z)

est calculée par la formule

$$u = \gamma \frac{M}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}},$$

γ étant une constante, x_0, y_0, z_0 les coordonnées du corps attractif, M sa masse. Pour calculer les composantes F_x, F_y, F_z de la force d'attraction agissant sur un corps de masse unité placé au point de coordonnées x, y, z, on doit poser

$$F_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad F_y = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad F_z = \frac{\partial u}{\partial z}.$$

On sait que la fonction u est appelée potentiel du champ de vecteurs $\{F_x, F_y, F_z\}$.

Si l'on a plusieurs corps attractifs (le corps de masse M_i est placé au point (x_i, y_i, z_i)), on peut calculer la force par des formules semblables si l'on prend pour potentiel

$$u = \gamma \sum_i \frac{M_i}{\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2}}.$$

Laplace propose d'utiliser dans l'étude de la gravitation non pas la fonction u elle-même, mais l'équation aux dérivées partielles qu'elle vérifie. On peut déduire comme suit cette équation.

Dans un premier temps, prenons un seul terme dans la formule pour la fonction u,

$$u_i = \gamma \frac{M_i}{\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2}},$$

et calculons ses dérivées. Pour simplifier l'écriture, désignons la distance entre les deux points (x, y, z) et (x_i, y_i, z_i) par $r = \sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2}$, et notons que

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x-x_i}{\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2}} = \frac{x-x_i}{r},$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y-y_i}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z-z_i}{r}.$$

Il vient ainsi pour les dérivées

$$\frac{\partial u_i}{\partial x} = -\gamma M_i \frac{x-x_i}{r^3}, \quad \frac{\partial u_i}{\partial y} = -\gamma M_i \frac{y-y_i}{r^3},$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial z} = -\gamma M_i \frac{z-z_i}{r^3}.$$

Dérivons encore une fois

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} = \gamma M_i \left[-\frac{1}{r^3} + 3\frac{(x-x_i)^2}{r^5} \right],$$

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2} = \gamma M_i \left[-\frac{1}{r^3} + 3\frac{(y-y_i)^2}{r^5} \right].$$

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial z^2} = \gamma M_i \left[-\frac{1}{r^3} + 3\frac{(z-z_i)^2}{r^5} \right].$$

Il vient en ajoutant les trois dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_i}{\partial z^2}=0.$$

De là et du fait que $u=\sum_i u_i$, on déduit aussitôt l'égalité

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0,$$

qui est l'équation de Laplace. De cette façon, Laplace renonce à la formule explicite pour les forces agissant à distance et la remplace par l'équation aux dérivées partielles du champ u. On peut considérer que l'équation aux dérivées partielles décrit l'interaction d'éléments voisins du champ u. De sorte que l'introduction de ce champ remplace le problème de l'action à distance entre corps réels par le problème de l'interaction à «petite distance» entre régions voisines de l'espace, lequel est rempli par le champ hypothétique u. On doit à Laplace d'avoir introduit les équations du champ du potentiel u, équations valables partout sauf aux points où sont concentrées les masses attractives elles-mêmes. (Aux points $x=x_i$, $y=y_i$, $z=z_i$ les formules écrites plus haut ne permettent pas le calcul des dérivées.)

Par la suite, nous aurons affaire non pas au potentiel de masses ponctuelles, mais au champ de gravitation dû à une masse distribuée dans un volume. Arrêtons-nous à une telle distribution volumique de masses, de densité $\rho=\rho(a, b, c)$ au point $x=a$, $y=b$, $z=c$. Soit $\rho(a, b, c)=0$ pour tous les points extérieurs à une certaine boule, c'est-à-dire pour $a^2+b^2+c^2>R^2$. Découpons cette boule en volumes élémentaires de côtés Δa, Δb, Δc, en chacun desquels est concentrée la masse

$$\rho(a, b, c)\,\Delta a\,\Delta b\,\Delta c.$$

Le potentiel de la force de gravitation, dû à cette masse, a au point (x, y, z) la valeur

$$\gamma\cdot\frac{\rho(a, b, c)\,\Delta a\,\Delta b\,\Delta c}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c^2)}}.$$

Le potentiel total u tenant compte de tous les volumes élémentaires est égal à

$$\gamma\cdot\sum_{a, b, c}\frac{\rho(a, b, c)\,\Delta a\,\Delta b\,\Delta c}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}.$$

En passant formellement à la limite en resserrant indéfiniment le découpage de la boule $a^2+b^2+c^2\leqslant R^2$, on obtient une représentation intégrale du potentiel

$$u=\iiint_{a^2+b^2+c^2\leqslant R^2}\frac{\rho(a, b, c)\,da\,db\,dc}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}},$$

qu'on appelle *potentiel de volume* ou *potentiel de Newton*. Dorénavant, nous omettrons la constante γ.

On démontre sans difficultés, mais non sans travail, que si $\rho(a, b, c)$ a des dérivées premières continues, le potentiel $u(x, y, z)$ vérifie l'équation de Poisson

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -4\pi\rho(x, y, z). \tag{1}$$

En dehors des masses attractives, c'est-à-dire là où $\rho = 0$, cette équation coïncide avec celle de Laplace.

La démonstration de l'égalité (1) sera donnée plus bas, mais notons dès à présent que, dans les problèmes liés à la loi de gravitation universelle, la densité $\rho(a, b, c)$ ne prend pas de valeurs négatives. Toutefois, on sait qu'il existe encore un domaine de la physique où la force d'interaction est décrite, comme dans la théorie de la gravitation, par la loi

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

Ce domaine constitue l'électrostatique, et m_1, m_2 sont les charges de deux points matériels. En électrostatique, on désigne habituellement les charges par e_1, e_2, et non par m_1, m_2. Le rôle de la constante γ est tenu par ε^{-1}, ε étant la constante diélectrique.

En électrostatique on attribue un signe aux charges : les charges de mêmes signes se repoussent, celles de signes contraires s'attirent. A la loi d'interaction électrostatique — loi de Coulomb — est lié un potentiel électrostatique, qui diffère du potentiel de gravitation par le seul fait que $\rho(a, b, c)$ peut prendre des valeurs aussi bien négatives que positives (ici ρ n'est plus la densité de masse, c'est la densité de charge).

Le champ électrostatique a pour composantes $E_x = -\frac{\partial u}{\partial x}$, $E_y = -\frac{\partial u}{\partial y}$, $E_z = -\frac{\partial u}{\partial z}$. Par conséquent, on peut recopier l'équation (1) sous la forme d'égalité

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{4\pi\rho}{\varepsilon},$$

laquelle porte en électrostatique le nom de théorème de Gauss.

Nous allons donner la démonstration correcte de la légitimité de l'équation de Poisson (1). Il est plus commode d'écrire l'expression du potentiel $u(x, y, z)$ sous la forme

$$u(x, y, z) = \int\int\int \frac{\rho(a, b, c)}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}\, da\, db\, dc,$$

l'intégration étant étendue à l'espace tout entier. (On aura en vue que $\rho(a, b, c) = 0$ si $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant R^2$.) Après changement des variables d'inté-

gration: $a - x = \xi$, $b - y = \eta$, $c - z = \zeta$, on obtient la représentation suivante du potentiel

$$u(x, y, z) = \int\int\int \frac{\rho(x+\xi, y+\eta, z+\zeta)}{\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta.$$

Dans un premier temps, seuls sont envisagés les x, y, z contenus dans la partie finie de l'espace $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2$. Etant donné que $\rho(x+\xi, y+\eta, z+\zeta) = 0$ pour $(x+\xi)^2 + (y+\eta)^2 + (z+\zeta)^2 \geqslant R^2$, on peut limiter le domaine d'intégration à la boule $D(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \leqslant (R+R)^2 = 4R^2 = L^2)$ et écrire

$$u(x, y, z) = \int\int\int_D \frac{\rho(x+\xi, y+\eta, z+\zeta)}{\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta. \qquad (2)$$

(L'intégrale (2) est impropre, étant donné que la fonction sous le signe d'intégration présente une singularité à l'origine des coordonnées. Cette intégrale converge uniformément par rapport aux paramètres x, y, z, car la fonction sous le signe d'intégration admet la majorante intégrable $\rho^*/\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}$, $\rho^* = \max|\rho|$. En effet,

$$\int\int\int_D \frac{\rho^*\, d\xi\, d\eta\, d\zeta}{\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}} = 4\pi\rho^* \int_0^L \frac{r^2\, dr}{r} = 4\pi\rho^* \frac{L^2}{2}.)$$

Les intégrales obtenues par dérivation formelle de l'intégrale (2) par rapport aux paramètres x, y et z sont aussi uniformément convergentes; donc, en vertu d'une règle connue:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \int\int\int_D \frac{\frac{\partial}{\partial x}[\rho(x+\xi, y+\eta, z+\zeta)]}{\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta =$$

$$= \int\int\int_D \frac{\frac{\partial}{\partial \xi}[\rho(x+\xi, y+\eta, z+\zeta)]}{\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta.$$

Appliquons à la dernière intégrale la formule d'intégration par parties, en remarquant que

$$\frac{\frac{\partial}{\partial \xi}[\rho(x+\xi, y+\eta, z+\zeta)]}{\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}} = \frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{\rho(x+\xi, y+\eta, z+\zeta)}{\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}}\right] +$$

$$+ \frac{\xi \cdot \rho(x+\xi, y+\eta, z+\zeta)}{(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^{3/2}},$$

et en notant la nullité de la fonction $\rho(x+\xi, y+\eta, z+\zeta)$ sur la sphère $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = L^2$. Il vient finalement

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \int\int\int_D \frac{\xi \cdot \rho(x+\xi, y+\eta, z+\zeta)}{(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^{3/2}}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta. \qquad (3)$$

L'intégration par parties est légitime, étant donné que l'intégrale (3) converge. Qui plus est, cette intégrale converge uniformément par rapport aux paramètres x, y, z, étant donné que la fonction sous le signe d'intégration possède la majo-

rante intégrable $\max |\rho|/(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)$. En effet,

$$\iiint_D \frac{\rho^* \, d\xi \, d\eta \, d\zeta}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2} = 4\pi\rho^* \int_0^L \frac{r^2 \, dr}{r^2} = 4\pi\rho^* L.$$

Les dérivées de la fonction sous le signe d'intégration par rapport à x, y ou z ont aussi une majorante intégrable. Ceci étant, on peut obtenir les dérivées secondes de u en dérivant le second membre de l'égalité (3) sous le signe d'intégration.

Ainsi,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \iiint_D \frac{\xi}{(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^{3/2}} \rho_x (x+\xi, y+\eta, z+\zeta) \, d\xi \, d\eta \, d\zeta =$$

$$= \iiint_D \frac{\xi}{(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^{3/2}} \frac{\partial}{\partial \xi} [\rho (x+\xi, y+\eta, z+\zeta)] \, d\xi \, d\eta \, d\zeta$$

et de même

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \iiint_D \frac{\eta}{(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^{3/2}} \frac{\partial}{\partial \eta} [\rho (x+\xi, y+\eta, z+\zeta)] \, d\xi \, d\eta \, d\zeta,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \iiint_D \frac{\zeta}{(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^{3/2}} \frac{\partial}{\partial \zeta} [\rho (x+\xi, y+\eta, z+\zeta)] \, d\xi \, d\eta \, d\zeta.$$

Ajoutant membre à membre les égalités obtenues, on peut écrire

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} =$$

$$= \iiint_D \frac{\left(\xi \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial}{\partial \eta} + \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta}\right) [\rho (x+\xi, y+\eta, z+\zeta)]}{(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^{3/2}} \, d\xi \, d\eta \, d\zeta. \qquad (4)$$

Pour calculer l'intégrale du second membre il est commode de l'écrire sous la forme suivante $\int_0^L \left\{ \iint_{S_r} \ldots \, dS_r \right\} dr$, S_r étant une sphère de rayon r de centre à l'origine des coordonnées, dS_r l'élément d'aire de cette sphère. Notons ensuite que la dérivée par rapport au rayon $\frac{\partial \rho}{\partial r}$ est égale au produit scalaire du gradient de ρ, c'est-à-dire du vecteur $\left\{ \frac{\partial \rho}{\partial \xi}, \frac{\partial \rho}{\partial \eta}, \frac{\partial \rho}{\partial \zeta} \right\}$ et du vecteur unité du rayon, c'est-à-dire du vecteur $\{\xi/r, \eta/r, \zeta/r\}$ $(r = \sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2})$. Par conséquent,

$$\xi \frac{\partial \rho}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial \rho}{\partial \eta} + \zeta \frac{\partial \rho}{\partial \zeta} = r \frac{\partial \rho}{\partial r},$$

et l'égalité (4) devient

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \int_0^L \left\{ \iint_{S_r} \frac{\frac{\partial}{\partial r} [\rho (x+\xi, y+\eta, z+\zeta)]}{r^2} \, dS_r \right\} dr.$$

Etant donné que l'élément d'aire $dS_r = r^2\, d\Omega$, $d\Omega$ étant l'élément d'aire de la sphère unité Ω, ou l'élément d'angle solide, on a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=$$

$$=\int_0^L \left\{\iint_\Omega \frac{\partial \rho\,(x+\xi_0 r,\ y+\eta_0 r,\ z+\zeta_0 r)}{\partial r}\, d\Omega\right\} dr=$$

$$=\iint_\Omega \left\{\int_0^L \frac{\partial \rho\,(x+\xi_0 r,\ y+\eta_0 r,\ z+\zeta_0 r)}{\partial r}\, dr\right\} d\Omega=$$

$$=\iint_\Omega [\rho\,(x+\xi_0 L,\ y+\eta_0 L,\ z+\zeta_0 L)-\rho\,(x+\xi_0 0,\ y+\eta_0 0,\ z+\zeta_0 0)]\, d\Omega=$$

$$=-\iint_\Omega \rho\,(x,\ y,\ z)\, d\Omega=-4\pi\rho\,(x,\ y,\ z).$$

L'égalité (1) est démontrée pour n'importe quelle boule $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$, et donc pour n'importe quels x, y, z.

Pour conclure ce paragraphe, démontrons que le potentiel newtonien tend vers zéro lorsque $(x^2+y^2+z^2)\to\infty$. Plus exactement, nous démontrerons l'égalité

$$\lim_{x^2+y^2+z^2\to\infty} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, u\,(x,\ y,\ z)=\iiint \rho\,(a,\ b,\ c)\, da\, db\, dc.$$

Ecrivons le potentiel newtonien sous la forme

$$u\,(Q)=\iiint_D \frac{\rho\,(P)}{r\,(P,\ Q)}\, dV,\quad D\{r\,(P,\ O)\leqslant R\},$$

Q étant un point de coordonnées x, y, z, P un point de coordonnées a, b, c, $dV=da\,db\,dc$, $r\,(P,\ Q)$ est la distance entre les points P et Q. Soit O l'origine des coordonnées, et $r\,(O,\ Q)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Alors,

$$r\,(O,\ Q)\,u\,(Q)=\iiint_D \frac{\rho\,(P)}{1-\dfrac{r\,(O,\ Q)-r\,(P,\ Q)}{r\,(O,\ Q)}}\, dV.$$

Comme

$$|r\,(O,\ Q)-r\,(P,\ Q)|\leqslant r\,(O,\ P)\leqslant R,$$

on a

$$r\,(O,\ Q)\,u\,(Q)=\iiint_D \rho\,(P)\, dV+O\left(\frac{1}{r\,(O,\ Q)}\right)$$

$$\lim_{Q\to\infty} r\,(O,\ Q)\,u\,(Q)=\iiint_D \rho\,(P)\, dV.$$

Résumons. Nous avons démontré que, la densité étant continûment dérivable et non nulle seulement dans une certaine sphère, le potentiel newtonien est solution de l'équation de Poisson, et cette solution s'annule à l'infini.

Nous démontrerons au paragraphe suivant que le potentiel est univoquement déterminé par ces conditions. A ce point de vue, la proposition de Laplace de remplacer l'étude d'intégrales par celle d'une équation aux dérivées partielles, vérifiée par ces intégrales, est logiquement justifiée.

Vérifiant l'équation de Poisson, nous avons supposé la densité $\rho(a, b, c)$ continûment dérivable en tous les points de l'espace. En réalité, seule importe la régularité locale de la densité au voisinage du point où l'on vérifie l'observation de l'équation de Poisson.

Problème. Supposons que la densité $\rho(a, b, c)$ soit nulle en dehors d'une certaine boule et qu'elle ait des dérivées premières continues au voisinage du point (a_0, b_0, c_0). Alors, au voisinage de ce point, le potentiel newtonien de densité ρ satisfait à l'équation de Poisson (1). Il en résulte notamment que le potentiel newtonien d'un corps fini de densité constante ρ_0 satisfait, à l'intérieur de ce corps, à l'équation $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-4\pi\rho_0$, et en dehors du corps à l'équation de Laplace.

§ 2. Problème de Dirichlet pour l'équation de Laplace dans le cercle

Principe du maximum pour les fonctions harmoniques et théorème d'unicité pour le potentiel newtonien décroissant à l'infini. Notion de potentiel logarithmique dans le plan. Fonctions analytiques et harmoniques de deux variables. Quelques solutions particulières de l'équation de Laplace et déduction heuristique de la formule de Poisson qui détermine une fonction harmonique dans un cercle d'après ses valeurs aux limites. Différentes écritures de cette formule et quelques propriétés du noyau. Démonstration de la formule de Poisson donnant la solution de l'équation de Laplace. Position du problème de Dirichlet. Théorème d'unicité de la solution du problème de Dirichlet. L'existence de la solution découle de la démonstration de la formule de Poisson.

Nous allons démontrer une importante propriété des solutions de l'équation de Laplace $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$, dites *fonctions harmoniques*

Théorème du maximum et du minimum (principe du maximum). *Une fonction harmonique $u(x, y, z)$ continue dans un domaine borné fermé $\overline{G}=G\cup\Gamma$ et possédant à l'intérieur de ce domaine des dérivées premières et secondes ne peut prendre à l'intérieur de ce domaine des valeurs plus grandes que le maximum de ses valeurs sur la frontière Γ et plus petites que le minimum de ses valeurs sur Γ.*

Désignons par m le maximum des valeurs de $u(x, y, z)$ sur Γ et supposons que la valeur maximum de u soit égale à $u(x_0, y_0, z_0)=$

$= M > m$. (Le point (x_0, y_0, z_0) est supposé pris à l'intérieur de G.) Formons la fonction auxiliaire

$$v = u(x, y, z) + \frac{M-m}{2d^2}[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2],$$

d étant le diamètre de G. De l'inégalité

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 \leqslant d^2$$

on déduit que, sur Γ,

$$v(x, y, z) \leqslant m + \frac{M-m}{2d^2} d^2 = \frac{M+m}{2} < M.$$

Dans le même temps,

$$v(x_0, y_0, z_0) = u(x_0, y_0, z_0) = M.$$

Il en résulte que le maximum de $v(x, y, z)$ à l'intérieur de G n'est pas inférieur à M, donc il est supérieur au maximum de v sur Γ. Ce maximum est atteint, c'est évident, en un certain point intérieur (x, y, z) de G

On sait qu'en un point de maximum

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \leqslant 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \leqslant 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \leqslant 0,$$

et donc

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \leqslant 0.$$

Or,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{M-m}{2d^2}\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right\} \times$$

$$\times \left[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2\right] = 0 + \frac{M-m}{2d^2}[2+2+2] > 0.$$

La contradiction obtenue montre que l'hypothèse $M > m$ est absurde. Ainsi, nous avons démontré que, dans G,

$$u(x, y, z) \leqslant \max u|_\Gamma.$$

Pour démontrer l'inégalité qui limite $u(x, y, z)$ inférieurement

$$u(x, y, z) \geqslant \min u|_\Gamma$$

il suffit d'appliquer le résultat obtenu à la fonction $-u(x, y, z)$, qui est, évidemment, elle aussi harmonique.

Le théorème du maximum et du minimum est démontré. Par la suite, nous aurons souvent à utiliser ce théorème pour les solutions bidimensionnelles de l'équation de Laplace :

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0.$$

Ces solutions sont appelées *fonctions harmoniques*.

La démonstration du principe du maximum dans le plan est tout à fait analogue à celle donnée plus haut.

Montrons à présent que le potentiel newtonien est l'unique solution de l'équation de Poisson

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-4\pi\rho(x,\ y,\ z)$$

s'annulant à l'infini.

En effet, si $u_1(x, y, z)$ et $u_2(x, y, z)$ sont deux solutions de cette équation qui s'annulent lorsque $x^2+y^2+z^2\to\infty$, leur différence s'annule aussi et vérifie l'équation homogène qu'est l'équation de Laplace :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$$

Il suffit à présent d'appliquer le principe du maximum à la fonction u dans la boule de rayon R de centre à l'origine. Il vient

$$|u(x_0,\ y_0,\ z_0)|\leqslant\max_{x^2+y^2+z^2=R^2}|u(x,\ y,\ z)|$$

pour tout point (x_0, y_0, z_0) pris dans la boule. Fixant le point (x_0, y_0, z_0) et faisant tendre R vers l'infini, nous sommes conduits à l'égalité $u(x_0, y_0, z_0)=0$.

Dans notre cours nous nous bornerons à étudier l'équation de Laplace dans le cas bidimensionnel. Les fonctions harmoniques de deux variables indépendantes se rencontrent en théorie des fonctions d'une variable complexe. On sait qu'une fonction analytique $u+iv$ de $x+iy$ vérifie les équations de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=0.$$

Ces équations entraînent

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)=0,$$
$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)=0.$$

La légitimité de ces calculs est due à ce que $u+iv$ est, on le sait, une fonction infiniment dérivable de $x+iy$; partant, on démontre sans peine, à l'aide des équations de Cauchy-Riemann, l'existence et la continuité des dérivées secondes de u, v.

Notamment,

$$\ln(x+iy)=\ln\sqrt{x^2+y^2}+i\operatorname{Arctg}\frac{y}{x}$$

étant une fonction analytique pour $x^2+y^2>0$, les fonctions

$$\ln\sqrt{x^2+y^2}=-\ln\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad \operatorname{Arctg}\frac{y}{x}$$

sont harmoniques.

La première d'entre elles joue, dans le plan, un rôle analogue à $1/\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$ dans l'espace. A savoir, la fonction $u(x, y) = \int\int \rho(a, b) \ln \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}\, da\, db$, dite *potentiel logarithmique*, vérifie l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2\pi\rho(x, y),$$

si $\rho(a, b)$ est une fonction régulière non nulle seulement dans un domaine fini.

Nous ne ferons pas la démonstration. Indiquons seulement qu'elle est analogue à la variante tridimensionnelle de l'étude du potentiel newtonien. Il est vrai que le potentiel logarithmique, distribué dans un domaine à deux dimensions fini, ne tend pas vers zéro lorsque $x^2 + y^2 \to \infty$, puisque alors $\ln \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}$ croît. Mais cette différence est sans importance pour la démonstration du fait formulé.

Problème. Montrer que la fonction $\ln \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}$ peut être déduite de la solution de l'équation de Laplace à trois dimensions $1/\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$ à l'aide du procédé suivant :

$$\ln \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}} = \lim_{L\to\infty} \left(\frac{1}{2} \int_{-L}^{+L} \frac{dc}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}} - \ln 2L \right).$$

L'expression entre parenthèses dans le second membre est le potentiel d'une distribution unidimensionnelle de charges le long d'un segment de l'axe des z de longueur $2L$. Le potentiel d'un champ de forces étant déterminé à un terme constant additif près, il est loisible de le prendre arbitrairement. En déduisant la grande constante $\ln 2L$ avant le passage à la limite, on obtient pour cette limite une valeur finie.

La seconde de ces fonctions, $\operatorname{Arctg} \frac{y}{x}$, va nous servir maintenant à la résolution du problème suivant : reconstituer une fonction harmonique dans le cercle $x^2 + y^2 \leqslant R^2$ d'après ses valeurs sur la frontière du cercle.

Il est clair que la fonction

$$\varphi(x, y) = \operatorname{Arctg} \frac{y-y_2}{x-x_2} - \operatorname{Arctg} \frac{y-y_1}{x-x_1}$$

est aussi harmonique. C'est l'angle sous lequel on voit du point (x, y) le segment réunissant (x_1, y_1) à (x_2, y_2). On a vu en géométrie élémentaire que $\varphi(x, y)$ est constante le long des circonférences passant par les extrémités de ce segment. De telles circonférences sont des lignes de niveau de $\varphi(x, y)$. Elles sont représentées sur la fig. 1.

Posons à présent $x_1 = R\cos\theta_1$, $y_1 = R\sin\theta_1$, $x_2 = R\cos\theta_2$, $y_2 = R\sin\theta_2$, où $0 \leqslant \theta_1 < \theta_2 \leqslant 2\pi$, et voyons comment se comporte la fonction harmonique

$$\varphi(x, y, \theta_1, \theta_2) = \operatorname{Arctg}\frac{y - R\sin\theta_2}{x - R\cos\theta_2} - \operatorname{Arctg}\frac{y - R\sin\theta_1}{x - R\cos\theta_1}$$

dans le cercle D $\{x^2 + y^2 \leqslant R^2\}$ et sur sa frontière. Choisissons les branches de Arctg de telle façon que dans le cercle $\varphi(x, y, \theta_1, \theta_2)$

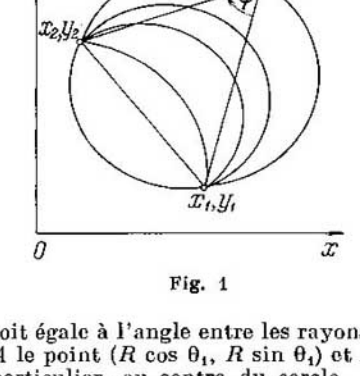

Fig. 1

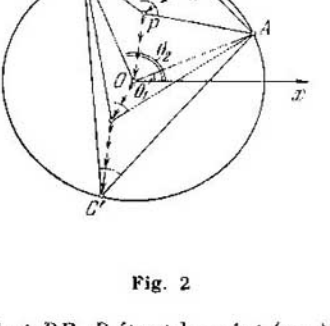

Fig. 2

soit égale à l'angle entre les rayons PA et PB, P étant le point (x, y), A le point $(R\cos\theta_1, R\sin\theta_1)$ et B le point $(R\cos\theta_2, R\sin\theta_2)$. En particulier, au centre du cercle

$$\varphi(0, 0, \theta_1, \theta_2) = \operatorname{Arctg}\left(\frac{-R\sin\theta_2}{-R\cos\theta_2}\right) - \operatorname{Arctg}\left(\frac{-R\sin\theta_1}{-R\cos\theta_1}\right) = \theta_2 - \theta_1.$$

Déplaçons maintenant le point (x, y) dans le cercle. On voit sur la fig. 2 comment se déforme l'angle $\varphi(x, y, \theta_1, \theta_2)$ lorsque le point $P(x, y)$ se déplace. Sur l'arc $AC'B$ il vaut $\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}$, sur l'arc ACB cet angle vaut $\pi + \frac{\theta_2 - \theta_1}{2}$. Considérons la fonction

$$w(x, y, \theta_1, \theta_2) = \frac{1}{\pi}\left[\varphi(x, y, \theta_1, \theta_2) - \frac{\theta_2 - \theta_1}{2}\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\operatorname{Arctg}\frac{y - R\sin\theta_2}{x - R\cos\theta_2} - \frac{\theta_2}{2}\right) - \frac{1}{\pi}\left(\operatorname{Arctg}\frac{y - R\sin\theta_1}{x - R\cos\theta_1} - \frac{\theta_1}{2}\right)$$

qui est, de toute évidence, aussi fonction harmonique de x, y. (L'addition d'une constante et la multiplication par un nombre constant n'affectent pas l'harmonicité.) Tout ceci dit, il est clair que sur l'arc ACB la fonction $w(x, y, \theta_1, \theta_2) = 1$, et sur $AC'B$ on a $w(x, y, \theta_1, \theta_2) = 0$.

A l'aide de la fonction $w(x, y, \theta_1, \theta_2)$, il n'est pas difficile d'imaginer une formule permettant de reconstituer la fonction harmonique d'après ses valeurs sur la circonférence $x^2 + y^2 = R^2$. Nous donnerons d'abord une démonstration non rigoureuse, puis nous légitimerons.

Découpons toute la circonférence par des points $x_i = R\cos\theta_i$, $y_i = R\sin\theta_i$ en arcs suffisamment petits, et prenons sur chacun d'eux un point $x_{i+\frac{1}{2}} = R\cos\theta_{i+\frac{1}{2}}$; $y_{i+\frac{1}{2}} = R\sin\theta_{i+\frac{1}{2}}$ $\left(\theta_i < \theta_{i+\frac{1}{2}} < \theta_{i+1}\right)$. Soit sur la circonférence une fonction continue $f(\theta)$. Il est clair que

$$f\left(\theta_{i+\frac{1}{2}}\right) w(x, y, \theta_i, \theta_{i+1})$$

prend sur l'arc (θ_i, θ_{i+1}) la valeur $f\left(\theta_{i+\frac{1}{2}}\right)$, et sur son complémentaire, la valeur 0.

La somme

$$\sum_i f\left(\theta_{i+\frac{1}{2}}\right) w(x, y, \theta_i, \theta_{i+1}) =$$

$$= \sum_i f\left(\theta_{i+\frac{1}{2}}\right)\left[\frac{1}{\pi}\left(\operatorname{Arctg}\frac{y - R\sin\theta_{i+1}}{x - R\cos\theta_{i+1}} - \frac{\theta_{i+1}}{2}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\pi}\left(\operatorname{Arctg}\frac{y - R\sin\theta_i}{y - R\cos\theta_i} - \frac{\theta_i}{2}\right)\right]$$

est une fonction harmonique dans le cercle, constante par morceaux sur la frontière. Sur l'arc (θ_i, θ_{i+1}) elle prend la valeur $f\left(\theta_{i+\frac{1}{2}}\right)$.

L'harmonicité de la somme finie dans le cercle résulte de la linéarité de la fonction de Laplace. Aux points $x = R\cos\theta_i$, $y = R\sin\theta_i$ cette fonction est, certes, discontinue.

Passons formellement à la limite par un découpage infiniment dense de la circonférence, à savoir, envisageons la fonction

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\, d\left[\operatorname{Arctg}\frac{y - R\sin\theta}{x - R\cos\theta} - \frac{\theta}{2}\right].$$

Il est permis de s'attendre à ce qu'elle soit harmonique dans le cercle $x^2 + y^2 \leqslant R^2$, et qu'elle prenne aux points de sa frontière $x = R\cos\omega$, $y = R\sin\omega$ les valeurs $f(\omega)$. Ce fait sera justifié par la suite; en attendant, en transformant cette formule, nous la mettrons sous une forme plus élégante.

On a

$$d\left[\operatorname{Arctg}\frac{y-R\sin\theta}{x-R\cos\theta}-\frac{\theta}{2}\right]=$$

$$=\frac{-R\cos\theta\,(x-R\cos\theta)-R\sin\theta\,(y-R\sin\theta)}{(y-R\sin\theta)^2+(x-R\cos\theta)^2}\,d\theta-\frac{d\theta}{2}=$$

$$=\frac{2\,[R^2-xR\cos\theta-yR\sin\theta]-(x^2+y^2)-R^2+2yR\sin\theta+2xR\cos\theta}{2\,[(y-R\sin\theta)^2+(x-R\cos\theta)^2]}\,d\theta=$$

$$=\frac{R^2-(x^2+y^2)}{2\,[R^2-2R\,(x\cos\theta+y\sin\theta)+x^2+y^2]}\,d\theta.$$

Notons ici que, lors du calcul de la différentielle, peu importe quelles branches de Arctg ont été choisies, étant donné que les valeurs de Arctg z sur différentes branches diffèrent d'une constante.

Nous avons montré comment on peut imaginer la formule

$$u\,(x,\,y)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f\,(\theta)\,\frac{R^2-x^2-y^2}{R^2-2R\,(x\cos\theta+y\sin\theta)+x^2+y^2}\,d\theta,$$

dite *formule de Poisson*.

Ecrivons-la encore sous deux autres formes. Primo, posant $x=\rho\cos\omega$, $y=\rho\sin\omega$ et notant que

$$x\cos\theta+y\sin\theta=\rho\,(\cos\theta\cos\omega+\sin\theta\sin\omega)=\rho\cos\,(\theta-\omega),$$

on obtient

$$u\,(\rho\cos\omega,\,\rho\sin\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f\,(\theta)\,\frac{R^2-\rho^2}{R^2-2R\rho\cos\,(\theta-\omega)+\rho^2}\,d\theta.$$

Secundo, on peut décomposer le noyau de notre intégrale en éléments simples

$$\frac{R^2-x^2-y^2}{R^2-2R\,(x\cos\theta+y\sin\theta)+x^2+y^2}=-1+\frac{Re^{i\theta}}{Re^{i\theta}-(x+iy)}+\frac{Re^{-i\theta}}{Re^{-i\theta}-(x-iy)}$$

et écrire

$$u\,(x,\,y)=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f\,(\theta)\,d\theta+2\,\mathrm{Re}\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f\,(\theta)\,\frac{Re^{i\theta}\,d\theta}{Re^{i\theta}-(x+iy)}=$$

$$=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f\,(0)\,d\theta+2\,\mathrm{Re}\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f\,(\theta)\,Re^{i\theta}\,d\theta}{Re^{i\theta}-\rho e^{i\omega}}. \qquad (1)$$

Montrons encore que le noyau

$$\frac{R^2-\rho^2}{R^2-2R\rho\cos\,(\theta-\omega)+\rho^2}\geqslant 0 \qquad (2)$$

pour $\rho\leqslant R$, et que son intégrale

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-\rho^2}{R^2-2R\rho\cos\,(\theta-\omega)+\rho^2}\,d\theta=1. \qquad (3)$$

La première assertion est évidente, si l'on note que

$$R^2 - 2R\rho\cos(\theta-\omega) + \rho^2 = (R-\rho)^2 + 4R\rho\sin^2\frac{\theta-\omega}{2}.$$

On démontre la seconde comme suit :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-\rho^2}{R^2-2R\rho(\theta-\omega)+\rho^2}\,d\theta = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\theta + \frac{1}{\pi}\operatorname{Re}\frac{1}{i}\oint\frac{dz}{z-(x+iy)}.$$

Dans cette égalité, l'intégrale

$$\oint\frac{dz}{z-(x+iy)}$$

est prise sur un contour fermé, en l'occurrence sur la circonférence de rayon R de centre à l'origine, le point $x+iy$ est pris dans le cercle. Dès lors,

$$\oint\frac{dz}{z-(x+iy)} = 2\pi i,$$

de sorte que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-\rho^2}{R^2-2R\rho\cos(\theta-\omega)+\rho^2}\,d\theta = -1+\frac{1}{\pi}\operatorname{Re}\frac{1}{i}\cdot 2\pi i = -1+2 = 1.$$

La formule de Poisson et les propriétés de son noyau qui viennent d'être démontrées sont appelées à jouer un rôle important lors de l'étude des solutions de l'équation de Laplace.

Nous allons démontrer rigoureusement la formule de Poisson. Vérifions que

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-x^2-y^2}{R^2-2R(x\cos\theta+y\sin\theta)+x^2+y^2}f(\theta)\,d\theta$$

est harmonique pour $x^2+y^2 < R^2$. En effet, la fonction sous le signe d'intégration est continue et, qui plus est, c'est une fonction analytique des variables x et y si $x^2+y^2 < R^2$. Par conséquent, la fonction $u(x, y)$ est continue dans le cercle, et on peut formellement dériver l'intégrale.

Il vient en utilisant la représentation (1)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\theta)\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\operatorname{Re}\frac{Re^{i\theta}}{Re^{i\theta}-(x+iy)}\right]d\theta = 0,$$

étant donné que la partie réelle de la fonction analytique $Re^{i\theta}/[Re^{i\theta}-(x+iy)]$ est une fonction harmonique dans le cercle.

Démontrons à présent que, $f(\theta)$ étant une fonction continue, la fonction $u(x, y)$ est continue jusqu'à la frontière du cercle et

prend sur la frontière les valeurs $f(\theta)$:

$$u(R\cos\theta,\ R\sin\theta) = f(\theta).$$

Pour démontrer cette proposition, écrivons la différence $u(x, y) - f(\alpha) = u(Q) - f(\alpha)$ sous la forme suivante:

$$u(Q) - f(\alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2-\rho^2}{R^2-2R\rho\cos(\theta-\omega)+\rho^2} f(\theta)\,d\theta -$$

$$- f(\alpha)\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2-\rho^2}{R^2-2R\rho\cos(\theta-\omega)+\rho^2}\,d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2-\rho^2}{R^2-2R\rho\cos(\theta-\omega)+\rho^2} |f(\theta)-f(\alpha)|\,d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{|\theta-\alpha|<\delta} \frac{R^2-\rho^2}{R^2-2R\rho\cos(\theta-\omega)+\rho^2} |f(\theta)-f(\alpha)|\,d\theta +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_{|\theta-\alpha|\geqslant\delta} \frac{R^2-\rho^2}{R^2-2R\rho\cos(\theta-\omega)+\rho^2} |f(\theta)-f(\alpha)|\,d\theta = I_1 + I_2.$$

Nous nous sommes servis ici de la relation (3) et des notations $x = \rho\cos\omega$, $y = \rho\sin\omega$ pour les coordonnées de Q.

Evaluons séparément chacune des intégrales I_1 et I_2. La fonction $f(\theta)$ étant continue, quel que soit $\varepsilon > 0$, on peut prendre $\delta(\varepsilon) > 0$ tel que $|f(\theta) - f(\alpha)| < \frac{\varepsilon}{2}$ pour $|\theta - \alpha| < \delta$. En vertu des relations (2) et (3), on obtient pour la première des intégrales l'évaluation : $|I_1| < \frac{\varepsilon}{2}$. Fixons le $\delta > 0$ choisi et évaluons l'intégrale I_2. La fonction $f(\theta)$ étant bornée ($|f(\theta)| < M$), on a

$$|I_2| \leqslant \frac{R^2-\rho^2}{\pi} M \int_{|\theta-\alpha|\geqslant\delta} \frac{d\theta}{R^2-2R\rho\cos(\theta-\omega)+\rho^2}.$$

Désignons par Q_0 le point de coordonnées $R\cos\alpha$, $R\sin\alpha$, et par P le point de coordonnées $R\cos\theta$, $R\sin\theta$ pour les θ tels que $|\theta - \alpha| \geqslant \delta$. La distance entre les points Q_0 et P est supérieure à la constante positive $l = 2R\sin\frac{\delta}{2}$ (cf. fig. 3). Etant donné que le dénominateur de l'expression sous le signe d'intégration est égal à $r^2(Q_0, P)$ — au carré de la distance entre les points Q_0 et P — , pour tous les points Q dont la distance à Q_0 est inférieure à $l/2$ on a $r^2(P, Q) > (l/2)^2$, si bien que pour ces points

$$\int_{|\theta-\alpha|\geqslant\delta} \frac{d\theta}{R^2-2R\rho\cos(\theta-\omega)+\rho^2} < \frac{2\pi}{\left(\frac{l}{2}\right)^2} = \frac{8\pi}{l^2}.$$

Pour de tels points

$$|I_2| < \frac{R^2-\rho^2}{\pi} M \cdot \frac{8\pi}{l^2} < \frac{16RM}{l^2}(R-\rho).$$

Comme $R-\rho$ n'excède pas la distance entre Q et Q_0, pour les points Q du cercle dont la distance à Q_0 est inférieure à $\delta_1(\varepsilon) = \min\left\{\frac{l}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{l^2}{16RM}\right\}$, où $l = 2R\sin\frac{\delta(\varepsilon)}{2}$, on a les deux inégalités $|I_1| < \varepsilon/2$, $|I_2| < \varepsilon/2$. Par conséquent, pour ces points $|u(Q) - f(\alpha)| < \varepsilon$.

Ainsi, la fonction $u(x, y)$ sera continue au point $x = R\cos\alpha$, $y = R\sin\alpha$ si on la détermine en ce point par la valeur $f(\alpha)$. La continuité de $u(x, y)$ dans le cercle a été démontrée auparavant.

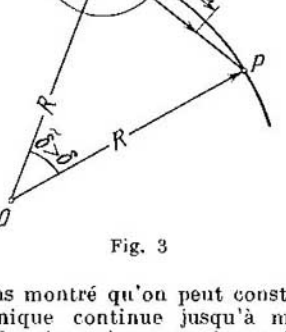

Fig. 3

Par là, nous avons montré qu'on peut construire dans un cercle une fonction harmonique continue jusqu'à même la frontière et prenant sur la frontière des valeurs continues données. *Le problème de la reconstitution d'une fonction harmonique continue d'après ses valeurs sur la frontière d'un domaine borné est appelé problème de Dirichlet.*

Démontrons l'unicité de la solution d'un tel problème. Supposons qu'on ait deux solutions $u_1(x, y)$, $u_2(x, y)$. Alors, leur différence sera aussi continue et harmonique et elle s'annulera sur la frontière. D'après le principe du maximum

$$0 = \min_{\Gamma} u \leqslant u(x, y) \leqslant \max_{\Gamma} u = 0.$$

Par conséquent, $u(x, y) = u_1 - u_2 \equiv 0$. L'unicité est démontrée. Si le domaine est arbitraire, le problème de Dirichlet peut ne pas avoir de solution. Nous reviendrons longuement par la suite sur

l'étude des conditions dans lesquelles le problème de Dirichlet est résoluble. En attendant, nous examinerons au paragraphe suivant une certaine classe de problèmes de physique mathématique, laquelle classe contient, par exemple, les processus de propagation de la chaleur. On aura apporté ainsi un exemple de problème physique qui se ramène au problème de Dirichlet.

§ 3. Equation de la chaleur

Déduction de l'équation de la chaleur. Problème de Dirichlet en tant que problème de la détermination de la distribution stationnaire de la température d'après la température de la frontière du domaine. Position des problèmes pour l'équation de la chaleur à une dimension. Principe du maximum pour cette équation. Théorèmes d'unicité des problèmes 1 et 2 pour l'équation de la chaleur dans différentes hypothèses relatives à la solution et à la fonction initiale.

Nous allons esquisser la déduction de l'équation de la chaleur à partir de considérations physiques. Le milieu dans lequel nous considérerons les processus de transmission de la chaleur doit être caractérisé par l'équation d'état calorifique $E = E(T)$, par la densité $\rho = \rho(x, y, z)$ et par le coefficient de conductivité thermique $K = K(x, y, z)$. Ici T est la température, $E(T)$ l'énergie interne du corps par unité de masse, si cette masse est portée à la température T. On peut envisager un milieu dont les propriétés thermiques varient d'un point de l'espace à l'autre. Dans ce cas, l'équation d'état a la forme plus générale $E = E(x, y, z, T)$. La quantité de chaleur contenue dans un volume infinitésimal

$$x_0 - \frac{\Delta x}{2} \leqslant x \leqslant x_0 + \frac{\Delta x}{2},$$

$$y_0 - \frac{\Delta y}{2} \leqslant y \leqslant y_0 + \frac{\Delta y}{2},$$

$$z_0 - \frac{\Delta z}{2} \leqslant z \leqslant z_0 + \frac{\Delta z}{2}$$

est à l'instant t

$$\rho(x_0, y_0, z_0)\, E(x_0, y_0, z_0, T(t))\, \Delta x\, \Delta y\, \Delta z.$$

La variation de cette quantité de chaleur au cours du temps Δt est

$$\rho(x_0, y_0, z_0) \frac{\partial E(x_0, y_0, z_0, T)}{\partial t} \Delta t\, \Delta x\, \Delta y\, \Delta z.$$

Cette variation est due uniquement au fait que de la chaleur entre ou sort par la frontière du volume distingué, si l'on suppose qu'il n'y ait pas dégagement ou absorption d'énergie.

La quantité de chaleur traversant l'élément d'aire ΔS dans le temps Δt est

$$K \frac{\partial T}{\partial n} \Delta t\, \Delta S.$$

Ici K est le coefficient de thermoconductivité au point où est mené l'élément d'aire infinitésimal, $\frac{\partial T}{\partial n}$ est la dérivée de la température suivant la normale à l'élément d'aire. La chaleur s'écoule du domaine des températures élevées vers le domaine des températures moindres.

La formule donnée pour le flux de chaleur constitue la loi de thermoconduction de Newton dans un corps isotrope. Cette loi est la synthèse d'un grand nombre de faits expérimentaux.

Ecrivons les quantités de chaleur traversant les aires

$$x = x_0 \pm \Delta x/2,$$
$$y = y_0 \pm \Delta y/2.$$
$$z = z_0 \pm \Delta z/2,$$

délimitant le volume envisagé.

La quantité de chaleur traversant l'aire $x = x_0 + \Delta x/2$ est

$$+K\left(x_0+\frac{\Delta x}{2},\ y_0,\ z_0\right)\frac{\partial T}{\partial x}\Bigg|_{\substack{x=x_0+\Delta x/2\\ y=y_0\\ z=z_0}}\Delta t\,\Delta y\,\Delta z,$$

celle traversant l'aire $x = x_0 - \Delta x/2$ étant

$$-K\left(x_0-\frac{\Delta x}{2},\ y_0,\ z_0\right)\frac{\partial T}{\partial x}\Bigg|_{\substack{x=x_0-\Delta x/2\\ y=y_0\\ z=z_0}}\Delta t\,\Delta y\,\Delta z.$$

La quantité de chaleur totale qui entre dans notre volume à travers ces deux aires est

$$\left[K\left(x_0+\frac{\Delta x}{2},\ y_0,\ z_0\right)\frac{\partial T}{\partial x}\Bigg|_{\substack{x=x_0+\Delta x/2\\ y=y_0\\ z=z_0}}-\right.$$
$$\left.-K\left(x_0-\frac{\Delta x}{2},\ y_0,\ z_0\right)\frac{\partial T}{\partial x}\Bigg|_{\substack{x=x_0-\Delta x/2\\ y=y_0\\ z=z_0}}\right]\Delta t\,\Delta y\,\Delta z\approx$$
$$\approx\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial T}{\partial x}\right)\Bigg|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0\\ z=z_0}}\right]\Delta x\,\Delta t\,\Delta y\,\Delta z.$$

De même, la quantité de chaleur qui, dans le temps Δt, pénètre dans notre volume à travers les aires $y = y_0 \pm \Delta y/2$, $z = z_0 \pm \Delta z/2$, vaut respectivement

$$\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(K\frac{\partial T}{\partial y}\right)\right]_{\substack{x=x_0\\ y=y_0\\ z=z_0}}\Delta x\,\Delta y\,\Delta z\,\Delta t,$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(K\frac{\partial T}{\partial z}\right)\right]_{\substack{x=x_0\\ y=y_0\\ z=z_0}}\Delta x\,\Delta y\,\Delta z\,\Delta t$$

Faisant la somme de tous les afflux de chaleur et égalant leur somme à la variation d'énergie interne, on obtient

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(K\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(K\frac{\partial T}{\partial z}\right)\right]_{\substack{x=x_0\\ y=y_0\\ z=z_0}}\Delta x\,\Delta y\,\Delta z\,\Delta t =$$

$$= \rho(x_0, y_0, z_0)\frac{\partial E(x_0, y_0, z_0, T)}{\partial t}\Delta x\,\Delta y\,\Delta z\,\Delta t.$$

Divisant les deux membres de cette égalité par $\Delta x\,\Delta y\,\Delta z\,\Delta t$ et notant que le point (x_0, y_0, z_0) peut être pris arbitrairement (si bien qu'on peut supprimer l'indice zéro), nous sommes conduits à la forme définitive de l'équation de la chaleur

$$\rho(x, y, z)\frac{\partial E(x, y, z, T)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(K\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(K\frac{\partial T}{\partial z}\right).$$

Les hypothèses relatives aux fonctions figurant dans cette équation sont :

$$\rho > 0,\ \frac{\partial E}{\partial T} > 0,\ K > 0.$$

Ces hypothèses généralisent des faits expérimentaux.

On écrit parfois l'équation de la chaleur sous la forme

$$C\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(K\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(K\frac{\partial T}{\partial z}\right),$$

en désignant par $C(x, y, z, T)$ l'expression $\rho\frac{\partial E}{\partial T}$. La quantité C s'appelle, pour des raisons très compréhensibles, *chaleur spécifique* (de l'unité de volume).

Si la chaleur spécifique C et le coefficient de thermoconduction K ne dépendent pas de T, x, y, z, c'est-à-dire si ce sont des constantes, l'équation peut se recopier sous la forme :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{K}{C}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right).$$

Le coefficient $\frac{K}{C}$ est ce qu'on appelle la *diffusivité*.

Il est intéressant d'envisager le cas où la distribution de la température est stationnaire $\left(\frac{\partial T}{\partial t}=0\right)$. On voit que si $K = \text{const}$ la distribution stationnaire de la température est décrite par la solution $T(x, y, z)$ de l'équation de Laplace :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0.$$

Le problème de Dirichlet pour cette équation consiste à trouver la distribution de la température dans un corps, connaissant les valeurs de T sur la frontière.

Si le domaine est un cylindre de révolution très haut de génératrices parallèles à l'axe des z, et si le long de chacune de ces génératrices frontières la température est constante, on peut considérer que la distribution de la température au voisinage de la section horizontale moyenne du cylindre ne dépend presque pas de z et peut être décrite par la solution $T = T(x, y)$ de l'équation de Laplace $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$. Connaissant la température sur les génératrices du cylindre, $T(R\cos\theta, R\sin\theta)$, on peut, d'après la formule de Poisson, déterminer $T(x, y)$ dans le cylindre, c'est-à-dire dans un cercle du plan des variables x, y.

Si le domaine est une couche mince entre deux plans voisins sur lesquels la température est maintenue constante (chaque plan a sa température), la distribution (stationnaire) $T(x)$ des températures entre les plans $x = x_1$, $x = x_2$ vérifie l'équation

$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0.$$

La solution générale de cette équation différentielle s'écrit

$$T = b_1 x + b_2.$$

Les constantes b_1, b_2 doivent être déterminées par les conditions aux limites — par les températures sur les plans limites. Ceci fait, il vient

$$T = \frac{(x_2 - x)\,T_1 + (x - x_1)\,T_2}{x_2 - x_1}, \quad \text{où } T_1 = T(x_1),\ T_2 = T(x_2).$$

Etudiant l'équation de la chaleur non stationnaire, nous nous bornerons par la suite au cas unidimensionnel et nous supposerons les coefficients K, C constants

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{K}{C}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$

On peut changer l'échelle de l'axe des x de façon à avoir $K/C = 1$. Etudiant l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

nous désignerons habituellement la température inconnue par la lettre u.

Pour l'équation de la chaleur la plus simple, nous nous bornerons à l'examen des deux problèmes suivants :

P r o b l è m e 1. *On demande de trouver une solution finie $u(x, t)$ continue dans le domaine $t \geqslant 0$, vérifiant l'équation de la chaleur pour $t > 0$ et égale à une fonction donnée continue et bornée $\varphi(x)$ pour $t = 0$.* (Ce problème est lié à la propagation de la chaleur dans un milieu illimité.)

Remarque. Au lieu d'exiger des fonctions $\varphi(x)$ et $u(x, t)$ qu'elles soient bornées, on peut leur imposer d'autres conditions moins restrictives. Nous reviendrons sur ce point.

Problème 2. *Trouver dans le domaine rectangulaire* $A \leqslant x \leqslant B$, $0 \leqslant t \leqslant T$ *une solution continue jusqu'à même la frontière de l'équation*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

cette solution vérifiant les conditions aux limites suivantes:

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad A \leqslant x \leqslant B,$$
$$u(A, t) = \psi_A(t),$$
$$u(B, t) = \psi_B(t).$$

(Ce problème est lié à la propagation de la chaleur dans un domaine borné.)

Nous supposons les fonctions $\varphi(x)$, $\psi_A(t)$, $\psi_B(t)$ continues et donc bornées sur les segments fermés $A \leqslant x \leqslant B$, $0 \leqslant t \leqslant T$. On suppose aussi remplie la « condition de concordance » $\varphi(A) = \psi_A(0)$, $\varphi(B) = \psi_B(0)$. Faute de quoi, la fonction continue $u(x, t)$ ne pourrait être construite.

Par « solution continue jusqu'à même la frontière » nous entendons ici ce qui suit. La fonction $u(x, t)$ est continue pour $A \leqslant x \leqslant B$, $0 \leqslant t \leqslant T$, elle a en chaque point « intérieur » ($A < x < B$, $0 < t \leqslant T$) des dérivées premières et secondes vérifiant l'égalité $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. L'observation de cette égalité aux points de la frontière et même la dérivabilité de $u(x, t)$ aux points frontières ($x = A$, $0 \leqslant t \leqslant T$), ($A \leqslant x \leqslant B$, $t = 0$), ($x = B$, $0 \leqslant t \leqslant T$) ne sont pas supposées.

Nous commencerons l'étude des problèmes 1 et 2 par la déduction du théorème d'unicité basé sur un principe du maximum rappelant le principe du maximum pour l'équation de Laplace.

Principe du maximum pour l'équation de la chaleur. *Toute solution de l'équation de la chaleur dans le rectangle* $A < x < B$, $0 < t \leqslant T$ *continue jusqu'à même la frontière prend ses plus grandes et ses plus petites valeurs sur le côté inférieur ou sur les côtés latéraux de sa frontière.* Sur la fig. 4 ces frontières sont tracées en trait double.

Désignons par M le maximum de $u(x, t)$ sur tout notre rectangle, par m la plus grande valeur de $u(x, t)$ sur la frontière double, et supposons $M > m$. Soit (x_0, t_0) le point de notre rectangle (intérieur ou se trouvant sur sa frontière supérieure) pour lequel $u(x_0, t_0) = M$.

Considérons la fonction auxiliaire

$$v(x, t) = u(x, t) + \frac{M - m}{2(B - A)^2}(x - x_0)^2.$$

Sur la frontière « double » $v(x, t)$ vérifie l'inégalité

$$v(x, t) \leqslant u(x, t) + \frac{M-m}{2(B-A)^2}(B-A)^2 \leqslant m + \frac{M-m}{2} < M.$$

Par ailleurs, $v(x_0, t_0) = u(x_0, t_0) = M$, c'est-à-dire que la plus grande valeur de $v(x, t)$ n'est pas inférieure à M. $v(x, t)$ prend sa plus grande valeur en un certain point (x_1, t_1). Etant donné

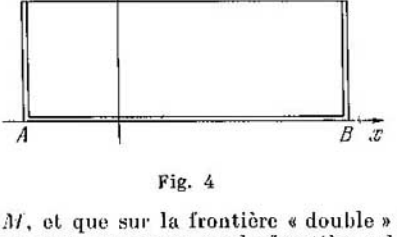

Fig. 4

que $v(x_1, t_1) \geqslant M$, et que sur la frontière « double » $v(x, t) < M$, le point (x_1, t_1) ne peut se trouver sur la frontière « double ».

Si (x_1, t_1) est un point intérieur de maximum, en ce point $v_t = 0$, $v_x = 0$, $v_{xx} \leqslant 0$, et donc $v_t - v_{xx} \geqslant 0$. Mais si (x_1, t_1) se trouve sur la frontière supérieure du rectangle, $v_t \geqslant 0$, $v_x = 0$, $v_{xx} \leqslant 0$ et de nouveau $v_t - v_{xx} \geqslant 0$. Ainsi, nous avons montré que si $M = \max u(x, t) > m$, il existe un point (x_1, t_1) en lequel $v_t - v_{xx} \geqslant 0$. Or, utilisant le fait que $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $v(x, t) = u(x, t) + \frac{M-m}{2(B-A)^2}(x - x_0)^2$, on peut calculer sans peine $v_t - v_{xx}$:

$$v_t - v_{xx} = -\frac{M-m}{(B-A)^2} < 0.$$

La contradiction obtenue prouve que l'inégalité $M > m$ est impossible. Par là, l'inégalité $u(x, t) \leqslant \max u(x, t)$ sur la frontière « double » est démontrée. Le principe du maximum est vrai.

La fonction $-u(x, t)$ vérifiant aussi l'équation de la chaleur, on peut, en lui appliquant le principe du maximum, démontrer de même le

P r i n c i p e d u m i n i m u m. *$u(x, t)$ prend sa plus petite valeur sur la frontière « double ».*

R e m a r q u e. Nous supposons dans la démonstration $u(x, t)$ deux fois dérivable en tous les points intérieurs du rectangle et sur sa frontière supérieure. Il suffit de supposer l'existence des dérivées secondes aux points intérieurs, et la continuité de $u(x, t)$ jusqu'à même les frontières. En effet, du principe du maximum

$$u(x, t)\big|_{0 \leqslant t \leqslant T-\varepsilon} \leqslant m$$

il résulte, en vertu de la continuité de $u(x, t)$, que

$$u(x, T) \leqslant m.$$

Unissant le principe du maximum au principe du minimum, on obtient l'inégalité pour $|u(x, t)|$:

$$|u(x, t)| \leqslant \max |u(x, t)| \text{ sur la frontière « double ».}$$

Démontrons le théorème d'unicité de la solution du problème 2. Soient $u_1(x, t)$, $u_2(x, t)$ deux solutions de ce problème. Alors, $u(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$ sera une fonction continue telle que

$$u(A, t) = 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

$$u(x, 0) = 0 \quad \text{pour} \quad A \leqslant x \leqslant B,$$

$$u(B, t) = 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

A l'intérieur du rectangle $A < x < B$, $0 < t < T$ la fonction $u(x, t)$ vérifie, de toute évidence, l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\right) - \left(\frac{\partial u_2}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right) = 0.$$

On déduit du principe du maximum :

$$\max_{\substack{A \leqslant x \leqslant B \\ 0 \leqslant t \leqslant T}} |u(x, t)| \leqslant$$

$$\leqslant \max \left\{ \max_{A \leqslant x \leqslant B} |u(x, 0)|, \max_{0 \leqslant t \leqslant T} |u(A, t)|, \max_{0 \leqslant t \leqslant T} |u(B, t)| \right\} = 0.$$

Il est clair que $u(x, t) \equiv 0$ pour $A \leqslant x \leqslant B$, $0 \leqslant t \leqslant T$, c'est-à-dire que, dans ce rectangle, $u_1(x, t) \equiv u_2(x, t)$. L'unicité de la solution du problème 2 est démontrée.

La démonstration de l'unicité de la solution du problème 1 est un peu plus compliquée. Rappelons la position de ce problème.

Problème 1. *Trouver une fonction $u(x, t)$ continue et bornée dans le demi-plan $t \geqslant 0$, $-\infty < x < +\infty$, satisfaisant pour $t > 0$ à l'équation $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, et pour $t = 0$ à la condition initiale $u(x, 0) = \varphi(x)$. Ici $\varphi(x)$ est une fonction de x arbitraire bornée continue. Le fait que la fonction soit bornée sera supposé donné sous forme d'inégalités*

$$|u(x, t)| < M, \quad |\varphi(x)| < M.$$

Démontrons le théorème d'unicité pour le problème 1. Envisageons une certaine solution particulière $v(x, t)$ de l'équation $\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$, définie par la formule

$$v(x, t) = \frac{2M}{l^2}(x^2 + 2t).$$

En dérivant directement on vérifie que l'équation est satisfaite :

$$\frac{\partial v}{\partial t} = 4\frac{M}{L^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

Il est clair que cette solution satisfait aux inégalités :

$$v(x, 0) = \frac{2M}{L^2} x^2 \geqslant 0,$$

$$v(\pm L, t) = \frac{2M}{L^2}(L^2 + 2t) \geqslant 2M.$$

Si le problème 1 a deux solutions $u_1(x, t)$ et $u_2(x, t)$, leur différence $u = u_1 - u_2$ est solution de l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

cette solution satisfait pour $t \geqslant 0$ aux inégalités $|u(x, t)| \leqslant 2M$, et elle s'annule pour $t = 0$: $u(x, 0) = 0$. Il résulte du principe du maximum que, étant donné que sur la frontière inférieure ($t = 0$) et sur les frontières latérales ($x = \pm L$) du rectangle $0 \leqslant t \leqslant T$ (T arbitraire), $-L \leqslant x \leqslant L$ la différence $v(x, t) - u(x, t) \geqslant 0$, cette inégalité sera conservée à l'intérieur du rectangle aussi. (La différence $v - u$ vérifie également l'équation de la chaleur.) Ainsi, pour $-L \leqslant x \leqslant L$, nous avons démontré l'inégalité

$$u(x, t) \leqslant \frac{2M}{L^2}(x^2 + 2t).$$

Notant que la fonction $\tilde{u}(x, t) = -u(x, t)$ satisfait à l'équation et à l'inégalité $\tilde{u} \leqslant 2M$, on trouve exactement de la même manière

$$-u(x, t) \leqslant \frac{2M}{L^2}(x^2 + 2t).$$

Si l'on réunit les deux inégalités déduites, on voit que

$$|u(x, t)| \leqslant \frac{2M}{L^2}(x^2 + 2t).$$

Fixant le point (x, t) $(t > 0)$ et choisissant différents L, on voit que l'inégalité doit être vérifiée pour tous les L suffisamment grands, et comme on peut faire tendre L vers l'infini, on déduit que

$$|u(x, t)| = 0,$$

$$u_1 - u_2 = 0 \quad \text{pour} \quad t > 0.$$

Le théorème d'unicité de la solution du problème 1 est démontré.

Nous allons à présent affaiblir les restrictions imposées aux fonctions $u(x, t)$, $\varphi(x)$ et démontrer que l'unicité subsiste dans ces conditions moins restrictives.

Envisageons deux solutions $u_1(x, t)$ et $u_2(x, t)$ de l'équation de la chaleur, définies dans le demi-plan $t > 0$, continues jusqu'à $t = 0$, satisfaisant aux conditions

$$u_1(x, 0) = \varphi(x), \quad u_2(x, 0) = \varphi(x)$$

et aux inégalités

$$|u_1(x, t)| \leqslant M(t) e^{a|x|},$$
$$|u_2(x, t)| \leqslant M(t) e^{a|x|},$$

$M(t)$ étant une fonction continue monotone de t. Elle peut croître arbitrairement vite en même temps que t.

Nous allons démontrer que $u_1(x, t) \equiv u_2(x, t)$. Prenons un segment temporel arbitraire fini $0 \leqslant t \leqslant T$ et établissons la coïncidence $u_1(x, t) \equiv u_2(x, t)$ pour les t de ce segment. L'arbitraire de T entraîne l'unicité de la solution dans tout le demi-plan supérieur.

Ainsi, soit $0 \leqslant t \leqslant T$. Alors,

$$|u_1(x, t) - u_2(x, t)| \leqslant |u_1(x, t)| + |u_2(x, t)| \leqslant 2M(t) e^{a|x|} \leqslant M^* e^{a|x|}.$$

Nous avons désigné ici par M^*

$$2 \max_{0 \leqslant t \leqslant T} M(t) = 2M(T).$$

Comme d'habitude, nous concluons que la fonction $u = u_1 - u_2$ vérifie l'équation $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, la condition $u(x, 0) = 0$, et, d'après ce qu'on a démontré, encore l'inégalité

$$|u(x, t)| \leqslant M^* e^{a|x|} \quad (0 \leqslant t \leqslant T).$$

On démontrera que de ces conditions résulte l'égalité

$$u(x, t) \equiv 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

La démonstration sera presque la même que dans l'hypothèse que $u(x, t)$ est bornée, à cela près qu'on prendra une autre solution majorante.

Posons

$$v(x, t) = M^* (e^{aL} + e^{-aL}) \frac{e^{2ax} + e^{-2ax}}{e^{2aL}} e^{4a^2 t}.$$

On vérifie facilement l'égalité $\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$. En effet,

$$v(x, t) = \frac{M^* (e^{aL} + e^{-aL})}{e^{2aL}} e^{2ax + 4a^2 t} + \frac{M^* (e^{aL} + e^{-aL})}{e^{2aL}} e^{-2ax + 4a^2 t} =$$

$$= be^{2ax + 4a^2 t} + be^{-2ax + 4a^2 t}$$

si bien qu'il suffit de s'assurer que les fonctions $e^{\pm 2ax+4a^2t}$ sont des solutions. Ceci s'obtient facilement en dérivant :

$$\frac{\partial}{\partial t} e^{\pm 2ax+4a^2t} = 4a^2 e^{\pm 2ax+4a^2t} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} e^{\pm 2ax+4a^2t}.$$

Pour $t = 0$

$$v(x, 0) > 0 = u(x, 0),$$

pour $0 \leqslant t \leqslant T$

$$v(\pm L, t) \geqslant M^* (e^{aL} + e^{-aL}) \frac{e^{2aL} + e^{-2aL}}{e^{2aL}} > M^* e^{aL}.$$

Par hypothèse, $u(\pm L, t) \leqslant M^* e^{aL}$.

Du principe du maximum on déduit à présent sans peine que, pour $0 \leqslant t \leqslant T$, $-L \leqslant x \leqslant L$, on a l'inégalité

$$u(x, t) \leqslant M^* (e^{aL} + e^{-aL}) \frac{e^{2ax} + e^{-2ax}}{e^{2aL}} e^{4a^2t}.$$

On démontre exactement de la même manière l'inégalité

$$-u(x, t) \leqslant M^* (e^{aL} + e^{-aL}) \frac{e^{2ax} + e^{-2ax}}{e^{2aL}} e^{4a^2t}.$$

Par conséquent,

$$|u(x, t)| \leqslant M^* (e^{aL} + e^{-aL}) \frac{e^{2ax} + e^{-2ax}}{e^{2aL}} e^{4a^2t}.$$

Fixons (x, t) et faisons tendre le paramètre L vers l'infini. Le second membre de l'inégalité tend alors vers zéro. Par conséquent,

$$|u(x, t)| \leqslant 0, \quad u(x, t) = 0.$$

Le théorème d'unicité est démontré.

En fait, on peut encore plus affaiblir l'inégalité

$$|u(x, t)| < M(t) e^{a|x|}.$$

On peut admettre une croissance encore plus rapide de $u(x, t)$ alors que x croît. Or, il existe des solutions de l'équation de la chaleur à croissance suffisamment rapide quand x croît, vérifiant pour $t = 0$ des données initiales nulles. Malheureusement, nous ne pouvons pas nous permettre d'envisager dans notre cours les exemples correspondants.

Nous allons étendre à présent le théorème d'unicité aux solutions à données initiales $\varphi(x)$ discontinues. Pour la simplicité, nous envisagerons le cas où $\varphi(x)$ n'a qu'un seul point de discontinuité de $\varphi(x)$, en l'occurrence le point $x = 0$. Alors, on ne pourra pas considérer non plus la solution comme étant continue au point $x = 0$, $t = 0$. En tous les autres points sa continuité sera supposée. Si

l'on a deux solutions $u_1(x, t)$, $u_2(x, t)$ telles que pour $x \neq 0$ on ait $u_i(x, 0) = \varphi(x)$, leur différence $u(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$ sera une fonction continue partout, sauf peut être au point $x = 0$, $t = 0$. Pour $x \neq 0$, on a $u(x, 0) = 0$. Nous démontrerons que si $u(x, t)$ est bornée au voisinage de ce point et si elle ne croît pas trop vite lorsque $|x| \to \infty$, alors $u(x, t) = 0$. De façon plus précise :

Supposons que la solution $u(x, t)$ *de l'équation* $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ *satisfasse, pour* $0 \leqslant t \leqslant T$, *à l'inégalité*

$$|u(x, t)| < M^* e^{a|x|},$$

qu'elle soit continue pour tous les x *et tous les* $t \geqslant 0$, *sauf peut être au point* $x = 0$, $t = 0$. *Soit* $u(x, 0) = 0$ *si* $x \neq 0$. *Dans ces hypothèses* $u(x, t) \equiv 0$ *pour* $0 \leqslant t \leqslant T$.

Démonstration. Considérons la fonction

$$v(x, t) = M^* (e^{aL} + e^{-aL}) \frac{e^{2ax} + e^{-2ax}}{e^{2aL}} e^{4a^2 t} + 2M^* \frac{e^{-\frac{x^2}{4(t+\varepsilon)}}}{\sqrt{t+\varepsilon}} \sqrt{\varepsilon}.$$

Elle est constituée par deux termes, dont nous avons déjà rencontré le premier :

$$M^* (e^{aL} + e^{-aL}) \frac{e^{2ax} + e^{-2ax}}{e^{2aL}} e^{4a^2 t}.$$

Ce terme vérifie l'équation de la chaleur. Il est facile de s'assurer que, pour tout $\varepsilon > 0$, le second terme vérifie aussi cette équation.

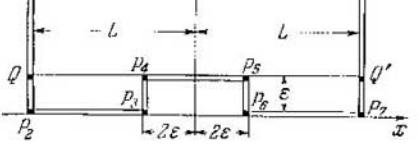

Fig. 5

Nous ne ferons pas les calculs démontrant ce qui vient d'être dit. Considérons le domaine $P_1 P_2 P_3 \ldots P_8$ représenté sur la fig. 5. Partout sur la frontière « double » (elle est représentée en trait double) $v(x, t) > 0$. Ceci est évident. Sur $[P_1, P_2]$, $[P_7, P_8]$ $v(\pm L, t) > M^*$. Nous avons déjà vérifié que le premier terme

satisfait à une telle inégalité. Le second terme ne peut que renforcer cette inégalité.

Montrons que sur $P_3P_4P_5P_6$ on a également $v(x, t) > M^*$. Il suffit de s'assurer que sur ce contour le second terme est supérieur à M^*.

Il est évident que pour $\varepsilon \geqslant t \geqslant 0$, $|x| < 2\varepsilon$ on a les inégalités :

$$\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{t+\varepsilon}} \geqslant \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\varepsilon+\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$e^{-\frac{x^2}{4(t+\varepsilon)}} \geqslant e^{-\frac{(2\varepsilon)^2}{4(0+\varepsilon)}} = e^{-\varepsilon} > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

(la dernière est vraie pour ε suffisamment petit),

$$2M^* \sqrt{\varepsilon} \frac{e^{-\frac{x^2}{4(t+\varepsilon)}}}{\sqrt{t+\varepsilon}} > 2M^* \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = M^*.$$

Ainsi, on a partout sur $P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7P_8$

$$v(x, t) > u(x, t),$$

$$w(x, t) = v(x, t) - u(x, t) > 0.$$

La différence w vérifie également l'équation $\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$, si bien que le principe du maximum est vrai pour elle. Il résulte de ce principe que partout dans le contour fermé $P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7P_8P_1$ on a également $w(x, t) = v(x, t) - u(x, t) > 0$. Pour le démontrer, il suffit de découper le domaine délimité par ce contour par les segments $[t = \varepsilon, -L \leqslant x \leqslant -2\varepsilon]$, $[t = \varepsilon, 2\varepsilon \leqslant x \leqslant L]$ en trois rectangles $QP_2P_3P_4$; $P_5P_6P_7Q'$; $P_1QQ'P_8$, ainsi qu'on l'a montré sur la fig. 5, et d'utiliser successivement pour chacun d'eux le principe du maximum.

Ainsi, on a pour $-L \leqslant x \leqslant L$, $\varepsilon \leqslant t \leqslant T$ l'inégalité

$$u(x, t) < M^* (e^{aL} + e^{-aL}) \frac{e^{2ax} + e^{-2ax}}{e^{2aL}} e^{4a^2 t} +$$

$$+ 2M^* \sqrt{\varepsilon} \frac{e^{-\frac{x^2}{4(t+\varepsilon)}}}{\sqrt{t+\varepsilon}} = v(x, t).$$

On obtient par un raisonnement analogue

$$-u(x, t) < v(x, t)$$

et par conséquent

$$|u(x, t)| < M^* (e^{aL} + e^{-aL}) \frac{e^{2ax} + e^{-2ax}}{e^{2aL}} e^{4a^2 t} + 2M^* \sqrt{\varepsilon} \frac{e^{-\frac{x^2}{4(t+\varepsilon)}}}{\sqrt{t+\varepsilon}}.$$

Fixant le point (x, t) et faisant tendre L vers l'infini et ε vers zéro, nous sommes conduits à l'assertion

$$|u(x, t)| \leqslant 0,$$
$$u(x, t) = 0.$$

Ceci achève la démonstration.

On pourrait démontrer, sans mettre en œuvre de nouvelles idées, un théorème d'unicité analogue lorsque la solution $u(x, t)$ a, pour $t = 0$, non pas un seul point de discontinuité, mais un nombre arbitraire fini de points de discontinuité. Qui plus est, on peut supposer que les points de discontinuité sont en nombre infini, mais la distance entre deux points de discontinuité voisins doit être bornée inférieurement.

Problème. Démontrer que la solution bornée de l'équation de la chaleur $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, continue partout dans le rectangle $A \leqslant x \leqslant B$, $0 \leqslant t \leqslant T$, sauf peut être en des points anguleux ($x = A$, $t = 0$), ($x = B$, $t = 0$), est univoquement déterminée par les conditions initiales et aux limites $u(x, 0) = \varphi(x)$, $u(A, t) = \psi_A(t)$, $u(B, t) = \psi_B(t)$. Ici on ne suppose plus les conditions initiales et aux limites en « concordance » aux angles.

Sur ce, nous terminons la démonstration des théorèmes d'unicité, pour passer au paragraphe suivant au théorème d'existence de la solution.

§ 4. Equation de la chaleur (suite)

Formule de Poisson pour l'équation de la chaleur et sa justification. Résolution à l'aide de l'intégrale de Poisson du problème le plus simple pour l'équation de la chaleur sur un segment fini. Déduction non rigoureuse heuristique de la formule intégrale pour la solution de l'équation de la chaleur. Exemples de solutions particulières des équations de la chaleur linéaire et non linéaire.

Nous allons montrer que la solution du problème 1 du § 3 est donnée par la formule

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(\xi)}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} d\xi. \qquad (1)$$

Si l'on justifie cette formule, on aura démontré le théorème d'existence. Nous n'expliquerons pas ici comment on imagine cette formule (dite *intégrale de Poisson pour l'équation de la chaleur*). L'explication en sera donnée plus tard. Nous nous proposons ici de faire une étude minutieuse de la formule de Poisson sans nous intéresser à la manière dont elle a été obtenue.

Ainsi, nous commençons l'étude de la fonction $u(x, t)$.

Propriété 1. *Si* $|\varphi(\xi)| < Me^{a|\xi|}$, *l'intégrale* (1) *converge, et la fonction* $u(x, t)$ *vérifie l'inégalité*

$$|u(x, t)| < 2Me^{a^2 t} e^{a|x|}.$$

La démonstration découle de la chaîne suivante d'inégalités et d'égalités:

$$|u(x,t)| \leqslant \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Me^{a|\xi|}}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Me^{a|x|+a|\xi-x|}}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} d\xi =$$

$$= \frac{Me^{a|x|}}{2\sqrt{\pi}} 2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{a|\xi-x|}{2\sqrt{t}} 2\sqrt{t}} e^{-\left(\frac{|\xi-x|}{2\sqrt{t}}\right)^2} \frac{d(\xi-x)}{2\sqrt{t}} =$$

$$= \frac{Me^{a|x|}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2+a|\eta|2\sqrt{t}} d\eta = \frac{Me^{a|x|}}{\sqrt{\pi}} 2 \int_{0}^{+\infty} e^{-\eta^2+a\eta\cdot 2\sqrt{t}} d\eta =$$

$$= \frac{Me^{a|x|}}{\sqrt{\pi}} 2e^{a^2t} \int_{0}^{\infty} e^{-(\eta-a\sqrt{t})^2} d\eta < \frac{2Me^{a^2t}e^{a|x|}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\zeta^2} d\zeta =$$

$$= \frac{2Me^{a^2t}e^{a|x|}}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\pi} = 2Me^{a^2t}e^{a|x|}.$$

La propriété 1 est ainsi démontrée.

Propriété 2. *Pour $t > 0$ la fonction $u(x, t)$ est indéfiniment dérivable, et ses dérivées peuvent être calculées à l'aide de l'intégrale convergente ci-après:*

$$\frac{\partial^{m+n}u(x,t)}{\partial x^m \partial t^n} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial t^n} \left[\frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\right] d\xi.$$

Nous supposons à nouveau $|\varphi(\xi)| < Me^{a|\xi|}$.

Démonstration. On s'assure sans peine que

$$\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial t^n}\left[\frac{\varphi(\xi)}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\right] =$$

$$= \varphi(\xi)\left[\sum_{\text{finie}} \frac{\text{polynôme de } (x-\xi)}{\text{puissance de } t}\right] e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} =$$

$$= \varphi(\xi) P(\xi, x, t) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}.$$

Prenons un certain intervalle de temps arbitraire $0 < t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ et un segment $-x_0 \leqslant x \leqslant x_0$ de l'axe des x.

Pour les points (x, t) du domaine $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, $-x_0 \leqslant x \leqslant x_0$ on peut évaluer comme suit l'expression de $P(\xi, x, t)$:

$$|P(\xi, x, t)| \leqslant \text{const}\,|\xi|^p < \text{const}\, e^{|\xi|}.$$

(Nous avons désigné par p la plus haute puissance de $(x - \xi)$ figurant dans l'expression de $P(\xi, x, t)$.) Par conséquent, on peut écrire

$$|\varphi(\xi) P(\xi, x, t)| < N(x_0, t_0, t_1) e^{(a+1)|\xi|}.$$

Il résulte de cette inégalité que l'intégrale

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial t^n} \left[\frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} \right] d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) P(\xi, x, t) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} d\xi$$

converge uniformément pour $-x_0 \leqslant x \leqslant +x_0$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$.

D'après un théorème connu d'analyse relativement à la dérivation d'intégrales impropres par rapport à un paramètre, on en déduit la légitimité de l'égalité

$$\frac{\partial^{m+n} u(x, t)}{\partial x^m \partial t^n} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial t^n} \left[\frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} \right] d\xi.$$

En vertu de l'arbitraire de x_0, t_0, t_1, cette égalité est vraie en tous les points intérieurs du demi-plan supérieur $t > 0$. La propriété 2 est démontrée.

Propriété 3. *La fonction $u(x, t)$ vérifie pour $t > 0$ l'équation* $\dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$.

Démonstration. En vertu de la propriété 2,

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} \right] d\xi.$$

Il ne reste plus qu'à vérifier par dérivation directe l'égalité

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} = 0.$$

Cette vérification achève la démonstration de la propriété 3.

La fonction $\varphi(\xi)$ vérifiant l'inégalité $|\varphi(\xi)| < Me^{a|\xi|}$ sera supposée continue par morceaux. Nous allons démontrer maintenant la propriété suivante.

Propriété 4. *Si $\varphi(\xi)$ est continue au point x_0, la fonction $u(x, t)$ est continue au point $(x_0, 0)$, et*

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ x \to x_0}} u(x, t) = \varphi(x_0).$$

Pour la démontrer, faisons dans l'intégrale de Poisson le changement de variable suivant : $\frac{\xi - x}{2\sqrt{t}} = \zeta$. Alors, $u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \times$ $\times \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\zeta^2} \varphi(x + 2\zeta\sqrt{t})\, d\zeta$. Cette intégrale converge uniformément par rapport à x et t pour les valeurs bornées de ces variables. En effet, pour $|x| < R$, $0 \leqslant t \leqslant t_1$, la fonction sous le signe d'intégration a la majorante intégrable $Me^{-\zeta^2 + aR + 2a\sqrt{t_1}|\zeta|}$.

Puis, sur tout segment borné $|\zeta| \leqslant N$ la fonction sous le signe d'intégration tend, lorsque $x \to x_0$, $t \to 0$, vers $e^{-\zeta^2} \varphi(x_0)$ uniformément par rapport à ζ. Cette propriété résulte de la continuité de $\varphi(x)$ au point x_0.

En vertu d'un théorème connu sur le passage à la limite sous une intégrale impropre, on en déduit que

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ t \to 0}} u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\zeta^2} \varphi(x_0)\, d\zeta = \varphi(x_0).$$

Résumons. Nous avons montré que la fonction définie par l'égalité

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi)\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\, d\xi$$

est, pour $t > 0$, une solution un nombre arbitraire de fois dérivable de l'équation de la chaleur si $\varphi(\xi)$ est une fonction continue par morceaux vérifiant l'inégalité

$$|\varphi(\xi)| < Me^{a|\xi|}.$$

Cette solution s'évalue comme suit :

$$|u(x, t)| < 2Me^{a^2 t} e^{a|x|}.$$

Et, enfin, $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ t \to 0}} u(x, t) = \varphi(x_0)$ si le point x_0 se trouve dans un certain segment de continuité de $\varphi(x)$. La formule de $u(x, t)$ donne, c'est évident, la solution du problème 1. Le théorème de continuité est ainsi démontré.

Notons encore une propriété utile de l'intégrale (1).

Propriété 5. *Supposons que* $\varphi(\xi)$ *vérifie l'inégalité* $|\varphi(\xi)| < Me^{a|\xi|}$ *et, en outre, que* $\varphi(\xi) \equiv 0$ *pour* $A < \xi < B$. *Alors, aux points de l'intervalle* $A < x < B$, $t = 0$ *la fonction* $u(x, t)$ *est nulle en même temps que toutes ses dérivées par rapport à* x *et* t.

La démonstration de la propriété 5 se déduit assez facilement de la forme explicite de l'intégrale de Poisson, si bien que nous l'omettrons.

Montrons à présent comment à l'aide de l'intégrale de Poisson on peut résoudre dans quelques cas simples le problème 2. A cet effet, considérons une fonction impaire $\varphi(\xi)$:

$$\varphi(\xi) = -\varphi(-\xi).$$

Dans ce cas, on peut recopier comme suit la formule pour $u(x, t)$:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty \varphi(\xi)\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\, d\xi - \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^0 \varphi(|\xi|)\, e^{-\frac{(x+|\xi|)^2}{4t}}\, d\xi.$$

D'où $u(0, t) = 0$, $u(x, t) = -u(-x, t)$.

Par exemple, on peut prendre pour $\varphi(\xi)$ la fonction sign ξ, discontinue pour $\xi = 0$. Pour $t > 0$ la solution correspondante est

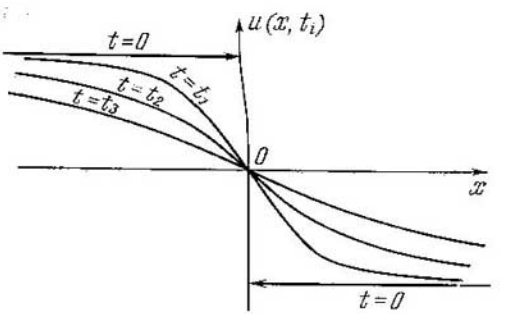

Fig. 6

continue. Le graphique $u(x, t_i)$ de cette solution est représenté pour plusieurs instants consécutifs $t_0 = 0$, $t_1 > 0$, $t_2 > t_1$, $t_3 > t_2$ sur la fig. 6.

Il est clair que si $\varphi(\xi)$ est antisymétrique non pas par rapport au point $\xi = 0$, mais par rapport à $\xi = A$, alors la solution $u(x, t)$ sera elle aussi antisymétrique par rapport à $\xi = A$. En d'autres termes, si

$$\varphi(A + \xi) + \varphi(A - \xi) = 0,$$

on a

$$u(A + x, t) + u(A - x, t) = 0.$$

Supposons à présent $\varphi(\xi)$ donnée seulement sur le segment $A < \xi < B$. Prolongeons-la sur toute la droite comme suit:

$$\varphi(\xi) = -\varphi[2B - \xi + 2n(B - A)],$$

si $A + (2n+1)(B-A) < \xi < B + (2n+1)(B-A)$,

$$\varphi(\xi) = \varphi[\xi - 2n(B-A)],$$

si $A + 2n(B-A) < \xi < B + 2n(B-A)$.

La droite tout entière se divise alors en segments contigus égaux de longueur respective $B-A$, et $\varphi(\xi)$ est antisymétrique par rapport à chacune des extrémités de ces segments. Notamment, $\varphi(A+\xi) + \varphi(A-\xi) = 0$, $\varphi(B+\xi) + \varphi(B-\xi) = 0$. La solution $u(x, t)$ construite d'après la fonction ainsi prolongée $\varphi(\xi)$ à l'aide de l'intégrale de Poisson est, pour $t > 0$, une fonction continue s'annulant pour $x = A$ et $x = B$

$$u(A, t) = 0, \quad u(B, t) = 0.$$

Si la fonction initiale $\varphi(\xi)$ s'annule pour $\xi = A$ et $\xi = B$, $u(x, t)$ est continue partout pour $t \geqslant 0$.

On voit que la fonction $u(x, t)$ ainsi construite résout dans le domaine $A \leqslant x \leqslant B$, $t \geqslant 0$ le problème 2 avec les conditions initiales $u(x, 0) = \varphi(x)$ et les conditions aux limites $u(A, t) = \psi_A(t) = 0$, $u(B, t) = \psi_B(t) = 0$.

Si $\varphi(A) = \varphi(B) = 0$, les données aux limites et initiales concordent et il existe une solution continue dont l'unicité a été démontrée. La démonstration de l'unicité de la solution lorsque les données initiales ne sont pas accordées a été proposée au § 3 en problème. Nous ne nous occuperons pas de la démonstration de l'existence de la solution du problème 2 pour des fonctions $\psi_A(t)$, $\psi_B(t)$ continues arbitraires. Bornons-nous à indiquer que dans ce cas aussi la solution peut être écrite au moyen d'une formule explicite avec des intégrales.

Exercice 1. Montrer que si $\frac{\varphi(A+\xi)+\varphi(A-\xi)}{2} = b$ on a $u(A, t) = b$.

Exercice 2. Posant $\varphi(\xi) = 2\left[\frac{\xi+1}{2}\right]$ (le signe [ ] se lit «entier de»), démontrer que la solution correspondante de l'équation $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi)\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\, d\xi$$

satisfait aux données initiales $u(x, 0) = 0$ et aux conditions aux limites $u(0, t) = 0$, $u(1, t) = 1$.

Maintenant, comme nous l'avons promis, donnons la déduction heuristique de la formule utilisée — de l'intégrale de Poisson.

Dans cette déduction, étant donné que nous nous servirons de considérations physiques, il sera commode d'envisager une équation avec des coefficients C (chaleur spécifique) et K (conductivité thermique) différents de l'unité, ces coefficients étant supposés

constants :

$$\frac{\partial Cu}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial u}{\partial x}\right).$$

Pour des $u(x, t)$ suffisamment régulières, cette égalité équivaut à l'observation, sur tout contour fermé régulier par morceaux, de l'identité intégrale

$$\oint Cu\,dx + K\frac{\partial u}{\partial x}\,dt = 0$$

qui exprime la loi de conservation de la quantité de chaleur. Si l'on se rappelle la déduction, donnée au § 3, de l'équation de la chaleur, on remarque facilement qu'elle consistait précisément à établir la loi de conservation de la chaleur pour un parallélépipède élémentaire. A un certain moment, il sera commode d'utiliser l'identité intégrale écrite.

Soit à présent $u(x, t)$ une certaine solution de l'équation de la chaleur. Choisissant les constantes $\alpha > 0$, $\lambda > 0$, faisons le changement de variables

$$x = \alpha z \quad (z = x/\alpha), \qquad t = \lambda s \quad (s = t/\lambda),$$

en posant

$$u(x, t) = u(\alpha z, \lambda s) = v(z, s).$$

Voyons quelle est l'équation vérifiée par $v(z, s)$. A cet effet, calculons les dérivées

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z} = \alpha\frac{\partial u}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \alpha^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial v}{\partial s} = \lambda\frac{\partial u}{\partial t}.$$

A l'aide de ces égalités, il résulte de l'équation

$$\frac{\partial Cu}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

que

$$\frac{\partial Cv}{\partial s} = \frac{\lambda}{\alpha^2}\frac{\partial}{\partial z}\left(K\frac{\partial v}{\partial z}\right).$$

Supposant que les paramètres λ et α sont liés par l'égalité $\lambda = \alpha^2$, on voit que si $u(x, t)$ est solution de notre équation, il en est de même de $u(\alpha x, \lambda t)$. De la linéarité de l'équation on peut déduire que la fonction

$$\gamma u(\alpha x, \lambda t) \quad (\lambda = \alpha^2)$$

est elle aussi solution quel que soit γ constant.

Nous n'envisagerons que des solutions pour lesquelles pour tout $t > 0$ l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Cu(x, t)\, dx = Q(t)$$

converge ; $Q(t)$ est la quantité totale de chaleur à l'instant t pour $-\infty < x < +\infty$. Avec la solution $u(x, t)$, nous envisagerons encore la solution $w(x, t) = \gamma u(\sqrt{\lambda}x, \lambda t)$ et calculerons la quantité de chaleur totale pour cette solution à l'instant t

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Cw(x, t)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} C\gamma u(\sqrt{\lambda}x, \lambda t)\, dx =$$

$$= \frac{\gamma}{\sqrt{\lambda}} \int_{-\infty}^{+\infty} Cu(\sqrt{\lambda}x, \lambda t)\, d(\sqrt{\lambda}x) = \frac{\gamma}{\sqrt{\lambda}} \int_{-\infty}^{+\infty} Cu(z, \lambda t)\, dz = \frac{\gamma}{\sqrt{\lambda}} Q(\lambda t).$$

Si l'on pose $\gamma = \sqrt{\lambda}$, on aura

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Cw(x, t)\, dx = Q(\lambda t).$$

Nous aurons à envisager par la suite une solution telle que la quantité de chaleur totale ne varie pas au cours du temps, c'est-à-dire que $Q(t) = Q = \text{const}$. Il résulte de nos raisonnements que si pour la solution $u(x, t)$ la quantité de chaleur totale est égale à Q, pour $w(x, t) = \sqrt{\lambda}u(\sqrt{\lambda}x, \lambda t)$ la quantité totale de chaleur sera la même.

Nous avons construit un groupe de transformations à un paramètre (de paramètre λ) conservant l'ensemble des solutions de l'équation de la chaleur avec la même quantité constante de chaleur Q. Il est intéressant de se représenter comment se transforment les données initiales de telles solutions. Soit $u(x, 0) = \varphi(x)$. Alors $w(x, 0) = \sqrt{\lambda}\varphi(\sqrt{\lambda}x)$. Sur la fig. 7 sont représentées les fonctions $u(x, 0)$, $w(x, 0)$ pour le cas où $\lambda > 1$. Pour déduire $w(x, 0)$ de $u(x, 0)$, il faut contracter le graphique dans le rapport de $\sqrt{\lambda}$ suivant les x et le dilater dans le rapport de $\sqrt{\lambda}$ suivant φ.

Sur ce, nous terminons le travail préparatoire et nous passons à la déduction proprement dite. Considérons le domaine $-\infty < x < +\infty$, $t \geqslant 0$, et efforçons-nous de trouver dans ce domaine la solution de l'équation

$$\frac{\partial Cu}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(K \frac{\partial u}{\partial x}\right),$$

correspondant pour $t = 0$ à certaines données initiales particulières. On ne saurait se représenter ces données initiales comme étant prises

sous forme de fonction ordinaire $u(x, 0) = \varphi(x)$. Pour les décrire on doit mettre en œuvre la notion de « fonction généralisée » (terminologie de Guelfand et Chilov) ou « distribution » (terminologie de Laurent Schwartz). Nous ne nous arrêterons pas sur cette notion, nous bornant à une description non rigoureuse mais imagée.

Imaginons qu'à l'instant $t = 0$ dans le plan $x = 0$ (de l'espace x, y, z) se soit dégagée une certaine quantité de chaleur. A savoir,

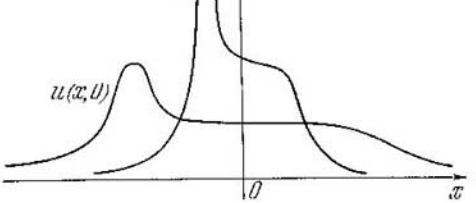

Fig. 7

supposons que Q calories se soient dégagées sur l'unité d'aire de ce plan. Il résulte clairement de considérations physiques que la solution correspondant à un tel dégagement initial instantané de chaleur est à n'importe quel instant t la distribution de ces Q calories:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Cu(x, t)\, dx = Q.$$

Pour $t = 0$ toute la chaleur est concentrée en $x = 0$, c'est-à-dire que $\lim_{t \to 0} u(x, t) = 0$ si $x \neq 0$. Il est clair que $\max_x u(x, t)$ doit tendre vers ∞ lorsque $t \to 0$, et pour les t petits ce maximum doit forcément être atteint quelque part dans le voisinage de $x = 0$.

Supposons qu'on ait pu trouver une certaine solution $u(x, t)$ du problème ainsi posé. Choisissons un certain paramètre $\lambda > 0$ et considérons encore la solution $w(x, t) = \sqrt{\lambda} u(\sqrt{\lambda} x, \lambda t)$. On sait que, pour tout $t > 0$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Cw(x, t)\, dx = Q.$$

En outre, il est clair que pour $x \neq 0$

$$\lim_{t \to 0} w(x, t) = \sqrt{\lambda} \lim_{t \to 0} u(\sqrt{\lambda} x, \lambda t) = 0.$$

La solution $w(x, t)$ vérifie de la sorte toutes les conditions imposées à $u(x, t)$. Par conséquent, ou bien on peut construire pour notre problème de dégagement instantané de chaleur une infinité de solutions $w(x, t) = \sqrt{\lambda} u(\sqrt{\lambda} x, \lambda t)$, ou bien toutes ces solutions coïncident.

Adoptons l'hypothèse de l'unicité de la solution du problème posé. Il résulte de cette hypothèse l'égalité $w(x, t) = u(x, t)$, et donc la relation fonctionnelle suivante que doit vérifier la solution

$$u(x, t) = \sqrt{\lambda} u(\sqrt{\lambda} x, \lambda t).$$

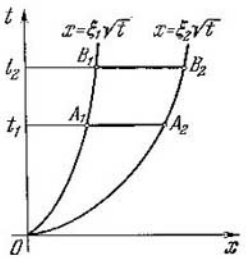

Fig. 8

Fixons un certain point (x, t) et prenons $\lambda = 1/t$. Il vient

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{t}} u\left(\frac{x}{\sqrt{t}}, 1\right) = \frac{1}{\sqrt{t}} g\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right).$$

Pour trouver la fonction $g(\xi)$, il suffit de substituer cette expression dans l'équation de la chaleur. On obtient alors pour $g(\xi)$ une équation différentielle du second ordre. Nous emprunterons une voie différente, utilisant l'astuce de L. Sédov, et nous obtiendrons pour $g(\xi)$ une équation du premier ordre seulement. Cette astuce a été proposée par L. Sédov non pas pour l'équation de la chaleur, mais pour résoudre un problème de dynamique des gaz.

Il résulte de l'égalité $u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{t}} g\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$ que l'intégrale

$$\int_{\xi_1\sqrt{t}}^{\xi_2\sqrt{t}} Cu(x, t)\, dx = C \int_{\xi_1}^{\xi_2} g(\xi)\, d\xi$$

ne dépend pas de t. En d'autres termes, la quantité de chaleur contenue entre deux paraboles quelconques $x = \xi_1\sqrt{t}$, $x = \xi_2\sqrt{t}$ (fig. 8) ne dépend pas du temps. La loi de conservation de l'énergie (de la chaleur) s'écrit

$$\oint Cu\, dx + K \frac{\partial u}{\partial x}\, dt = 0.$$

(L'intégrale est prise sur un contour fermé quelconque.) Nous avons déjà noté que cette égalité équivaut à l'équation de la chaleur.

Appliquons cette identité intégrale au contour $A_1A_2B_2B_1A_1$ représenté sur la fig. 8. Comme

$$\int_{A_1}^{A_2} Cu\,dx = \int_{B_1}^{B_2} Cu\,dx,$$

on a

$$\int_{A_1}^{B_1} Cu\,dx + K\frac{\partial u}{\partial x}\,dt = \int_{A_2}^{B_2} Cu\,dx + K\frac{\partial u}{\partial x}\,dt.$$

L'intervalle de temps (t_1, t_2) étant arbitraire, on doit avoir, quel que soit t, l'égalité

$$Cu(x, t)\frac{dx}{dt} + K\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=\xi_1\sqrt{t}} = Cu(x, t)\frac{dx}{dt} + K\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=\xi_2\sqrt{t}}.$$

Exprimant à présent $u(x, t)$ au moyen de $g(x/\sqrt{t})$, on doit avoir la relation

$$\left[\frac{C}{\sqrt{t}}\,g\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)\xi_1\frac{1}{2\sqrt{t}} + K\frac{1}{\sqrt{t}}\frac{1}{\sqrt{t}}\,g'\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)\right]_{x=\xi_1\sqrt{t}} =$$
$$= \left[\frac{C}{\sqrt{t}}\,g\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)\xi_2\frac{1}{2\sqrt{t}} + K\frac{1}{\sqrt{t}}\frac{1}{\sqrt{t}}\,g'\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)\right]_{x=\xi_2\sqrt{t}}.$$

Par conséquent

$$C\frac{1}{2}\xi_1 g(\xi_1) + Kg'(\xi_1) = C\frac{1}{2}\xi_2 g(\xi_2) + Kg'(\xi_2).$$

Nous avons montré que $C\cdot\frac{1}{2}\xi g(\xi) + Kg'(\xi)$ ne dépend pas de ξ, et donc que

$$C\cdot\frac{1}{2}\xi g(\xi) + Kg'(\xi) = M.$$

(L'expression $\frac{1}{t}\left[\frac{1}{2}C\xi g(\xi) + Kg'(\xi)\right]$ est la vitesse avec laquelle la chaleur traverse à l'instant t la parabole $x = \xi\sqrt{t}$ du fait de la thermoconduction et du fait que dans son déplacement le point de la parabole « embrasse » quand le temps croît de nouveaux secteurs de l'axe des x où la chaleur est distribuée.)

Il est naturel de supposer que pour $t > 0$ et pour $x = 0$ $u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{t}}g\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$ est finie et que $\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{\substack{x=0\\t>0}} = \frac{1}{t}g'(0) = 0$ (ceci simplement par raison de symétrie). En d'autres termes, $g(0)$ est fini, $g'(0) = 0$. Il est clair qu'on doit alors avoir $M = 0$. De sorte qu'on a obtenu pour $g(\xi)$ l'équation linéaire

$$Kg'(\xi) + \frac{1}{2}C\xi g(\xi) = 0$$

qui s'intègre aussitôt en séparant les variables :

$$\frac{dg}{g} = -\frac{C}{2K}\,\xi\,d\xi,$$

$$g(\xi) = Ae^{-\frac{C}{4K}\xi^2}.$$

On obtient pour $u(x, t)$ la formule

$$u(x, t) = \frac{A}{\sqrt{t}}\,e^{-\frac{C}{4K}\frac{x^2}{t}}.$$

Nous déterminerons la constante A de la condition que la quantité de chaleur totale est donnée :

$$\frac{Q}{C} = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t)\,dx = A\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{C}{4K}\frac{x^2}{t}}\,d\frac{x}{\sqrt{t}} =$$

$$= \frac{A\cdot 2\sqrt{K}}{\sqrt{C}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2}\,d\eta = \frac{A\cdot 2\sqrt{K}}{\sqrt{C}}\sqrt{\pi}.$$

D'où $A = Q/(2\sqrt{KC\pi})$, et donc

$$u(x, t) = \frac{Q}{2\sqrt{KC\pi t}}\,e^{-\frac{Cx^2}{4Kt}}.$$

On peut se convaincre en dérivant que la fonction $u(x, t)$ donnée par cette formule vérifie l'équation de la chaleur, et son étude qualitative montre que pour $t \to 0$ $u(x, t) \to 0$ pour tout $x \neq 0$ fixé. Par ailleurs, $\int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t)\,dx$ ne dépend pas de t et est égale à $\frac{Q}{C}$. Ainsi donc, on peut considérer que la solution construite satisfait aux conditions posées.

Il est clair que la somme de solutions

$$\sum_i \frac{Q_i}{2\sqrt{KC\pi t}}\,e^{-\frac{C(x-x_i)^2}{4Kt}}$$

est aussi une solution, laquelle correspond au dégagement, à l'instant $t = 0$, d'énergies Q_i aux points $x = x_i$.

Si à l'instant $t = 0$ nous est donnée la distribution initiale de la température $u(x, 0) = \varphi(x)$, on peut l'approcher par un dégagement d'énergies $C\varphi(x_i)\,\Delta x_i$ aux points x_i (Δx_i est l'intervalle d'une division suffisamment dense de l'axe des x, contenant le point x_i). La solution correspondante sera approchée par la somme

$$u(x, t) \approx C\sum_i \frac{\varphi(x_i)\,\Delta x_i}{2\sqrt{KC\pi t}}\,e^{-\frac{C(x-x_i)^2}{4Kt}}.$$

Si, à présent, on passe formellement à la limite pour $\Delta x_i \to 0$, on obtient la formule intégrale

$$u(x, t) = C \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(\xi)}{2\sqrt{KC\pi t}} e^{-\frac{C(x-\xi)^2}{4Kt}} d\xi,$$

dont on a prouvé plus haut la légitimité, à cela près que, pour la simplicité, on y avait posé $K = C = 1$.

Pour conclure, considérons une classe intéressante de solutions de l'équation de la chaleur. Ce sont des solutions du type onde progressive de forme stationnaire se propageant à une vitesse constante : $u = f(x - wt)$. Substituant cette formule dans l'équation

$$C\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

on obtient pour $f(\xi)$ une équation différentielle :

$$-Cwf' = (Kf')'.$$

Cette équation linéaire à coefficients constants s'intègre sans difficultés :

$$f(\xi) = A + Be^{-\frac{Cw}{K}\xi},$$

$$u(x, t) = A + Be^{-\frac{Cw}{K}(x-wt)}.$$

Le graphique de cette solution à un instant fixe a la forme représentée sur la fig. 9. La constante A représente la température du milieu

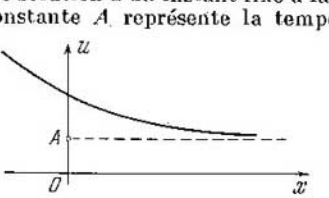

Fig. 9

«à l'infini», c'est-à-dire là où la chaleur n'est pas encore arrivée. Par de telles solutions est décrit, par exemple, l'échauffement d'une substance où avec la vitesse w se propage vers la droite une onde de détonation, où la réaction garde la température constante

$$f(x - wt)|_{x-wt=0} = u_0$$

($x = wt$ est l'équation du mouvement de l'onde de détonation). Nous désignerons la température à l'infini par u_∞. Ayant déterminé les constantes A, B, on obtient la formule suivante pour la tempé-

rature dans la zone d'échauffement :

$$u(x, t) = u_\infty + (u_0 - u_\infty)\, e^{-\frac{Cw}{K}(x - wt)}.$$

Cette formule montre que l'épaisseur de la zone d'échauffement est d'autant plus petite que la vitesse w est plus grande. Cela s'entend : la chaleur n'a pas le temps de se propager loin de la source de chaleur pendant le laps de temps où elle est rattrapée par la source (onde de détonation).

Il est intéressant de noter que la déduction de solutions de la forme $u = f(x - wt)$ peut être réduite à des quadratures même dans le cas de l'équation de la chaleur non linéaire

$$\frac{\partial E(u)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[K(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right].$$

On obtient alors pour f l'équation différentielle

$$-w\,[E(f)]' = [K(f)\,f']',$$

qu'on peut intégrer une première fois :

$$wE(f) + K(f)\,f' = A = \text{const}.$$

L'équation du premier ordre obtenu s'intègre comme suit :

$$d\xi = \frac{K(f)\,df}{A - wE(f)} \qquad (\xi = x - wt).$$

Examinons à titre d'exemple l'équation de la forme suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(u^m \frac{\partial u}{\partial x}\right), \quad m \geqslant 1. \tag{2}$$

A des équations de cette espèce se ramènent les équations de la filtration d'un fluide dans des milieux poreux ($m = 1$) et les équations de thermoconduction radiante dans les milieux chauffés à la température des étoiles, c'est-à-dire à des températures de l'ordre de plusieurs dizaines de millions de degrés.

Posons la constante A égale à zéro. Il vient

$$d\xi = -\frac{f^m}{wf}\,df,$$

$$f^m = -mw(\xi - \xi_0),$$

$$f(\xi) = \sqrt[m]{-mw\xi} \quad (\text{on a posé } \xi_0 = 0),$$

$$u(x, t) = \sqrt[m]{mw(wt - x)}.$$

Le graphique de cette solution pour un certain t fixé et pour des x tels que $wt - x > 0$ est représenté sur la fig. 10. Ainsi donc, la fonction

$$u_1(x, t) = \begin{cases} \sqrt[m]{mw(wt - x)} & \text{pour } x - wt < 0, \\ 0 & \text{pour } x - wt \geqslant 0 \end{cases}$$

est régulière et vérifie notre équation partout sauf la droite $x = wt$. Sur cette droite $u_1(x, t)$ n'a même pas de dérivées premières (pour $m = 1$ les dérivées à droite et à gauche existent, mais elles sont différentes).

Nous avons déjà dit que pour décrire correctement un processus physique l'important n'est pas tant l'observation de l'équation différentielle de la chaleur que l'observation de la relation $\oint Cu\,dx + K\frac{\partial u}{\partial x}\,dt = 0$ sur tout contour régulier par morceaux. Pour notre équation cette égalité a la forme

$$\oint u\,dx + u^m\frac{\partial u}{\partial x}\,dt = 0. \tag{3}$$

Lors de la déduction de l'équation de la chaleur c'est précisément d'une telle relation qu'on est parti, étant donné qu'elle exprime la loi de conservation de l'énergie. Il n'est pas difficile de vérifier

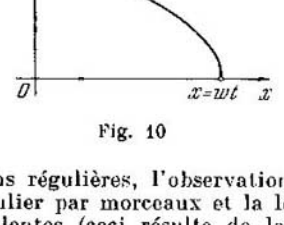

Fig. 10

que, pour les fonctions régulières, l'observation de la relation (3) pour tout contour régulier par morceaux et la légitimité de l'équation (2) sont équivalentes (ceci résulte de la formule de Green appliquée à l'intégrale (3)). Toutefois, pour les fonctions qui présentent des discontinuités quelque part, ou dont les dérivées présentent des discontinuités, il est plus naturel de prendre pour définition de la solution l'égalité (3). De telles fonctions sont appelées *solutions généralisées* de l'équation (2) ; nous nous arrêterons plus en détail sur cette importante notion et sur sa position mathématique rigoureuse plus tard sur l'exemple des équations hyperboliques.

En attendant, nous vérifierons l'observation de l'égalité (3) pour la fonction $u_1(x, t)$. Nous nous bornerons au contour $P_1P_2P_3P_4$ représenté sur la fig. 11. La vérification de l'égalité sur tout autre contour régulier par morceaux se fait de la même manière avec quelques complications techniques mineures.

Nous remplacerons l'intégrale sur le contour $P_1P_2P_3P_4P_1$ par la somme de trois intégrales : sur le contour $P_1ABP_4P_1$, sur le contour $ACDBA$ et sur le contour CP_2P_3DC. L'intégrale sur le premier contour est, d'après la formule intégrale de Green, égale à l'inté-

grale double

$$\iint_{P_1ABP_4} \left[-\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(u_1^m \frac{\partial u_1}{\partial x}\right)\right] dx\,dt.$$

L'intégrale est prise dans le parallélogramme P_1ABP_4 et elle est nulle, étant donné que $u_1(x, t)$ vérifie l'équation (3). On vérifie

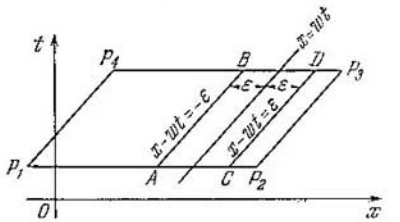

Fig. 11

de même la nullité de l'intégrale sur le troisième contour (dans notre cas concret, ceci est encore plus simple : $u_1(x, t) \equiv 0$ pour $x > wt$).

On ne saurait appliquer la formule de Green à l'intégrale sur le contour $ACDBA$, étant donné qu'à l'intérieur de ce contour sur la droite $x = wt$ les dérivées de la solution sont discontinues. Calculons cette intégrale directement, plus exactement, évaluons-la pour $\varepsilon \to 0$:

$$\int_{CD} u_1\,dx + u_1^m \frac{\partial u_1}{\partial x}\,dt = 0,$$

étant donné que $u_1 \equiv 0$ au voisinage de CD ;

$$\left| \int_{AC} u_1\,dx + u_1^m \frac{\partial u_1}{\partial x}\,dt + \int_{DB} u_1\,dx + u_1^m \frac{\partial u_1}{\partial x}\,dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int_{AC} u_1\,dx \right| + \left| \int_{DB} u_1\,dx \right| \leqslant 2\,(mw)^{\frac{1}{m}} \varepsilon^{\frac{1}{m}} \varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0,$$

et enfin

$$\left| \int_B^A u_1\,dx + u_1^m \frac{\partial u_1}{\partial x}\,dt \right| \leqslant \int_{t_1}^{t_2} \left| u_1 \frac{dx}{dt} \right|_{x=wt-\varepsilon} dt + \int_{t_1}^{t_2} \left| u_1^m \frac{\partial u_1}{\partial x} \right|_{x=wt-\varepsilon} dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} (mw\varepsilon)^{\frac{1}{m}}\, w\,dt + \int_{t_1}^{t_2} mw\varepsilon\,(mw)^{\frac{1}{m}} \frac{1}{m}\, \varepsilon^{\frac{1}{m}-1}\,dt =$$

$$= 2m^{\frac{1}{m}} w^{\frac{1}{m}+1} (t_2 - t_1)\, \varepsilon^{\frac{1}{m}} \to 0 \quad \text{pour} \quad \varepsilon \to 0.$$

Ainsi, l'intégrale sur le contour $ACDBA$, et donc l'intégrale qui lui est égale sur le contour $P_1P_2P_3P_4P_1$, tend vers zéro lorsque $\varepsilon \to 0$. Etant donné que la dernière intégrale ne dépend pas de ε, l'égalité (3) est démontrée.

Pour montrer les écueils qui se peuvent rencontrer en présence de solutions non régulières, envisageons la fonction

$$u_2(x, t) = \begin{cases} x^{\frac{1}{m+1}} & \text{pour } x > 0, \\ 0 & \text{pour } x \leqslant 0, \end{cases}$$

d'aspect très semblable à la fonction envisagée $u_1(x, t)$. Il est facile de voir qu'elle vérifie également l'équation (2) partout sauf l'axe des $x = 0$. Néanmoins, la fonction u_2 n'est plus une solution généralisée de cette équation — elle ne vérifie pas la relation (3). Pour s'en assurer, prenons le contour $ABCDA$ représenté en fig. 12.

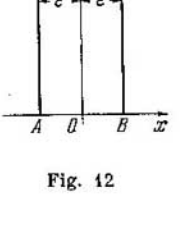

Fig. 12

L'intégrale sur AD est nulle. Il est facile de voir que les intégrales sur AB et CD tendent vers zéro lorsque $\varepsilon \to 0$, mais

$$\int_B^C u_2\,dx + u_2^m \frac{\partial u_2}{\partial x}\,dt = \int_{t_1}^{t_2} u_2^m \frac{\partial u_2}{\partial x}\,dt =$$

$$= (t_2 - t_1)\ \varepsilon^{\frac{m}{m+1}} \frac{1}{m+1} \varepsilon^{\frac{1}{m+1}-1} = \frac{t_2 - t_1}{m+1} \not\to 0 \quad \text{pour} \quad \varepsilon \to 0.$$

Physiquement, la solution envisagée $u_2(x, t)$ décrit la distribution des températures lorsqu'on a au point $x = 0$ une source négative de chaleur de débit constant.

Sur ce, nous terminons notre aperçu des faits fondamentaux liés à l'équation de la chaleur.

§ 5. Equations hyperboliques

Exemples simples d'équations aux dérivées partielles hyperboliques: $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$, équations pour les ondes sonores et électromagnétiques. Problème de Cauchy pour ces équations et sa résolution à l'aide des caractéristiques. Equation hyperbolique du second ordre. Formule de d'Alembert. Intégrale d'énergie pour les ondes sonores. Démonstration de l'unicité de la solution en utilisant l'intégrale d'énergie. Intégrale d'énergie pour les équations de Maxwell unidimensionnelles. Schéma de la déduction des équations de Maxwell.

Dans les paragraphes précédents nous avons pris contact avec quelques exemples types de problèmes, que la physique mathématique pose en termes d'équations aux dérivées partielles. Nous continuons ici à envisager des exemples de ce genre.

Arrêtons-nous d'abord sur l'équation aux dérivées partielles la plus simple, à savoir

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Pour obtenir la formule de sa solution générale, faisons la construction suivante connue dans le cours d'équations différentielles.

Menons dans le plan (x, t) des droites le long desquelles $\frac{dx}{dt} = 1$ (fig. 13). L'équation de chacune d'entre elles peut s'écrire sous la forme $x - t = \text{const}$, la constante ayant une valeur particulière

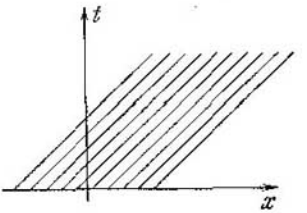

Fig. 13

pour chacune de ces droites. Les valeurs de ces constantes énumèrent en quelque sorte ces droites. Nous dirons que la constante c dans l'équation $x - t = c$ est le « numéro » de la droite de notre famille donnée par cette équation.

Considérons une fonction quelconque $u(x, t)$ et calculons sa dérivée $\frac{du}{dt}$ le long de notre droite. La fonction $u(x, t)$ sera évidemment supposée dérivable. Au lieu du terme « dérivable », nous emploierons le terme « régulière ». Plus exactement, le terme « régulière » signifie que la fonction considérée a autant de dérivées, et même de dérivées continues, qu'il en faut pour la légitimité des calculs ou des raisonnements que nous aurons à faire. Nous aurons constamment à nous servir de ce terme par la suite. Ainsi, nous calculerons la dérivée $\frac{du}{dt}$ le long d'une droite $\frac{dx}{dt} = 1$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}.$$

La formule de cette dérivée montre que l'équation $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ signifie la constance de $u(x, t)$ le long de chacune des droites $\frac{dx}{dt} = 1$. Bien entendu, cette constante peut être différente sur différentes droites. De sorte que la valeur de $u(x, t)$ au point (x, t) ne dépend que du « numéro » de la droite sur laquelle se trouve le point, c'est-à-

dire que $u(x, t) = f(x - t)$. (La valeur $x - t$ est le « numéro » de la droite.) Il est clair que pour que la fonction $u(x, t)$ ait des dérivées $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$ il faut que la fonction $f(\xi)$ soit dérivable. Alors

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -f'(x-t),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f'(x-t).$$

Il en résulte que toute fonction régulière f donne une solution de l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Nous dirons que *la formule* $u = f(x - t)$ *donne la solution générale de cette équation.*

Nous pouvons à présent en venir à l'examen des problèmes qu'il est raisonnable de poser pour cette équation. Nous entendons par

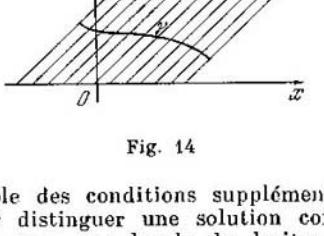

Fig. 14

problème l'ensemble des conditions supplémentaires qui doivent être données pour distinguer une solution concrète quelconque. Considérons de nouveau une bande de droites $x - t = \text{const}$ du plan (x, t). Sur la fig. 14 nous avons dessiné en outre une courbe γ coupant en un seul point chacune des droites $x - t = \text{const}$. Supposons γ donnée sous forme paramétrique $x = \xi(s)$, $t = \tau(s)$ et soit donnée le long de cette courbe une fonction $\varphi = \varphi(s)$.

Il est clair qu'on peut définir sur les droites de notre bande la fonction $u = u(x, t)$ vérifiant l'équation $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ de telle sorte qu'aux points de γ elle prenne les valeurs données $\varphi = \varphi(s)$: $u|_\gamma = \varphi$. En effet, la solution doit avoir la forme

$$u = f(x - t).$$

La forme de la fonction f peut être déterminée comme suit. Trouvons pour chaque valeur de $x - t$ la quantité s à partir de l'équation $x - t = \xi(s) - \tau(s)$. Cet s correspond au point d'intersection de

la droite $x - t = \text{const}$ avec γ, et, par hypothèse, il est unique. Après quoi on pose $f(x - t) = \varphi(s)$. On peut montrer que si $\xi(s)$, $\tau(s)$, $\varphi(s)$ sont des fonctions régulières ($\xi'(s) - \tau'(s) \neq 0$), la fonction $f(x - t)$ que nous avons construite est aussi régulière, et elle donne par conséquent la solution de l'équation étudiée.

Exercice. Il résulte de l'inégalité $\xi'(s) - \tau'(s) \neq 0$ que chacune des droites $x - t = \text{const}$ coupe la courbe en un point au plus. Faites la démonstration.

Nous ne ferons pas maintenant la démonstration rigoureuse du théorème d'existence. Nous démontrerons ce théorème par la suite par un procédé tout autre, moins intuitif il est vrai, mais qui admet des généralisations aux conséquences très importantes.

Les considérations intuitives apportées ici sont nécessaires pour aborder au plus vite et simplement l'énoncé préalable des faits fondamentaux de la théorie d'une classe importante d'équations de la physique mathématique. Revenons à notre problème. On peut prendre pour courbe γ un segment de l'axe des x ou de l'axe des t, ainsi qu'il est indiqué sur les fig. 15 et 16. On peut même prendre (fig. 17) pour courbe γ des segments contigus des axes des x et des t. Il est vrai qu'il faudra alors veiller à ce que les éléments de la fonction $\varphi(s)$, donnés sur les segments AO et OB, définissent la fonction $f(x - t)$, dérivable sur la droite $x = t$ passant par le point O.

Question. Pour qu'il en soit ainsi, quelles doivent être les conditions vérifiées par les éléments de $\varphi(s)$ sur les segments AO et OB?

Mais on ne saurait utiliser pour la position du problème des segments des axes des x et des t comme ceux de la fig. 18, puisqu'on a ici des droites $x - t = \text{const}$ qui rencontrent le segment AO ainsi que le segment OB. Le long de chacune des droites $x - t = \text{const}$ la valeur de $u(x, t)$ est constante, si bien qu'on ne saurait donner arbitrairement les valeurs de φ sur OA. Elles sont univoquement déterminées une fois φ donnée sur BO.

Arrêtons-nous à présent sur la question de l'unicité de la solution. Supposons qu'on se donne les valeurs de $\varphi(s)$ sur le segment AB de l'axe des x. La solution est déterminée, et elle l'est univoquement, dans la bande formée par les droites $x - t = \text{const}$ coupant le segment AB. Si l'on prolonge régulièrement $\varphi(s)$ sur un segment plus grand ab (fig. 19), on peut alors construire la solution dans une bande plus large, dont on a indiqué les frontières en pointillé. Le prolongement de $\varphi(s)$ pouvant se faire d'un grand nombre de manières, la solution dans la bande élargie n'est pas univoquement déterminée par la donnée de $\varphi(s)$ sur AB.

La bande formée par les droites $x - t = \text{const}$ coupant le segment AB est le domaine d'unicité.

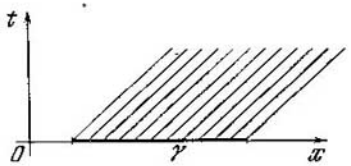

Fig. 15

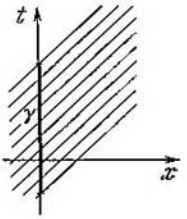

Fig. 16

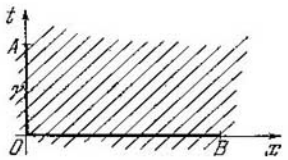

Fig. 17

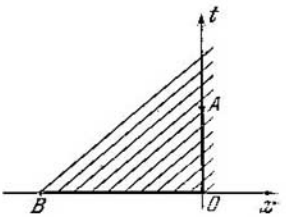

Fig. 18

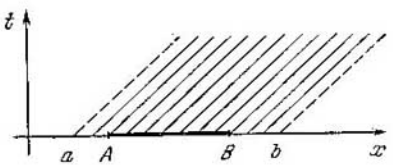

Fig. 19

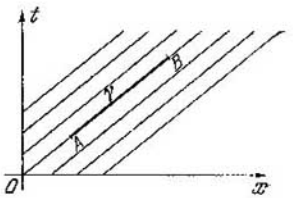

Fig. 20

Envisageons encore le cas où γ est un segment AB de l'une des droites $x - t = \text{const}$, par exemple de la droite $x - t = 0$ (fig. 20). Alors, il est clair qu'on ne saurait donner $\varphi(s)$ arbitrairement, puisque $u|_\gamma = \varphi(s)$, et que, par ailleurs, le long du segment γ la dérivée $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$, ce qui entraîne que la fonction $\varphi(s)$ doit être choisie constante. Autrement, le problème

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ u|_\gamma = \varphi(s) \end{cases}$$

n'aura pas de solution. Mais si l'on a pris $\varphi(s) = \varphi_0 = \text{const}$, le problème a la solution $u = f(x - t)$, la fonction $f(\xi)$ n'étant soumise qu'à la condition $f(0) = \varphi_0$, et étant arbitraire à cela près. Le domaine d'unicité dans ce cas se réduit en quelque sorte à la droite $x - t = 0$.

On voit que le choix des courbes γ sur lesquelles il est raisonnable de donner les conditions complémentaires ne saurait être arbitraire. On doit tenir compte de la disposition de γ par rapport aux droites $x - t = \text{const}$. Ces droites sont appelées *caractéristiques* de l'équation $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$. Nous ne donnons pas ici à l'importante notion de caractéristique une définition générale quelconque, chose qui sera faite au paragraphe suivant. La description qualitative donnée nous suffira maintenant.

Par la suite, nous prendrons, en règle générale, pour courbe γ un segment de l'axe des x et nous chercherons la solution de l'équation $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ dans la bande caractéristique qui s'appuie sur ce segment exclusivement pour les $t \geqslant 0$. Il est alors naturel d'appeler la condition supplémentaire $u|_\gamma = \varphi(s)$ *condition initiale* ou *données initiales*.

Il est clair que tout ce qui a été dit pour l'équation $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ peut être répété presque mot à mot pour l'équation $\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0$. Sa solution générale s'écrit sous la forme $u = f(x - at)$, ce qui montre que le rôle des droites $x - t = \text{const}$ est tenu ici par les droites $x - at = \text{const}$, que nous appellerons caractéristiques de l'équation $\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0$.

Examinons à présent l'exemple plus compliqué qu'est le système

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} + a_1 \dfrac{\partial u_1}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t} + a_2 \dfrac{\partial u_2}{\partial x} = 0, \end{cases}$$

constitué par deux équations indépendantes. La solution de la première des équations du système s'écrit $u_1 = f(x - a_1 t)$. Celle de la seconde est $u_2 = g(x - a_2 t)$. Prenons pour notre système les données initiales sur le segment AB de l'axe des x (c'est-à-dire pour $t = 0$). Comme auparavant, nous désignerons le segment AB par γ:

$$u_1|_\gamma = \varphi(x),$$
$$u_2|_\gamma = \psi(x).$$

Nous avons représenté sur la fig. 21 dans le plan (x, t) les demi-bandes $(t \geqslant 0)$ sur lesquelles les valeurs de $u_1(x, t)$ et $u_2(x, t)$ peuvent être déterminées. Pour plus de clarté, nous avons choisi des signes différents pour les coefficients a_1, a_2 ($a_1 > 0$, $a_2 < 0$).

Il est clair qu'on ne saurait parler de la solution du système que dans le triangle ABC, qui est l'intersection (au sens de la théorie

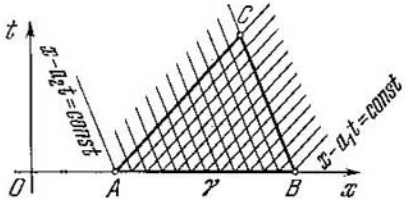

Fig. 21

des ensembles) des deux bandes caractéristiques qui s'appuient sur AB; la solution n'est univoquement déterminée que dans ce triangle.

Il est naturel d'appeler les droites $x - a_1 t = \text{const}$, $x - a_2 t = \text{const}$ *caractéristiques* du système envisagé, et le triangle ABC délimité par ces caractéristiques, *triangle caractéristique*.

L'exemple de système qui vient d'être examiné peut sembler malheureux. Aussi allons-nous montrer comment on peut ramener au cas qui vient d'être étudié le système suivant, de prime abord plus compliqué:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{1}{\rho_0} \dfrac{\partial p}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 c_0^2 \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Ce système décrit la propagation d'ondes sonores planes (de petites perturbations) dans un milieu au repos. Ici u est la vitesse du milieu perturbé, p la pression dans ce milieu. Les constantes ρ_0, c_0 sont liées aux propriétés du milieu au repos: ρ_0 est la densité, c_0 est une constante caractérisant la compressibilité. Les équations (1) s'appellent encore *équations de l'acoustique*. On peut trouver leur

déduction dans les cours de physique ou de mécanique des milieux continus. Nous allons montrer que le système décrivant la propagation des ondes sonores peut être ramené par une transformation élémentaire et en changeant la notation des variables au cas simple déjà envisagé.

A cet effet, multiplions la seconde équation par $1/\rho_0 c_0$. Ajoutons l'égalité obtenue

$$\frac{\partial \frac{p}{\rho_0 c_0}}{\partial t} + c_0 \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

à la première équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} = 0.$$

Il vient finalement

$$\frac{\partial \left(u + \frac{p}{\rho_0 c_0}\right)}{\partial t} + c_0 \frac{\partial \left(u + \frac{p}{\rho_0 c_0}\right)}{\partial x} = 0.$$

Si au lieu d'ajouter les égalités on les retranche l'une de l'autre, on obtient l'équation analogue :

$$\frac{\partial \left(u - \frac{p}{\rho_0 c_0}\right)}{\partial t} - c_0 \frac{\partial \left(u - \frac{p}{\rho_0 c_0}\right)}{\partial x} = 0.$$

Il suffit à présent de poser

$$u + \frac{p}{\rho_0 c_0} = u_1, \quad u - \frac{p}{\rho_0 c_0} = u_2,$$

pour arriver au système du type déjà étudié

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + c_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} - c_0 \frac{\partial u_2}{\partial x} = 0.$$

On sait que la solution générale d'un tel système est

$$u_1 = f(x - c_0 t), \quad u_2 = g(x + c_0 t).$$

Exprimant u_1, u_2 au moyen de u, p, il vient

$$u + \frac{p}{\rho_0 c_0} = f(x - c_0 t), \quad u - \frac{p}{\rho_0 c_0} = g(x + c_0 t)$$

ou finalement :

$$u = \frac{f(x - c_0 t) + g(x + c_0 t)}{2}, \quad p = \rho_0 c_0 \frac{f(x - c_0 t) - g(x + c_0 t)}{2}.$$

Ces formules donnent la représentation de la solution générale des équations de la propagation du son.

Supposons connue la distribution de la pression p et de la vitesse u à l'instant initial $t = 0$ dans un certain intervalle $x_1 < x < x_2$. Nous avons déjà vu que la distribution initiale détermine univoquement la solution dans le triangle caractéristique, qui s'appuie par sa base sur l'intervalle (x_1, x_2). Ce triangle est déterminé par l'inégalité $t > 0$, $x - c_0 t > x_1$, $x_0 + c_0 t < x_2$.

Les quantités $u \pm \frac{p}{\rho_0 c_0}$ sont les *invariants de Riemann* (le mathématicien allemand Riemann les a introduits dans un cas analogue mais plus compliqué). La formule

$$u + \frac{p}{\rho_0 c_0} = f(x - c_0 t)$$

montre que la distribution de cet invariant de Riemann se déplace sans se déformer vers la droite avec la vitesse c_0. Ceci permet d'appeler la quantité c_0 *vitesse de propagation des perturbations des ondes sonores* ou, plus simplement, *vitesse du son.*

De même, la formule

$$u - \frac{p}{\rho_0 c_0} = g(x + c_0 t)$$

montre que la distribution de cet autre invariant de Riemann se déplace sans se déformer à gauche encore avec la vitesse du son c_0.

Prenons les fonctions f, g de telle sorte que la solution donnée par les formules déduites plus haut vérifie les données initiales:

$$u(x, 0) = u|_{t=0} = \varphi(x),$$
$$p(x, 0) = p|_{t=0} = \psi(x)$$

prises sur le segment $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$. Il suffit évidemment de poser:

$$\varphi(x) = \frac{f(x) + g(x)}{2}, \quad \frac{\psi(x)}{\rho_0 c_0} = \frac{f(x) - g(x)}{2},$$

d'où

$$f(z) = \varphi(z) + \frac{\psi(z)}{\rho_0 c_0}, \quad g(z) = \varphi(z) - \frac{\psi(z)}{\rho_0 c_0},$$

$$\begin{cases} u + \dfrac{p}{\rho_0 c_0} = \varphi(x - c_0 t) + \dfrac{\psi(x - c_0 t)}{\rho_0 c_0}, \\ u - \dfrac{p}{\rho_0 c_0} = \varphi(x + c_0 t) - \dfrac{\psi(x + c_0 t)}{\rho_0 c_0}. \end{cases}$$

A présent, il n'est pas difficile d'obtenir les formules

$$u = \frac{\varphi(x - c_0 t) + \varphi(x + c_0 t)}{2} + \frac{\psi(x - c_0 t) - \psi(x + c_0 t)}{2\rho_0 c_0},$$

$$p = \frac{\psi(x - c_0 t) + \psi(x + c_0 t)}{2} + \rho_0 c_0 \frac{\varphi(x - c_0 t) - \varphi(x + c_0 t)}{2},$$

qui donnent la solution du problème de Cauchy pour les équations de l'acoustique. Le problème de Cauchy pour le système (1) est ainsi posé : *trouver la solution du système* (1) *d'après les données initiales* $u|_{t=0} = \varphi(x)$, $p|_{t=0} = \psi(x)$. Les raisonnements faits plus haut permettent de légitimer l'existence et l'unicité de la solution du problème de Cauchy dans le triangle caractéristique.

Souvent, au lieu du système d'équations du premier ordre

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{1}{\rho_0} \dfrac{\partial p}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 c_0^2 \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

on considère l'équation du second ordre pour la pression p

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0,$$

qui s'obtient en dérivant par rapport à x la première équation du système, la seconde par rapport à t, puis en éliminant entre elles la dérivée mixte $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial t}$. Cette équation du second ordre s'appelle *équation des petites vibrations d'une corde*, étant donné que l'équation décrivant les vibrations d'une corde tendue a cette forme. C'est précisément en relation avec l'étude des vibrations des cordes que cette équation est apparue pour la première fois dans les recherches mathématiques.

On peut recopier cette équation sous la forme suivante :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - c_0 \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + c_0 \frac{\partial}{\partial x}\right) p = 0.$$

Désignant par q l'expression $\dfrac{\partial p}{\partial t} + c_0 \dfrac{\partial p}{\partial x}$, on est conduit au système du premier ordre qui équivaut à cette équation :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial t} + c_0 \dfrac{\partial p}{\partial x} = q, \\ \dfrac{\partial q}{\partial t} - c_0 \dfrac{\partial q}{\partial x} = 0. \end{cases}$$

La seconde des équations du système a pour solution générale

$$q = G(x + c_0 t) = 2c_0 g'(x + c_0 t).$$

(Par la suite nous sera commode la seconde notation d'une fonction arbitraire régulière G d'après la dérivée d'une certaine autre fonction g.) L'équation pour p

$$\frac{\partial p}{\partial t} + c_0 \frac{\partial p}{\partial x} = 2c_0 g'(x + c_0 t)$$

peut être recopiée maintenant comme suit :

$$\frac{\partial [p - g(x + c_0 t)]}{\partial t} + c_0 \frac{\partial [p - g(x + c_0 t)]}{\partial x} = 0,$$

ce qui permet d'écrire sa solution générale

$$p - g(x + c_0 t) = f(x - c_0 t),$$
$$p(x, t) = f(x - c_0 t) + g(x + c_0 t).$$

La dernière formule a été vraisemblablement déduite pour la première fois par d'Alembert (1747).

En 1748, Euler a exprimé f, g d'après les valeurs des fonctions $p(x, t)$, $p_t(x, t)$ pour $t = 0$:

$$p(x, 0) = \varphi(x), \quad p_t(x, 0) = \psi(x). \tag{2}$$

Ceci l'a conduit à la formule

$$p(x, t) = \frac{\varphi(x + c_0 t) + \varphi(x - c_0 t)}{2} + \frac{1}{2c_0} \int_{x - c_0 t}^{x + c_0 t} \psi(\xi)\, d\xi.$$

qu'on appelle aussi souvent *formule de d'Alembert*, bien que celui-ci la considérât comme illégitime. Mais la dénomination est restée et nous la conserverons.

Cette formule donne la solution du problème de Cauchy pour l'équation $\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0$. *Pour cette équation du second ordre le problème de Cauchy se pose ainsi : trouver la solution vérifiant les données initiales* (2). Pour trouver la formule de la solution du problème de Cauchy, on doit déterminer les fonctions f, g dans la représentation de la solution générale

$$p(x, t) = f(x - c_0 t) + g(x + c_0 t)$$

à partir des conditions

$$f(x) + g(x) = p(x, 0) = \varphi(x),$$
$$-c_0 f'(x) + c_0 g'(x) = p_t(x, 0) = \psi(x).$$

Dérivant la première égalité, on est conduit au système d'équations pour les dérivées f', g', qui se résout ainsi :

$$f'(x) = \frac{1}{2}\varphi'(x) - \frac{1}{2c_0}\psi(x),$$
$$g'(x) = \frac{1}{2}\varphi'(x) + \frac{1}{2c_0}\psi(x).$$

Intégrons ces égalités

$$f(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2c_0}\int_{x_0}^{x} \psi(\xi)\, d\xi + a,$$

$$g(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2c_0}\int_{x_0}^{x} \psi(\xi)\, d\xi + b.$$

Ici x_0 est un point arbitraire du domaine de définition des données initiales, a et b sont des constantes d'intégration. Mais ces constantes ne sont pas indépendantes. De l'égalité $f(x) + g(x) = \varphi(x)$ on déduit que $b = -a$. Ainsi,

$$p(x, t) = f(x - c_0 t) + g(x + c_0 t) =$$

$$= \left[\frac{\varphi(x - c_0 t)}{2} - \frac{1}{2c_0}\int_{x_0}^{x - c_0 t} \psi(\xi)\, d\xi + a\right] +$$

$$+ \left[\frac{\varphi(x + c_0 t)}{2} + \frac{1}{2c_0}\int_{x_0}^{x + c_0 t} \psi(\xi)\, d\xi - a\right] =$$

$$= \frac{\varphi(x + c_0 t) + \varphi(x - c_0 t)}{2} + \frac{1}{2c_0}\int_{x - c_0 t}^{x + c_0 t} \psi(\xi)\, d\xi.$$

La formule de la solution du problème de Cauchy est démontrée.

Nous avons déjà montré que pour le système (1) l'existence et l'unicité de la solution du problème de Cauchy peuvent être établies lors de la déduction des formules explicites de la solution.

Or, pour démontrer le théorème d'unicité, on a recours d'ordinaire à des considérations liées à la loi de conservation de l'énergie. Montrons comment on fait la démonstration qui s'appuie sur ces considérations.

Multiplions la première des équations du système

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{1}{\rho_0}\dfrac{\partial p}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 c_0^2 \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

par $\rho_0 u$, la seconde par $\dfrac{p}{\rho_0 c_0^2}$. Ajoutant les résultats, on est conduit à l'identité

$$\frac{\partial\left[\rho_0\left(\dfrac{u^2}{2} + \dfrac{p^2}{2\rho_0^2 c_0^2}\right)\right]}{\partial t} + \frac{\partial pu}{\partial x} = 0.$$

Il résulte de cette identité que, le long de tout contour régulier par morceaux fermé,

$$\oint -\left(\rho_0 \frac{u^2}{2} + \frac{p^2}{2\rho_0 c_0^2}\right) dx + pu\, dt = 0.$$

Cette égalité intégrale porte le nom de *loi de conservation de l'énergie* pour les solutions régulières des équations de propagation du son.

Pour expliquer d'où vient l'appellation « loi de conservation de l'énergie », nous appliquerons notre identité intégrale au contour

rectangulaire $ABCDA$ de la fig. 22. On obtient l'égalité

$$\int_D^C \left(\rho_0 \frac{u^2}{2} + \frac{p^2}{2\rho_0 c_0^2}\right) dx = \int_A^B \left(\rho_0 \frac{u^2}{2} + \frac{p^2}{2\rho_0 c_0^2}\right) dx + \int_A^D pu\,dt - \int_B^C pu\,dt.$$

Dans cette égalité $\int_A^B \rho_0 \frac{u^2}{2} dx$ représente l'énergie cinétique du gaz contenu dans $x_1 < x < x_2$ à l'instant initial t_0 ; $\int_A^B \frac{p^2}{2\rho_0 c_0^2} dx$ est l'énergie potentielle de compression de ce gaz. L'intégrale $\int_C^D \left(\rho_0 \frac{u^2}{2} + \frac{p^2}{2\rho_0 c_0^2}\right) dx$ est l'énergie totale à l'instant t_1. La différence $\int_A^D pu\,dt - \int_B^C pu\,dt$ est le travail effectué sur le gaz dans le temps (t_0, t_1).

Après ces explications, on comprend pourquoi notre identité intégrale est appelée loi de conservation de l'énergie (ou intégrale

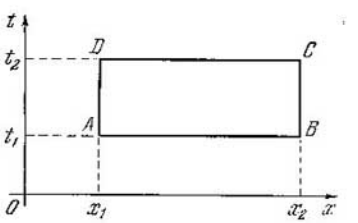

Fig. 22

d'énergie). Montrons à présent comment la loi de conservation de l'énergie peut servir à démontrer le théorème d'unicité.

Nous prendrons les données initiales $u|_{t=0} = \varphi(x)$, $p|_{t=0} = \psi(x)$ sur le segment AB $(x_1 \leqslant x \leqslant x_2)$ de l'axe des x pour $t = 0$. Nous démontrerons l'unicité de la solution (cf. fig. 23) dans le triangle caractéristique ABC limité à gauche et à droite par les caractéristiques AC $(x - c_0 t = x_1)$ et BC $(x + c_0 t = x_2)$. Coupons ce triangle par le segment PQ de la droite $t = t_1$, puis appliquons au contour $ABQP$ la forme intégrale de la loi de conservation de l'éner-

gie :

$$\int_P^Q \left(\rho_0 \frac{u^2}{2} + \frac{p^2}{2\rho_0 c_0^2}\right) dx = \int_A^B \left(\rho_0 \frac{u^2}{2} + \frac{p^2}{2\rho_0 c_0^2}\right) dx -$$

$$- \int_A^P \left[\left(p_0 \frac{u^2}{2} + \frac{p^2}{2\rho_0 c_0^2}\right) dx - pu\, dt\right] +$$

$$+ \int_B^Q \left[\left(\rho_0 \frac{u^2}{2} + \frac{p^2}{2\rho_0 c_0^2}\right) dx - pu\, dt\right].$$

Examinons plus en détail l'intégrale

$$\int_A^P \left[\left(\rho_0 \frac{u^2}{2} + \frac{p^2}{2\rho_0 c_0^2}\right) dx - pu\, dt\right].$$

Cette intégrale étant prise le long d'une caractéristique $x - c_0 t = \text{const}$, on a $dx = c_0 dt$, si bien qu'on peut l'écrire encore comme suit :

$$\int_A^P \left[\left(\rho_0 \frac{u^2}{2} + \frac{p^2}{2\rho_0 c_0^2}\right) c_0\, dt - pu\, dt\right] = \frac{\rho_0 c_0}{2} \int_A^P \left(u - \frac{p}{\rho_0 c_0}\right)^2 dt \geqslant 0.$$

Nous avons démontré que l'intégrale est non négative sur le segment

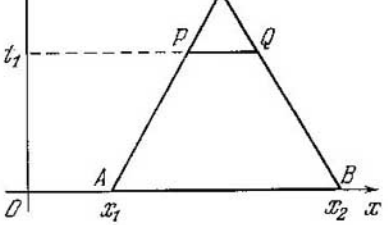

Fig. 23

de caractéristique AP. De même, utilisant le long de BQ l'égalité $dx = -c_0 dt$, on peut se convaincre que

$$\int_B^Q \left[\left(\rho_0 \frac{u^2}{2} + \frac{p^2}{2\rho_0 c_0^2}\right) dx - pu\, dt\right] = -\frac{\rho_0 c_0}{2} \int_B^Q \left(u + \frac{p}{\rho_0 c_0}\right)^2 dt \leqslant 0.$$

Il résulte des inégalités démontrées et de l'identité intégrale de la loi de conservation de l'énergie :

$$\int_P^Q \left(\rho_0 \frac{u^2}{2} + \frac{p^2}{2\rho_0 c_0^2}\right) dx \leqslant \int_A^B \left(\rho_0 \frac{u^2}{2} + \frac{p^2}{2\rho_0 c_0^2}\right) dx.$$

Si pour $t=0$ on a $p=0$, $u=0$, alors

$$\int_P^Q \left(\rho_0 \frac{u^2}{2} + \frac{p^2}{2\rho_0 c_0^2}\right) dx \leqslant 0,$$

si bien que les quantités u, p sont elles aussi nulles sur PQ. Par là, nous avons démontré que des données initiales nulles sur la base du triangle caractéristique entraînent nécessairement $u = 0$, $p = 0$ partout dans le triangle. Dès lors, il est facile de démontrer le théorème d'unicité proprement dit.

Si u_1, p_1, ainsi que u_2, p_2 sont des solutions de notre système linéaire qui vérifient sur le segment AB aux mêmes données initiales, leur différence $u_1 - u_2$, $p_1 - p_2$ est aussi solution de ce même système avec des données initiales nulles. En vertu de ce qu'on a démontré plus haut, $u_1 - u_2 \equiv 0$, $p_1 - p_2 \equiv 0$ partout dans le triangle caractéristique. Le théorème d'unicité est démontré.

Sur ce, nous terminons notre étude préliminaire des équations de la propagation des ondes sonores et nous passons à un autre exemple, en l'occurrence aux équations de Maxwell pour les ondes électromagnétiques planes. Nous apporterons à la fin de ce paragraphe les considérations qui ont conduit à la déduction de ces équations, et en attendant, écrivons ce système :

$$\frac{\mu}{c_0} \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x}, \tag{3}$$

$$\frac{\mu}{c_0} \frac{\partial H_z}{\partial t} = -\frac{\partial E_y}{\partial x}, \tag{4}$$

$$\frac{\varepsilon}{c_0} \frac{\partial E_y}{\partial t} = -\frac{\partial H_z}{\partial x}, \tag{5}$$

$$\frac{\varepsilon}{c_0} \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial H_y}{\partial x}. \tag{6}$$

Ici H_y, H_z sont les composantes du champ magnétique, E_y, E_z celles du champ électrique. Les coefficients constants μ, ε sont la perméabilité magnétique et la constante diélectrique. Les composantes E_x, H_x sont absentes des équations décrivant la propagation des ondes planes progressant le long de l'axe des x. On dit alors que le champ électromagnétique est transversal.

Considérons d'abord la première et la dernière de ces équations. Multiplions (3) par $c_0/\sqrt{\mu}$, (6) par $c_0/\sqrt{\varepsilon}$:

$$\frac{\partial(\sqrt{\mu}H_y)}{\partial t} - \frac{c_0}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\frac{\partial(\sqrt{\varepsilon}E_z)}{\partial x} = 0,$$
$$\frac{\partial(\sqrt{\varepsilon}E_z)}{\partial t} - \frac{c_0}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\frac{\partial(\sqrt{\mu}H_y)}{\partial x} = 0.$$

Ajoutons et retranchons ces équations :

$$\frac{\partial(\sqrt{\mu}H_y+\sqrt{\varepsilon}E_z)}{\partial t} - \frac{c_0}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\frac{\partial(\sqrt{\mu}H_y+\sqrt{\varepsilon}E_z)}{\partial x} = 0,$$
$$\frac{\partial(\sqrt{\mu}H_y-\sqrt{\varepsilon}E_z)}{\partial t} + \frac{c_0}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\frac{\partial(\sqrt{\mu}H_y-\sqrt{\varepsilon}E_z)}{\partial x} = 0.$$

On déduit de même de (4) et (5) :

$$\frac{\partial(\sqrt{\mu}H_z-\sqrt{\varepsilon}E_y)}{\partial t} - \frac{c_0}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\frac{\partial(\sqrt{\mu}H_z-\sqrt{\varepsilon}E_y)}{\partial x} = 0,$$
$$\frac{\partial(\sqrt{\mu}H_z+\sqrt{\varepsilon}E_y)}{\partial t} + \frac{c_0}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\frac{\partial(\sqrt{\mu}H_z+\sqrt{\varepsilon}E_y)}{\partial x} = 0.$$

On voit qu'ici encore en multipliant les équations de Maxwell par des coefficients adéquats, puis en les ajoutant ou les retranchant, nous avons pu décomposer le système en quatre équations du premier ordre indépendantes, dont chacune est de la forme

$$\frac{\partial u}{\partial t} \pm \frac{c_0}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

si bien qu'elle décrit la propagation d'une onde à droite ou à gauche (suivant le signe $\pm$) avec la vitesse $\frac{c_0}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$. Cette vitesse, qui est celle des ondes électromagnétiques, est appelée *vitesse de la lumière* dans le milieu et notée c.

La « forme canonique » obtenue pour les équations de Maxwell permet de dessiner dans le plan (x, t) le triangle caractéristique dans lequel la solution est déterminée de façon unique si l'on connaît le segment de l'axe $t = 0$ sur lequel sont données les valeurs initiales du champ électrique et du champ magnétique. Nous ne nous arrêterons pas là-dessus plus en détail.

Envisageons à présent une onde de champ électromagnétique progressant à droite avec la vitesse $c = \frac{c_0}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$. Sa propagation est décrite par les équations

$$\frac{\partial(\sqrt{\mu}H_y-\sqrt{\varepsilon}E_z)}{\partial t} + c\frac{\partial(\sqrt{\mu}H_y-\sqrt{\varepsilon}E_z)}{\partial x} = 0,$$
$$\frac{\partial(\sqrt{\mu}H_z+\sqrt{\varepsilon}E_y)}{\partial t} + c\frac{\partial(\sqrt{\mu}H_z+\sqrt{\varepsilon}E_y)}{\partial x} = 0.$$

Pour ne pas avoir à envisager les ondes progressant vers la gauche il suffira de poser

$$\sqrt{\mu}\,H_y+\sqrt{\varepsilon}\,E_z=0,\quad \sqrt{\mu}\,H_z-\sqrt{\varepsilon}\,E_y=0.$$

Alors les deux équations canoniques restantes seront identiquement vérifiées.

La solution générale du problème ainsi posé est donnée par les formules :

$$\sqrt{\mu}\,H_y-\sqrt{\varepsilon}\,E_z=f(x-ct),\quad \sqrt{\mu}\,H_y+\sqrt{\varepsilon}\,E_z=0.$$
$$\sqrt{\mu}\,H_z+\sqrt{\varepsilon}\,E_y=g(x-ct),\quad \sqrt{\mu}\,H_z-\sqrt{\varepsilon}\,E_y=0.$$

D'où l'on peut déduire la représentation des quatre composantes du champ

$$H_y=\frac{1}{2\sqrt{\mu}}f(x-ct),\quad E_y=\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}g(x-ct),$$
$$H_z=\frac{1}{2\sqrt{\mu}}g(x-ct),\quad E_z=-\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}f(x-ct).$$

Ces formules montrent que les vecteurs $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{H}$ sont toujours orthogonaux, leur produit scalaire étant nul : $E_yH_y + E_zH_z = 0$. Le rapport des longueurs de ces vecteurs

$$\frac{\sqrt{E_y^2+E_z^2}}{\sqrt{H_y^2+H_z^2}}=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

est constant. Supposons à présent que f et g décrivent une onde périodique harmonique

$$f(\xi) = a\cos\xi,$$
$$g(\xi) = b\sin\xi.$$

Considérons le comportement des vecteurs $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{E}$ en un point fixe de l'espace, par exemple pour $x = 0$

$$H_y=\frac{a}{2\sqrt{\mu}}\cos ct,\quad H_z=\frac{b}{2\sqrt{\mu}}\sin ct,$$
$$E_y=-\frac{b}{2\sqrt{\varepsilon}}\sin ct,\quad E_z=-\frac{a}{2\sqrt{\varepsilon}}\cos ct.$$

Si l'on dessine la position des vecteurs dans le plan en reportant H_y, E_y sur l'axe des y, H_z, E_z sur l'axe des z, il n'est pas difficile de remarquer que les extrémités des vecteurs décrivent des ellipses avec le même rapport des demi-axes $\frac{b}{a}$. Le grand axe de l'ellipse décrite par le vecteur $\boldsymbol{H}$ est dirigé suivant le petit axe de l'ellipse décrite par le vecteur $\boldsymbol{E}$. Cette image justifie l'appellation de « champ électromagnétique elliptiquement polarisé » ou de « lumière ellipti-

quement polarisée ». Si $b = 0$, les ellipses dégénèrent en deux segments perpendiculaires (polarisation linéaire).

Problème. Déduire la loi de conservation de l'énergie

$$\oint \left[\mu \frac{H_y^2 + H_z^2}{2} + \varepsilon \frac{E_y^2 + E_z^2}{2} \right] dx + c_0 (E_z H_y - E_y H_z)\, dt$$

pour les solutions des équations de Maxwell. Formulez et démontrez le théorème d'unicité pour ces équations.

Nous allons décrire maintenant succinctement la façon dont les équations de Maxwell ont été déduites. Nous avons montré au paragraphe premier comment de la loi de Coulomb s'obtient l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -4\pi \frac{\rho}{\varepsilon}$$

pour le potentiel électrostatique u dû à une distribution de charges de densité ρ dans un milieu de constante diélectrique ε. Le champ électrique $\boldsymbol{E}$ (E_x, E_y, E_z) s'exprime d'après le potentiel par les formules

$$E_x = -\frac{\partial u}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial u}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial u}{\partial z},$$

dont il résulte que ses composantes vérifient les équations

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 4\pi \frac{\rho}{\varepsilon},$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0.$$

Nous allons montrer à présent comment la loi de l'interaction de courants électriques conduit aux équations de la magnétostatique.

Imaginons dans l'espace deux conducteurs fermés de résistance nulle, parcourus par deux courants constants d'intensités respectives J_1, J_2. La généralisation de faits expérimentaux concernant l'interaction de conducteurs réels a conduit les physiciens à une loi qui s'énonce le plus simplement dans ce cas abstrait. Cette loi est celle de Biot et Savart.

Soient $d\boldsymbol{s}_1$, $d\boldsymbol{s}_2$ les éléments de ces conducteurs, le vecteur $\boldsymbol{R}_{12}$ étant mené de $d\boldsymbol{s}_1$ vers $d\boldsymbol{s}_2$. Alors, la force avec laquelle le premier conducteur agit sur le second est

$$\boldsymbol{F}_{12} = \frac{J_1 J_2}{c_0^2 |\boldsymbol{R}_{12}|^3} [d\boldsymbol{s}_2 \times (d\boldsymbol{s}_1 \times \boldsymbol{R}_{12})],$$

ici c_0^2 est une certaine constante. Pour obtenir la force d'interaction totale des deux conducteurs, il faut intégrer $\boldsymbol{F}_{12}$ en faisant décrire à $d\boldsymbol{s}_1$ et $d\boldsymbol{s}_2$ les deux conducteurs tout entiers.

Il y a lieu de noter que les forces $\boldsymbol{F}_{12}$ et $\boldsymbol{F}_{21}$ de l'action du premier conducteur sur le second et du second sur le premier n'obéissent

pas à la loi d'égalité de l'action et de la réaction. Supposons, par exemple, $d\boldsymbol{s}_1$ parallèle à $\boldsymbol{R}_{12}$ et $d\boldsymbol{s}_2$ perpendiculaire à $\boldsymbol{R}_{21} = -\boldsymbol{R}_{12}$. Dans ce cas, $d\boldsymbol{s}_1 \times \boldsymbol{R}_{12} = 0$, et donc $\boldsymbol{F}_{12} = 0$, alors que $d\boldsymbol{s}_2 \times \boldsymbol{R}_{21} \neq 0$ et $\boldsymbol{F}_{21} \neq 0$. Mais cette violation de la troisième loi de Newton n'est qu'apparente et elle est liée à la considération de la force d'interaction, artificiellement introduite, entre éléments de conducteurs, et non entre les conducteurs tout entiers fermés. En effet, soient

$$d\boldsymbol{s}_1 = \begin{pmatrix} d\xi_1 \\ d\xi_2 \\ d\xi_3 \end{pmatrix}, \quad d\boldsymbol{s}_2 = \begin{pmatrix} d\eta_1 \\ d\eta_2 \\ d\eta_3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{R}_{12} = \begin{pmatrix} \eta_1 - \xi_1 \\ \eta_2 - \xi_2 \\ \eta_3 - \xi_3 \end{pmatrix}.$$

Un calcul direct montre que

$$\frac{1}{|\boldsymbol{R}_{12}|^3} d\boldsymbol{s}_2 \times (d\boldsymbol{s}_1 \times \boldsymbol{R}_{12}) =$$

$$= -\frac{d\xi_1\, d\eta_1 + d\xi_2\, d\eta_2 + d\xi_3\, d\eta_3}{[(\eta_1-\xi_1)^2+(\eta_2-\xi_2)^2+(\eta_3-\xi_3)^2]^{3/2}} \begin{pmatrix} \eta_1 - \xi_1 \\ \eta_2 - \xi_2 \\ \eta_3 - \xi_3 \end{pmatrix} +$$

$$+ \frac{(\eta_1-\xi_1)\, d\eta_1 + (\eta_2-\xi_2)\, d\eta_2 + (\eta_3-\xi_3)\, d\eta_3}{[(\eta_1-\xi_1)^2+(\eta_2-\xi_2)^2+(\eta_3-\xi_3)^2]^{3/2}} \begin{pmatrix} d\xi_1 \\ d\xi_2 \\ d\xi_3 \end{pmatrix}.$$

Le premier terme du second membre de cette égalité change de signe lorsqu'on remplace le premier élément de courant par le second, c'est-à-dire qu'il obéit à la troisième loi de Newton. Fixant dans le second terme ξ_1, ξ_2, ξ_3, $d\xi_1$, $d\xi_2$, $d\xi_3$, on l'intègre sur $d\boldsymbol{s}_2 = \begin{pmatrix} d\eta_1 \\ d\eta_2 \\ d\eta_3 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire sur le contour total du second conducteur. Il vient

$$\oint \frac{(\eta_1-\xi_1)\, d\eta_1 + (\eta_2-\xi_2)\, d\eta_2 + (\eta_3-\xi_3)\, d\eta_3}{[(\eta_1-\xi_1)^2+(\eta_2-\xi_2)^2+(\eta_3-\xi_3)^2]^{3/2}} \begin{pmatrix} d\xi_1 \\ d\xi_2 \\ d\xi_3 \end{pmatrix} =$$

$$= -\left\{ \oint d \frac{1}{\sqrt{(\eta_1-\xi_1)^2+(\eta_2-\xi_2)^2+(\eta_3-\xi_3)^2}} \right\} \begin{pmatrix} d\xi_1 \\ d\xi_2 \\ d\xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Cette égalité montre précisément que la violation de la troisième loi de Newton est apparente. Il est intéressant de noter que la loi de Biot et Savart n'est pas le premier énoncé chronologique de la loi d'interaction de courants. Cette loi a été énoncée pour la première fois par Ampère sous une autre forme, qui ne contredisait pas la loi de Newton. Néanmoins, la forme de Biot et Savart de la

loi d'interaction s'est révélée plus commode et c'est elle qui a survécu.

La loi de Biot et Savart, une fois introduite la notation

$$\boldsymbol{H}_{12} = \frac{J_1\, d\boldsymbol{s}_1 \times \boldsymbol{R}_{12}}{c_0\, |\boldsymbol{R}_{12}|^3},$$

peut s'écrire comme suit :

$$\boldsymbol{F}_{12} = \frac{1}{c_0}\,(J_2\, d\boldsymbol{s}_2 \times \boldsymbol{H}_{12}).$$

Par analogie avec la loi de Coulomb, on appelle $\boldsymbol{H}_{12}$ le champ magnétique créé au point où est situé l'élément $d\boldsymbol{s}_2$ par l'élément de courant $J_1\, d\boldsymbol{s}_1$.

Il est commode de considérer que le courant qui crée le champ magnétique n'est pas concentré sur les conducteurs, mais qu'il est distribué dans l'espace avec une certaine densité $\boldsymbol{j}\,(x, y, z)$. Cela signifie que dans l'élément de volume $da\, db\, dc$ est concentré l'élément de courant

$$\boldsymbol{j}\,(a, b, c)\, da\, db\, dc.$$

Le champ $\boldsymbol{H}$ créé au point (x, y, z) par cet élément de courant est

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{c_0}\,\frac{\boldsymbol{j}(a, b, c) \times \boldsymbol{R}}{|\boldsymbol{R}|^3}\, da\, db\, dc$$

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} x-a \\ x-b \\ x-c \end{pmatrix}$$

ou en coordonnées

$$H_x = \frac{1}{c_0}\,\frac{-j_z\,(a, b, c)\,(y-b) + j_y\,(a, b, c)\,(z-c)}{[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]^{3/2}}\, da\, db\, dc,$$

$$H_y = \frac{1}{c_0}\,\frac{-j_x\,(a, b, c)\,(z-c) + j_z\,(a, b, c)\,(x-a)}{[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]^{3/2}}\, da\ db\ dc,$$

$$H_z = \frac{1}{c_0}\,\frac{-j_y\,(a, b, c)\,(x-a) + j_x\,(a, b, c)\,(y-b)}{[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]^{3/2}}\, da\, db\, dc.$$

Pour tenir compte de la contribution de tous les éléments de courant, on doit intégrer les composantes du champ dans tous les éléments de volume :

$$H_x = \frac{1}{c_0}\iiint \frac{-j_z\,(a, b, c)\,(y-b) + j_y\,(a, b, c)\,(z-c)}{[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]^{3/2}}\, da\, db\, dc,$$

$$H_y = \frac{1}{c_0}\iiint \frac{-j_x\,(a, b, c)\,(z-c) + j_z\,(a, b, c)\,(x-a)}{[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]^{3/2}}\, da\, db\, dc,$$

$$H_z = \frac{1}{c_0}\iiint \frac{-j_y\,(a, b, c)\,(x-a) + j_x\,(a, b, c)\,(y-b)}{[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]^{3/2}}\, da\, db\, dc.$$

Enonçant la loi de Biot et Savart, nous avons noté que les courants doivent être fermés. Pour les courants distribués, cette condition est remplacée par la condition div $\boldsymbol{j} = 0$, ou en coordonnées :

$$\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} = 0.$$

La représentation intégrale de $\boldsymbol{H}$ d'après la densité de courant $\boldsymbol{j}$ (la divergence de $\boldsymbol{j}$ est supposée nulle) implique la généralisation de tous les faits expérimentaux qui se trouvent à la base des équations de la magnétostatique. De même que la représentation intégrale du potentiel électrostatique est utilisée pour la déduction des équations de l'électrostatique, la représentation intégrale de $\boldsymbol{H}$ que nous venons d'écrire est la base à partir de laquelle on déduit les équations différentielles.

Pour déduire ces équations, il est commode d'avoir recours à l'astuce suivante. On détermine d'après la distribution donnée des courants $\boldsymbol{j}$ ($\boldsymbol{j}$ est supposé suffisamment régulier et nul en dehors d'une certaine sphère) le potentiel vecteur de composantes

$$A_x = \iiint \frac{j_x(a, b, c)\, da\, db\, dc}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}},$$

$$A_y = \iiint \frac{j_y(a, b, c)\, da\, db\, dc}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}},$$

$$A_z = \iiint \frac{j_z(a, b, c)\, da\, db\, dc}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}.$$

De la théorie qui nous est connue du potentiel newtonien (cf. § 1) on déduit que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} &= -4\pi j_x, \\ \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} &= -4\pi j_y, \\ \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} &= -4\pi j_z. \end{aligned} \tag{7}$$

En dérivant formellement les intégrales qui représentent A, on peut obtenir les formules suivantes :

$$\begin{aligned} H_x &= \frac{1}{c_0}\left(-\frac{\partial A_y}{\partial z} + \frac{\partial A_z}{\partial y}\right), \\ H_y &= \frac{1}{c_0}\left(-\frac{\partial A_z}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{\partial z}\right), \\ H_z &= \frac{1}{c_0}\left(-\frac{\partial A_x}{\partial y} + \frac{\partial A_y}{\partial x}\right). \end{aligned} \tag{8}$$

La légitimité de cette dérivation s'établit de même qu'au § 1 on a démontré les règles de calcul des dérivées premières du potentiel

newtonien. Il résulte des égalités (8) que

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0.$$

Ainsi s'obtient une des équations vérifiées par le champ magnétique.

Dérivant la première des équations (7) par rapport à x, la seconde par rapport à y, la troisième par rapport à z et ajoutant, on obtient en se servant de l'égalité $\operatorname{div} \boldsymbol{j} = 0$:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right) = 0.$$

On établit ainsi que

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

est une fonction harmonique dans l'espace tout entier. En utilisant les formules intégrales pour les dérivées $\frac{\partial A_x}{\partial x}$, $\frac{\partial A_y}{\partial y}$, $\frac{\partial A_z}{\partial z}$ on peut établir que ces dérivées tendent vers zéro lorsque $x^2 + y^2 + z^2 \to \infty$, donc leur somme aussi. Nous avons déjà montré qu'une fonction harmonique définie dans l'espace tout entier et décroissant à l'infini est identiquement nulle

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = 0.$$

Ces remarques préliminaires faites, nous pouvons passer à la déduction des autres équations de la magnétostatique :

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{4\pi}{c_0} \boldsymbol{j}.$$

Cette équation vectorielle condense trois équations scalaires. Nous nous bornerons à vérifier la légitimité de l'une d'entre elles

$$-\frac{\partial H_y}{\partial z} + \frac{\partial H_z}{\partial y} = \frac{4\pi}{c_0} j_x.$$

Les autres se vérifient de la même façon. Remplaçant H_y, H_z par leurs expressions d'après les composantes de $\boldsymbol{A}$, il vient

$$-\frac{\partial H_y}{\partial z} + \frac{\partial H_z}{\partial y} = -\frac{1}{c_0}\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{\partial A_z}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial A_x}{\partial y} + \frac{\partial A_y}{\partial x}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{c_0}\left[-\left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_z}{\partial z} + \frac{\partial A_y}{\partial y}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{c_0}\left[-\left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right)\right] = \frac{4\pi}{c_0} j_x.$$

Nous pouvons maintenant faire le bilan et écrire la liste totale des équations du champ électromagnétique stationnaire

$$\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}=\frac{4\pi\rho}{\varepsilon},$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}=0,$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y}-\frac{\partial H_y}{\partial z}=\frac{4\pi}{c_0}j_x,\quad \frac{\partial H_x}{\partial z}-\frac{\partial H_z}{\partial x}=\frac{4\pi}{c_0}j_y,\quad \frac{\partial H_y}{\partial x}-\frac{\partial H_x}{\partial y}=\frac{4\pi}{c_0}j_z,$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial x}+\frac{\partial H_y}{\partial y}+\frac{\partial H_z}{\partial z}=0.$$

Notons encore que le courant j figurant au second membre de trois équations est supposé ici vérifier la condition

$$\frac{\partial j_x}{\partial x}+\frac{\partial j_y}{\partial y}+\frac{\partial j_z}{\partial z}=0.$$

Nous allons nous arrêter un instant sur la déduction des équations pour le champ électromagnétique non stationnaire. La base expérimentale de ces équations a été la loi d'induction de Faraday, déduite par ce savant en 1831. Faraday a remarqué que lorsqu'un champ magnétique varie un courant électrique apparaît dans un conducteur placé dans ce champ. En d'autres termes, lorsqu'un champ magnétique varie, l'intégrale suivant un contour fermé le long duquel est placé le conducteur

$$\oint E_x\,dx+E_y\,dy+E_z\,dz\neq 0,$$

et elle est d'autant plus grande que la vitesse de variation du champ magnétique est plus grande. L'égalité

$$\oint E_x\,dx+E_y\,dy+E_z\,dz=0$$

pour un champ stationnaire est une conséquence des équations

$$\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}=0.$$

Dès lors, il est naturel, dans un champ non stationnaire, de remplacer les zéros des seconds membres par des termes proportionnels à

$$\frac{\partial H_x}{\partial t},\quad \frac{\partial H_y}{\partial t},\quad \frac{\partial H_z}{\partial t}.$$

La forme différentielle exacte de la loi de Faraday est la suivante:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}+\frac{\mu}{c_0}\frac{\partial H_x}{\partial t}=0,$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}+\frac{\mu}{c_0}\frac{\partial H_y}{\partial t}=0,$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}+\frac{\mu}{c_0}\frac{\partial H_z}{\partial t}=0.$$

(La constante μ est la perméabilité magnétique du milieu). Cet énoncé est dû à Maxwell. Il semble à présent qu'on ait déduit le système complet d'équations décrivant un champ électromagnétique non stationnaire. Le voici :

$$\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}=\frac{4\pi}{\varepsilon}\rho,\qquad \frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}+\frac{\mu}{c_0}\frac{\partial H_x}{\partial t}=0,$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}+\frac{\mu}{c_0}\frac{\partial H_y}{\partial t}=0,\qquad \frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}+\frac{\mu}{c_0}\frac{\partial H_z}{\partial t}=0,$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial x}+\frac{\partial H_y}{\partial y}+\frac{\partial H_z}{\partial z}=0,\qquad \frac{\partial H_z}{\partial y}-\frac{\partial H_y}{\partial z}=\frac{4\pi}{c_0}j_x,$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z}-\frac{\partial H_z}{\partial x}=\frac{4\pi}{c_0}j_y,\qquad \frac{\partial H_y}{\partial x}-\frac{\partial H_x}{\partial y}=\frac{4\pi}{c_0}j_z.$$

Or, écrivant ce système d'équations, Maxwell a remarqué qu'il recelait un important défaut. Le fait est que la condition imposée au courant

$$\frac{\partial j_x}{\partial x}+\frac{\partial j_y}{\partial y}+\frac{\partial j_z}{\partial z}=0,$$

naturelle dans le cas stationnaire, ne saurait être adoptée dans le cas non stationnaire. Dans ce dernier cas, il est naturel, semble-t-il, de lier la vitesse de variation des charges dans le temps et la divergence du courant par l'égalité

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial j_x}{\partial x}+\frac{\partial j_y}{\partial y}+\frac{\partial j_z}{\partial z}=0.$$

Mais cela est impossible, étant donné que les trois dernières équations du système entraînent l'égalité

$$\frac{\partial j_x}{\partial x}+\frac{\partial j_y}{\partial y}+\frac{\partial j_z}{\partial z}=0.$$

(Pour le vérifier, il faut dériver la première de ces trois dernières équations par rapport à x, la seconde par rapport à y, la troisième par rapport à z et ajouter les résultats.)

Pour remédier à cet état de choses, Maxwell a suggéré d'introduire aux seconds membres des trois dernières équations des termes nouveaux :

$$\frac{\partial H_z}{\partial y}-\frac{\partial H_y}{\partial z}=\frac{1}{c_0}\left(4\pi j_x+\varepsilon\frac{\partial E_x}{\partial t}\right),$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z}-\frac{\partial H_z}{\partial x}=\frac{1}{c_0}\left(4\pi j_y+\varepsilon\frac{\partial E_y}{\partial t}\right),$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x}-\frac{\partial H_x}{\partial y}=\frac{1}{c_0}\left(4\pi j_z+\varepsilon\frac{\partial E_z}{\partial t}\right).$$

Ces nouveaux termes $\varepsilon\frac{dE}{dt}$ sont appelés *courants de déplacement.*

Ainsi a été établi, en 1865, le système d'équations de Maxwell. On doit aussi à Maxwell d'avoir identifié la lumière à des ondes électromagnétiques. On conçoit que les hypothèses arbitraires introduites par Maxwell dans ses équations aient été reçues avec beaucoup de réserve par les physiciens de l'époque. Les équations de Maxwell ont définitivement trouvé droit de cité en physique 15 ans après leur publication. Une vérification expérimentale minutieuse a balayé toutes les objections des réfractaires.

En conclusion, recopions le système complet d'équations de Maxwell sous forme vectorielle :

$$\operatorname{div} \boldsymbol{E} = \frac{4\pi}{\varepsilon}\rho, \quad \operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{\mu}{c_0}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t},$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0, \quad \operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{1}{c_0}\left(4\pi \boldsymbol{j} + \varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right).$$

Nous avons envisagé plus haut le cas particulier des équations d'ondes planes dans un milieu sans charges et courants ($\rho \equiv 0$, $j = 0$). Dans ce cas $E_x = 0$, $H_x = 0$, et toutes les autres composantes ne dépendent que de x et de t.

§ 6. Caractéristiques

Définition des caractéristiques pour un système général d'équations du premier ordre à deux variables indépendantes. Relations sur les caractéristiques. Caractéristiques complexes des équations de Cauchy-Riemann. Définition des caractéristiques dans le cas d'un plus grand nombre de variables indépendantes. Définition d'un système t-hyperbolique du premier ordre. Systèmes t-hyperboliques du premier ordre symétriques. Exemple des équations des ondes sonores. Invariance de la notion de caractéristiques par rapport aux transformations non dégénérées des fonctions inconnues et par rapport au remplacement des équations par des combinaisons linéaires équivalentes. Cône des normales caractéristiques. Définition des caractéristiques pour une équation du second ordre. Position du problème de Cauchy pour une telle équation. Exemples. Définition du système elliptique et de l'équation elliptique.

Les exemples traités au paragraphe précédent nous ont conduits à la notion de caractéristiques, bien que cette notion n'ait pas été définie.

Dans ce paragraphe, consacré aux caractéristiques, nous exposerons les considérations qui ont conduit à cette notion dans trois cas types. La notion de caractéristiques pour les équations et systèmes de forme plus générale ne diffère en fait en rien des exemples envisagés dans la suite.

Suivant les exemples, nous donnerons une forme analytique différente aux raisonnements conduisant à la définition des caractéristiques, pour faciliter au lecteur l'utilisation des diverses sources qu'il aura à utiliser par la suite.

Nous commençons la description des caractéristiques par le cas d'un système linéaire arbitraire à deux variables indépendantes x et t.

Supposons que le système étudié ait la forme

$$\begin{cases} A_{11}(x, t)\frac{\partial u_1}{\partial t} + A_{12}(x, t)\frac{\partial u_2}{\partial t} + B_{11}(x, t)\frac{\partial u_1}{\partial x} + \\ \qquad + B_{12}(x, t)\frac{\partial u_2}{\partial x} = f_1(x, t), \\ A_{21}(x, t)\frac{\partial u_1}{\partial t} + A_{22}(x, t)\frac{\partial u_2}{\partial t} + B_{21}(x, t)\frac{\partial u_1}{\partial x} + \\ \qquad + B_{22}(x, t)\frac{\partial u_2}{\partial x} = f_2(x, t). \end{cases}$$

Nous écrirons parfois ce système sous forme matricielle

$$A\frac{\partial u}{\partial t} + B\frac{\partial u}{\partial x} = f, \tag{1}$$

en posant

$$A = \begin{Vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{Vmatrix},$$

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}.$$

Utilisant l'écriture matricielle, on peut, évidemment, ne pas se limiter au cas de deux équations à deux fonctions inconnues. Les vecteurs u, f peuvent être à n dimensions. Alors les matrices doivent avoir $n \times n$ dimensions.

Supposons connu que le système envisagé a une solution régulière dans un certain domaine G. Prenons un point (x_0, t_0) dans ce domaine et menons par ce point une courbe γ. Nous désignerons le vecteur déplacement infinitésimal suivant cette courbe à partir du point (x_0, t_0) par (dx, dt). Supposons que, pour une raison ou pour une autre, l'on connaisse les valeurs de u le long de la courbe γ et que l'on veuille, d'après ces valeurs et les équations du système, reconstituer u dans le voisinage de γ.

Le problème qui consiste à trouver la solution du système dans le voisinage de γ d'après les valeurs de cette solution sur la courbe est appelé *problème de Cauchy pour le système*. Nous allons même considérer le problème plus restreint consistant à trouver seulement les dérivées du vecteur fonction $u = (u_1, u_2)$ suivant la normale à γ au point (x_0, t_0) de cette courbe.

Notons que, les quantités u_1 et u_2 étant connues le long de la courbe, et donc aussi leurs dérivées le long de la courbe, la connaissance des dérivées normales nous permet de calculer les dérivées

dans n'importe quelle direction, et notamment toutes les dérivées

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial u_2}{\partial t}, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x}$$

aux points de la courbe. Réciproquement, la connaissance de ces quatre dérivées permet de calculer les dérivées dans n'importe quelle direction, notamment suivant la normale.

Dès lors, nous nous poserons le problème suivant : connaissant le long de la courbe γ le vecteur fonction u, trouver aux points de cette courbe les dérivées $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$.

Nous calculerons ces dérivées au point (x_0, t_0) en n'utilisant de notre connaissance de u que la valeur de la différentielle du correspondant au déplacement dx, dt le long de la courbe. Ecrivons du à l'aide des dérivées partielles de u :

$$\begin{cases} \underline{dt}\,\frac{\partial u_1}{\partial t} + \underline{dx}\,\frac{\partial u_1}{\partial x} = \underline{du_1}, \\ \underline{dt}\,\frac{\partial u_2}{\partial t} + \underline{dx}\,\frac{\partial u_2}{\partial x} = \underline{du_2}. \end{cases}$$

Dans ces égalités nous avons souligné les différentielles connues déterminant le déplacement le long de γ.

Réunissant ces deux égalités et les deux équations initiales du système, nous sommes conduits à quatre équations linéaires avec les quatre inconnues $\frac{\partial u_1}{\partial t}$, $\frac{\partial u_1}{\partial x}$, $\frac{\partial u_2}{\partial t}$, $\frac{\partial u_2}{\partial x}$:

$$\begin{aligned} A_{11}\frac{\partial u_1}{\partial t} + A_{12}\frac{\partial u_2}{\partial t} + B_{11}\frac{\partial u_1}{\partial x} + B_{12}\frac{\partial u_2}{\partial x} &= f_1, \\ A_{21}\frac{\partial u_1}{\partial t} + A_{22}\frac{\partial u_2}{\partial t} + B_{21}\frac{\partial u_1}{\partial x} + B_{22}\frac{\partial u_2}{\partial x} &= f_2, \\ dt\,\frac{\partial u_1}{\partial t} + dx\,\frac{\partial u_1}{\partial x} &= du_1, \\ dt\,\frac{\partial u_2}{\partial t} + dx\,\frac{\partial u_2}{\partial x} &= du_2. \end{aligned}$$

Sous forme matricielle les équations pour $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$ s'écrivent comme suit :

$$\begin{cases} A\,\frac{\partial u}{\partial t} + B\,\frac{\partial u}{\partial x} = f, \\ dtE\,\frac{\partial u}{\partial t} + dxE\,\frac{\partial u}{\partial x} = du. \end{cases} \tag{2}$$

Nous avons désigné par E la matrice unité. Les dérivées cherchées peuvent être tirées de ces équations si

$$\det \begin{Vmatrix} A & B \\ dtE & dxE \end{Vmatrix} \neq 0.$$

Pour le système du second ordre

$$\det \begin{Vmatrix} A & B \\ dtE & dxE \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} A_{11} & A_{12} & B_{11} & B_{12} \\ A_{21} & A_{22} & B_{21} & B_{22} \\ dt & 0 & dx & 0 \\ 0 & dt & 0 & dx \end{Vmatrix}.$$

Les lignes (données par les différentielles du déplacement dx, dt) le long desquelles

$$\det \begin{Vmatrix} A & B \\ dtE & dxE \end{Vmatrix} = 0$$

sont appelées les *caractéristiques du système*

$$A \frac{\partial u}{\partial t} + B \frac{\partial u}{\partial x} = f.$$

Soit maintenant γ une caractéristique. Bien que le déterminant soit nul, le système (2) a une solution, puisqu'on suppose qu'il existe dans G une solution du système (1) prenant sur γ les valeurs données sur cette courbe. C'est dire que le rang de la matrice élargie

$$\begin{Vmatrix} A & B & f \\ dtE & dxE & du \end{Vmatrix}$$

est égal au rang de la matrice dégénérée

$$\begin{Vmatrix} A & B \\ dtE & dxE \end{Vmatrix}$$

des coefficients des inconnues $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$.

Par conséquent, le long des caractéristiques le vecteur du ne saurait être arbitraire. Il doit vérifier la relation

$$\operatorname{rang} \begin{Vmatrix} A & B & f \\ dtE & dxE & du \end{Vmatrix} = \operatorname{rang} \begin{Vmatrix} A & B \\ dtE & dxE \end{Vmatrix}.$$

Cette relation est précisément la *relation sur la caractéristique*.

Pour illustrer la notion de caractéristiques et celle de relations sur les caractéristiques, nous allons reprendre notre exemple du système décrivant les ondes sonores

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 c_0^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \end{cases}$$

Voici sa forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\rho_0} \\ \rho_0 c_0^2 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Le système d'équations (2) s'écrit dans cet exemple sous la forme :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho_0} \\ 0 & 1 & \rho_0 c_0^2 & 0 \\ dt & 0 & dx & 0 \\ 0 & dt & 0 & dx \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial p}{\partial t} \\ \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ du \\ dp \end{pmatrix}.$$

Equation des caractéristiques

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho_0} \\ 0 & 1 & \rho_0 c_0^2 & 0 \\ dt & 0 & dx & 0 \\ 0 & dt & 0 & dx \end{vmatrix} = dx^2 - c_0^2 dt^2 = (dx - c_0 dt)(dx + c_0 dt) = 0.$$

De sorte que nous avons obtenu pour caractéristiques les lignes données par les équations

$$dx = \pm c_0 dt,$$

c'est-à-dire les droites

$$x \mp c_0 t = \text{const}.$$

Ce sont précisément les lignes que nous avons convenu d'appeler caractéristiques au paragraphe précédent.

Venons-en à la déduction des relations sur les caractéristiques pour le système considéré. Nous voulons que le rang de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho_0} & 0 \\ 0 & 1 & \rho_0 c_0^2 & 0 & 0 \\ dt & 0 & dx & 0 & du \\ 0 & dt & 0 & dx & dp \end{pmatrix}$$

soit égal (le long d'une caractéristique) au rang de la matrice formée avec ses quatre premières colonnes. Le déterminant de cette dernière est nul. Dès lors, le déterminant de la matrice formée avec quatre colonnes quelconques doit être nul. Par exemple, doit être

nul le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \rho_0 c_0^2 & 0 \\ dt & 0 & dx & du \\ 0 & dt & 0 & dp \end{vmatrix} = 0,$$

qui s'obtient de la matrice élargie en biffant sa quatrième colonne (l'avant-dernière). Développons ce déterminant :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \rho_0 c_0^2 & 0 \\ dt & 0 & dx & du \\ 0 & dt & 0 & dp \end{vmatrix} = dx\,dp + \rho_0 c_0^2\,du\,dt = 0.$$

On sait que le long des caractéristiques $\frac{dx}{dt} = c_0$ est observée la relation $c_0\,dt\,dp + \rho_0 c_0^2\,du\,dt = 0$ ou, ce qui revient au même, $d\left(u + \frac{p}{\rho_0 c_0}\right) = 0$. Le long des caractéristiques $\frac{dx}{dt} = -c_0$ on obtient de même la relation $d\left(u - \frac{p}{\rho_0 c_0}\right) = 0$. Nous avons montré que pour le système d'équations de la propagation des ondes sonores notre définition générale des caractéristiques et des relations sur elles conduit aux faits établis au paragraphe précédent.

Considérons encore le système d'équations de Cauchy-Riemann

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \end{cases}$$

Son écriture matricielle est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Développons le déterminant caractéristique de ce système

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ dx & 0 & dy & 0 \\ 0 & dx & 0 & dy \end{vmatrix} = dx^2 + dy^2.$$

On voit que le système de Cauchy-Riemann n'a pas de caractéristiques réelles (elles sont déterminées par les égalités $dy = \pm i\,dx$).

Les systèmes qui ont toutes leurs caractéristiques réelles, moyennant certaines restrictions supplémentaires, sont dits *hyperboliques*. Etudiant la position du problème de Cauchy pour les systèmes hyper-

boliques, nous supposerons d'ordinaire que les données initiales sont prises sur un segment de l'axe des x (pour $t = 0$). On prend pour telles les valeurs initiales de toutes les fonctions inconnues. Ce faisant, nous supposerons que l'axe des x n'est pas une caractéristique, c'est-à-dire que, quelles que soient les valeurs initiales $u(x, 0)$, on peut, d'après le système, déterminer les dérivées par rapport à t. Le système s'écrivant

$$A\frac{\partial u}{\partial t} + B\frac{\partial u}{\partial x} = f,$$

c'est dire que sur le segment de définition des données initiales $\det \| A \| \neq 0$. Alors le système peut être recopié comme suit :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A^{-1}B\frac{\partial u}{\partial x} = A^{-1}f$$

ou, si l'on pose $A^{-1}B = C$, $A^{-1}f = g$,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + C\frac{\partial u}{\partial x} = g.$$

En règle générale, nous supposerons d'emblée le système donné sous cette forme. L'équation des caractéristiques pour un système écrit sous cette forme se simplifie. En effet, pour un système d'ordre n

$$\det \begin{Vmatrix} E & C \\ dtE & dxE \end{Vmatrix} = dt^n \det \begin{Vmatrix} E & C \\ E & \frac{dx}{dt}E \end{Vmatrix} =$$

$$= dt^n \det \begin{Vmatrix} 0 & C - \frac{dx}{dt}E \\ E & \frac{dx}{dt}E \end{Vmatrix} = (-1)^n dt^n \det \left\| C - \frac{dx}{dt}E \right\|.$$

Aussi les caractéristiques sont-elles les lignes satisfaisant aux équations

$$\frac{dx}{dt} = k_i(x, t),$$

où les pentes des caractéristiques k_i sont calculées en tant que racines caractéristiques de la matrice C :

$$\det \| C - kE \|.$$

Si toutes les racines de cette équation sont réelles et si elles ne sont pas multiples en aucun point du domaine envisagé, nous appellerons ce système hyperbolique dans ce domaine.

Nous verrons par la suite que certains systèmes (pas tous!) avec des racines caractéristiques k multiples relèvent aussi de la classe des systèmes hyperboliques, vu la communauté des propriétés.

Encore une remarque. Notre définition des caractéristiques s'étend textuellement aux systèmes de la forme

$$A(x, t, u)\frac{du}{dt} + B(x, t, u)\frac{du}{dx} = f(x, t, u).$$

Les systèmes de ce genre, dont les coefficients dépendent de la solution (mais non des dérivées de la solution), sont dits systèmes quasi linéaires. Dans ce cas, les caractéristiques dépendent de la solution envisagée. Une ligne, qui est une caractéristique pour une solution, n'est pas une caractéristique pour une autre solution. On peut apporter pour exemple de tel système quasi linéaire les équations du mouvement d'un gaz barotrope, connues en mécanique des milieux continus :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{p'(\rho)}{\rho}\dfrac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + u\dfrac{\partial \rho}{\partial x} + \rho\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, \end{cases}$$

$p = p(\rho)$ étant l'équation d'état.

Problème. Montrez que pour ce système les équations des caractéristiques et les relations sur elles s'écrivent sous la forme :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = u + \sqrt{p'(\rho)}, \\ du = -\dfrac{dp}{\rho\sqrt{p'(\rho)}}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = u - \sqrt{p'(\rho)}, \\ du = \dfrac{dp}{\rho\sqrt{p'(\rho)}}. \end{cases}$$

Passons à présent au cas où le nombre de variables indépendantes est supérieur à deux. Nous ferons la description de la notion de caractéristiques dans le cas type où l'on a trois variables (x, y, t). Dans cette description nous ne nous intéresserons qu'à l'équation des caractéristiques, et nous n'écrirons pas les relations sur elles. (La description que nous allons donner du cas de trois variables embrasse le cas déjà étudié de deux variables.)

Ainsi donc, envisageons un système de n équations à n fonctions inconnues. Nous l'écrirons sous forme vectorielle

$$A\frac{\partial u}{\partial t} + B\frac{\partial u}{\partial x} + C\frac{\partial u}{\partial y} = f(x, y, t, u).$$

Supposons qu'il nous soit connu que ce système a une solution régulière dans un domaine G de l'espace (x, y, t). Supposons que l'on connaisse cette solution sur une surface S située dans G, et que nous voulions profiter de cette connaissance pour déterminer la solution en dehors de S, ne serait-ce que dans un certain voisinage de cette surface, c'est-à-dire que nous voulions résoudre le problème de Cauchy pour le système envisagé. Nous allons restreindre encore plus le problème posé. Bornons-nous à trouver les dérivées des inconnues suivant la normale à S en un point (x_0, y_0, z_0) de cette

surface. (Il suffira pour cela de trouver les dérivées dans une direction quelconque non tangente à la surface.)

Soit l'équation de la surface S écrite sous la forme

$$\varphi(x, y, t) = 0, \quad \text{où grad } \varphi \neq 0.$$

Considérons, outre $\varphi = \varphi(x, y, t)$, encore deux fonctions quelconques $\alpha = \alpha(x, y, t)$, $\beta = \beta(x, y, t)$ soumises seulement à la condition

$$\begin{vmatrix} \varphi_x & \varphi_y & \varphi_t \\ \alpha_x & \alpha_y & \alpha_t \\ \beta_x & \beta_y & \beta_t \end{vmatrix} \neq 0$$

dans un certain voisinage du point (x_0, y_0, t_0) de S. Le système de fonctions

$$\varphi = \varphi(x, y, t),$$
$$\alpha = \alpha(x, y, t),$$
$$\beta = \beta(x, y, t)$$

peut être considéré comme un nouveau système de coordonnées. Si $Z = Z(x, y, t) = Z[x(\varphi, \alpha, \beta), y(\varphi, \alpha, \beta), t(\varphi, \alpha, \beta)] = Z(\varphi, \alpha, \beta)$, alors Z_α, Z_β sont les dérivées dans les directions tangentes à S, et Z_φ est la dérivée dans une certaine direction non tangente à S.

Ecrivons notre système en nouvelles coordonnées

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} A + \frac{\partial\varphi}{\partial x} B + \frac{\partial\varphi}{\partial y} C\right) \frac{\partial u}{\partial\varphi} + \left(\frac{\partial\alpha}{\partial t} A + \frac{\partial\alpha}{\partial x} B + \frac{\partial\alpha}{\partial y} C\right) \frac{\partial u}{\partial\alpha} +$$
$$+ \left(\frac{\partial\beta}{\partial t} A + \frac{\partial\beta}{\partial x} B + \frac{\partial\beta}{\partial y} C\right) \frac{\partial u}{\partial\beta} = f.$$

(Je recommande instamment de faire, parallèlement à la déduction matricielle, les calculs au moyen des composantes sur l'exemple du système du second ou du troisième ordre.)

Pour que ce système soit résoluble par rapport à $\frac{\partial u}{\partial\varphi}$ quels que soient $\frac{\partial u}{\partial\alpha}$, $\frac{\partial u}{\partial\beta}$, f, il faut que

$$\det \left\| \frac{\partial\varphi}{\partial t} A + \frac{\partial\varphi}{\partial x} B + \frac{\partial\varphi}{\partial y} C \right\| \neq 0.$$

Cette condition n'intéresse que la surface $S\{\varphi(x, y, t) = 0\}$ et n'est liée d'aucune manière au choix des fonctions auxiliaires de coordonnées α, β. Le vecteur $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}, \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)$ étant colinéaire avec la normale (τ, ξ, η) à S, la dernière condition équivaut à

$$\det \| \tau A + \xi B + \eta C \| \neq 0.$$

Définition. *Les surfaces* $S\{\varphi(x, y, t) = 0\}$ *sur lesquelles* $\det\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial t} A + \frac{\partial \varphi}{\partial x} B + \frac{\partial \varphi}{\partial y} C \right\| = 0$ *ou, ce qui revient au même,* $\det\|\tau A + \xi B + \eta C\| = 0$, *où* (τ, ξ, η) *est la normale à* S, *sont appelées caractéristiques du système*

$$A \frac{\partial u}{\partial t} + B \frac{\partial u}{\partial x} + C \frac{\partial u}{\partial y} = f.$$

Examinons un exemple illustrant cette définition. Le système décrivant dans le cas bidimensionnel la propagation des ondes sonores s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 c_0^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

Voici sa forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} p \\ u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \rho_0 c_0^2 & 0 \\ \frac{1}{\rho_0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} p \\ u \\ v \end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \rho_0 c_0^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\rho_0} & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} p \\ u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice $\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial t} A + \frac{\partial \varphi}{\partial x} B + \frac{\partial \varphi}{\partial y} C \right\|$ s'écrit ici comme suit :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial t} & \rho_0 c_0^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \rho_0 c_0^2 \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial t} & 0 \\ \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \varphi}{\partial y} & 0 & \frac{\partial \varphi}{\partial t} \end{pmatrix}.$$

Son déterminant est

$$\det\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial t} A + \frac{\partial \varphi}{\partial x} B + \frac{\partial \varphi}{\partial y} C \right\| = \frac{\partial \varphi}{\partial t} \left\{ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 - c_0^2 \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] \right\}.$$

En égalant le déterminant à zéro, on obtient les équations des caractéristiques :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = +c_0\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2},$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -c_0\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2}.$$

Définition. *Un système de n équations du premier ordre*

$$A\frac{\partial u}{\partial t} + B\frac{\partial u}{\partial x} + C\frac{\partial u}{\partial y} = f$$

est dit t-hyperbolique si son équation caractéristique

$$\det \| \tau A + \xi B + \eta C \| = 0$$

a, quels que soient ξ, η *réels* ($\xi^2 + \eta^2 \neq 0$), *n racines réelles et distinctes* τ. Si A, B, C dépendent de x, y, t, cette condition doit être remplie en chaque point (x, y, t) du domaine considéré.

Il est très difficile pour les systèmes concrets de vérifier la condition d'hyperbolicité. Toutefois, il existe une classe importante de systèmes où cette vérification est fortement simplifiée.

Considérons le système

$$A\frac{\partial u}{\partial t} + B\frac{\partial u}{\partial x} + C\frac{\partial u}{\partial y} = f$$

de matrices A, B, C symétriques. De plus, supposons la matrice A définie positive.

De toute évidence, la matrice $\mathscr{B} = \xi B + \eta C$ est elle aussi symétrique quels que soient ξ, η. On sait que deux matrices symétriques quelconques A, $\mathscr{B}$, dont l'une (dans notre cas A) est définie positive, peuvent être réduites à la forme diagonale par une même transformation non dégénérée réelle T (qui plus est, la matrice A peut être réduite alors à la matrice unité) :

$$T^*\mathscr{B}T = \begin{pmatrix} b_1 & & & 0 \\ & b_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & b_n \end{pmatrix}, \qquad T^*AT = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Considérons maintenant l'équation

$$\det \| \tau A + \xi B + \eta C \| = \det \| \tau A + \mathscr{B} \| =$$

$$= [\det \| T \|]^{-2} \det \| \tau T^* A T + T^* \mathscr{B} T \| =$$

$$= [\det \| T \|]^{-2} \det \begin{pmatrix} \tau + b_1 & & & 0 \\ & \tau + b_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \tau + b_n \end{pmatrix} = 0.$$

Quels que soient ξ, η réels, elle a exactement n racines réelles en τ. Il est vrai qu'on ne sait rien sur leur multiplicité. Malgré cela, les systèmes de la forme

$$A \frac{\partial u}{\partial t} + B \frac{\partial u}{\partial x} + C \frac{\partial u}{\partial y} = f$$

de matrices A, B, C symétriques, A étant définie positive, possèdent toutes les propriétés fondamentales des systèmes hyperboliques. Nous étudierons minutieusement une partie de ces propriétés par la suite.

Définition. *Un système d'équations*

$$A \frac{\partial u}{\partial t} + B \frac{\partial u}{\partial x} + C \frac{\partial u}{\partial y} = f$$

est dit symétrique t-hyperbolique (d'après Friedrichs) si les matrices A, B, C sont symétriques, A étant en outre définie positive. (Tous les éléments des matrices A, B, C et les composantes du second membre sont supposés, comme d'ordinaire, être des fonctions suffisamment régulières de x, y, t).

Exemple. Les équations de la propagation des ondes sonores, déjà envisagées, peuvent s'écrire comme suit :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\rho_0 c_0^2} \dfrac{\partial p}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0, \\ \rho_0 \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial p}{\partial x} = 0, \\ \rho_0 \dfrac{\partial v}{\partial t} + \dfrac{\partial p}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

En comparaison avec l'exemple précédent, nous l'avons divisé la première équation par $\rho_0 c_0^2$, et multiplié les deux suivantes par ρ_0.

Sous forme matricielle le système considéré devient :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\rho_0 c_0^2} & 0 & 0 \\ 0 & \rho_0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} p \\ u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} p \\ u \\ v \end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y}\begin{pmatrix} p \\ u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Il résulte de cette écriture que les matrices

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho_0 c_0^2} & 0 & 0 \\ 0 & \rho_0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

satisfont à toutes les conditions de la définition qui vient d'être donnée, si bien que les équations de la propagation du son sous la forme actuellement utilisée constituent un système symétrique t-hyperbolique.

Les systèmes symétriques t-hyperboliques permettent, comme nous le verrons au chapitre suivant, de construire certaines relations importantes vérifiées par leurs solutions. Ces relations, qui généralisent la loi de conservation de l'énergie pour les solutions des équations de l'acoustique ou des équations de Maxwell, portent le nom d'*intégrales d'énergie*.

En fait, toute la théorie des systèmes symétriques hyperboliques est basée sur ces identités.

Pour le système

$$A(x, y, t, u)\frac{\partial u}{\partial t} + B(x, y, t, u)\frac{\partial u}{\partial x} + C(x, y, t, u)\frac{\partial u}{\partial y} = f(x, y, t, u)$$

(ici A, B, C sont des matrices, u est un vecteur fonction à n dimensions), nous avons défini les caractéristiques comme des surfaces S telles que la normale (τ, ξ, η) à S vérifie l'égalité

$$\det \| \tau A + \xi B + \eta C \| = 0.$$

Notons que cette définition distingue des surfaces invariables dans une transformation linéaire non dégénérée quelconque de l'ensemble des fonctions cherchées et dans le remplacement des équations initiales par des combinaisons linéaires arbitraires de ces équations.

A savoir, nous poserons $u = Tv$ ($T = T(x, y, t)$ est une matrice non dégénérée). Alors les fonctions v satisferont au système

$$AT\frac{\partial v}{\partial t} + BT\frac{\partial v}{\partial x} + CT\frac{\partial v}{\partial y} = f - \left(A\frac{\partial T}{\partial t} + B\frac{\partial T}{\partial x} + C\frac{\partial T}{\partial y}\right)v.$$

Le remplacement des équations du système par leurs combinaisons linéaires équivaut à la multiplication de ce système à gauche par la matrice non dégénérée Q.

Alors les équations deviennent

$$QAT\frac{\partial v}{\partial t}+QBT\frac{\partial v}{\partial x}+QCT\frac{\partial v}{\partial y}=Qf-Q\left(A\frac{\partial T}{\partial t}+B\frac{\partial T}{\partial x}+C\frac{\partial T}{\partial y}\right)v.$$

Si Q était dégénérée, ces équations ne seraient pas équivalentes aux équations initiales.

Ecrivons l'équation des caractéristiques pour le système ainsi transformé :

$$\det\|\tau QAT+\xi QBT+\eta QCT\|=0.$$

En vertu du théorème sur le déterminant du produit de matrices, on a

$$\det\|\tau QAT+\xi QBT+\eta QCT\|=\det\|Q(\tau A+\xi B+\eta C)T\|=$$
$$=\det\|Q\|\det\|\tau A+\xi B+\eta C\|\det\|T\|.$$

Etant donné que $\det\|Q\|\neq 0$, $\det\|T\|\neq 0$, l'équation

$$\det\|\tau A+\xi B+\eta C\|=0 \tag{3}$$

équivaut à l'équation

$$\det\|\tau QAT+\xi QBT+\eta QCT\|=0.$$

L'affirmation que la notion de caractéristiques est invariante par rapport aux transformations linéaires non dégénérées de l'ensemble des fonctions cherchées et par rapport au remplacement des équations par des combinaisons linéaires arbitraires équivalentes est démontrée.

L'ensemble des vecteurs (τ, ξ, η) satisfaisant à (3) est de toute évidence un cône, étant donné que, en même temps que chaque vecteur (τ, ξ, η), cette égalité est vérifiée par tous les vecteurs colinéaires $(k\tau, k\xi, k\eta)$. Le cône déterminé par une telle équation est dit *cône des normales aux caractéristiques* ou *cône des normales caractéristiques* tout court. Si les matrices des coefficients A, B, C dépendent des coordonnées x, y, t, le cône des normales caractéristiques

$$\det\|\tau A(x, y, t)+\xi B(x, y, t)+\eta C(x, y, t)\|=0$$

est différent suivant le point (x, y, z) de l'espace.

Nous donnerons encore la définition des caractéristiques dans le cas d'une seule équation du second ordre

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial t\,\partial x}+C\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x, t, u, u_x, u_t).$$

Nous nous bornerons au cas de deux variables indépendantes x, t. Dans le cas d'un plus grand nombre de variables les caractéristiques se définissent exactement de la même manière.

Passons à un nouveau système de coordonnées :

$$\varphi = \varphi(x, t), \quad \alpha = \alpha(x, t), \quad \frac{D(\varphi, \alpha)}{D(x, t)} \not\equiv 0.$$

L'équation devient dans ce nouveau système de coordonnées :

$$\begin{aligned}
&\left[A\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 + 2B\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) + C\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2\right]\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} + \\
&\quad + 2\left[A\frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{\partial\alpha}{\partial t} + B\frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{\partial\alpha}{\partial x} + B\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\alpha}{\partial t} + C\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right]\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi\,\partial\alpha} + \\
&\quad + \left[A\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)^2 + 2B\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right) + C\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right)^2\right]\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2} + \\
&\quad + \left[A\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + 2B\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\,\partial x} + C\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right]\frac{\partial u}{\partial\varphi} + \left[A\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2} + 2B\frac{\partial^2\alpha}{\partial t\,\partial x} + \right. \\
&\qquad \left. + C\frac{\partial^2\alpha}{\partial x^2}\right]\frac{\partial u}{\partial\alpha} = f(x, t, u, u_\varphi\varphi_x + u_\alpha\alpha_x, u_\varphi\varphi_t + u_\alpha\alpha_t).
\end{aligned}$$

Supposons à présent que sur une certaine courbe $\varphi = \varphi_0 = \text{const}$ soient données la fonction u et toutes ses dérivées premières en fonction de α. Le fait que la fonction u et sa dérivée $\frac{\partial u}{\partial\varphi}$ soient connues est essentiel pour nous. En dérivant celles-ci par rapport à α (c'est-à-dire le long de la courbe), on trouve sur cette courbe

$$\frac{\partial u}{\partial\alpha}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial\varphi\,\partial\alpha}.$$

A présent, à l'aide de l'équation, pourvu que

$$A\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 + 2B\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) + C\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 \not\equiv 0,$$

on peut trouver $\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}$. *Les courbes* $\varphi(x, t) = \text{const}$ (grad $\varphi \not\equiv 0$) *sur lesquelles*

$$A\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 + 2B\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) + C\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 = 0, \tag{4}$$

sont dites caractéristiques de l'équation

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial t\,\partial x} + C\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f.$$

Les caractéristiques jouent pour une seule équation un rôle aussi important que pour les systèmes.

Ainsi que pour les systèmes considérés plus haut, lors de la détermination des caractéristiques de l'équation du second ordre on pourra remplacer l'égalité (4) par la relation qui lui est équi-

valente

$$A\tau^2 + 2B\tau\xi + C\xi^2 = 0,$$

(τ, ξ) étant la normale à la courbe étudiée.

Si la courbe $\varphi(x, t) = \varphi_0$ est une caractéristique, la solution u satisfait sur cette courbe à l'égalité

$$2\left[A\frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{\partial\alpha}{\partial t} + B\frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{\partial\alpha}{\partial x} + B\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\alpha}{\partial t} + C\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right]\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right) +$$
$$+\left[A\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)^2 + 2B\frac{\partial\alpha}{\partial t}\frac{\partial\alpha}{\partial x} + C\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right)^2\right]\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2} +$$
$$+\left[A\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + 2B\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\,\partial x} + C\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right]\frac{\partial u}{\partial\varphi} + \left[A\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2} + 2B\frac{\partial^2\alpha}{\partial t\,\partial x} +\right.$$
$$\left. + C\frac{\partial^2\alpha}{\partial x^2}\right]\frac{\partial u}{\partial\alpha} = f(x, t, u, u_\varphi\varphi_x + u_\alpha\alpha_x;\ u_\varphi\varphi_t + u_\alpha\alpha_t).$$

Cette égalité pourra être considérée comme une relation entre u et $\frac{\partial u}{\partial\varphi}$ le long de la caractéristique.

Le *problème de Cauchy pour l'équation du second ordre* se pose ainsi. On se donne sur une certaine ligne $\varphi = \text{const}$ les valeurs de u et $\frac{\partial u}{\partial\varphi}$, et on cherche à déterminer la solution dans un voisinage de cette ligne. Si $\varphi = \text{const}$ est une caractéristique, le problème de Cauchy ne peut être posé sur elle. Ayant donné u sur la courbe, on peut déterminer u_φ à partir de la relation sur la caractéristique. La liberté dans le choix des données initiales est réduite. Il est vrai qu'il suffit parfois de donner u sur la caractéristique pour déterminer la solution, mais alors il n'est plus naturel d'appeler problème de Cauchy une telle position du problème.

Exemples. 1. Les caractéristiques de l'équation $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ sont déterminées par l'égalité

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) = 0.$$

La solution générale de l'équation $\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0$ s'écrit $\varphi = \varphi(x - t)$, la solution générale annulant l'autre facteur $\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{\partial\varphi}{\partial x}$ étant $\varphi = \varphi(x + t)$. Les égalités $\varphi(x - t) = \text{const}$ ou $\varphi(x + t) = \text{const}$ déterminent deux familles de droites $x \pm t = \text{const}$, qui sont précisément les caractéristiques de l'équation envisagée.

2. Pour l'équation de Laplace $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ l'équation des caractéristiques $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 = 0$ n'a pas de solutions réelles.

3. L'équation de la chaleur $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$ conduit à l'équation des

caractéristiques $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 = 0$. La solution générale de cette équation est $\varphi = \varphi(t)$, et les caractéristiques $\varphi(t) = \text{const}$ ($t = \text{const}$) sont des droites parallèles à l'axe des x. Le problème consistant à déterminer la température pour $t > 0$ d'après les valeurs initiales $u(x, 0)$ est un problème avec des données sur une caractéristique. Voilà pourquoi on se donne pour condition initiale une seule fonction, bien que l'équation de la chaleur soit du second ordre. Le problème initial pour l'équation de la chaleur n'est pas un problème de Cauchy, encore qu'on lui attribue souvent ce nom dans les ouvrages.

Les équations aux dérivées partielles se classent naturellement d'après les propriétés de l'équation caractéristique. C'est ainsi qu'a été introduite la notion de systèmes hyperboliques, que nous avons déjà définis. Donnons encore la définition des systèmes ou équations elliptiques.

Le système

$$A\frac{\partial u}{\partial x} + B\frac{\partial u}{\partial y} + C\frac{\partial u}{\partial z} = f$$

est dit *elliptique* si son équation caractéristique

$$\det \| \xi A + \eta B + \zeta C \| = 0$$

n'a pas de solutions réelles (ξ, η, ζ) telles que $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 > 0$. Pour définir l'ellipticité d'une seule équation

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f,$$

il faut considérer son équation caractéristique

$$A\xi^2 + 2B\xi\eta + C\eta^2 = 0$$

et exiger qu'elle n'ait pas de solutions réelles (ξ, η) telles que $\xi^2 + \eta^2 > 0$.

Le système d'équations de Cauchy-Riemann

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial v}{\partial u} = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

fournit un exemple de système elliptique, et l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

un exemple d'équation elliptique.

L'équation de la chaleur $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ a pour équation des caractéristiques $\xi^2 = 0$, qui se décompose en deux équations coïncidentes. Elle se rapporte à la classe des équations paraboliques, inter-

médiaire entre la classe elliptique et la classe hyperbolique. Nous ne donnerons pas la définition des équations paraboliques, nous bornant à noter que cette définition implique non seulement les coefficients des dérivées d'ordres supérieurs, mais aussi certains autres coefficients.

§ 7. Méthode de Fourier

Schéma de la méthode de Fourier pour l'équation de Laplace et sa légitimation. Méthode de Fourier pour le système hyperbolique des équations de l'acoustique. Représentation des solutions par une somme d'ondes stationnaires. Récit emprunté au chapitre d'introduction de l'ouvrage de Riemann consacré à l'histoire de la méthode de Fourier. Orthogonalité des vecteurs fonctions propres et calcul des coefficients de Fourier.

Dans ce paragraphe nous nous proposons de décrire l'idée de la méthode de Fourier. Cette méthode très répandue de résolution d'équations aux dérivées partielles n'est malheureusement pas universelle. Il ne s'applique qu'aux équations linéaires d'un type particulier, qui permet de construire pour ces équations une réserve suffisamment riche de solutions particulières. Après quoi, on utilise les combinaisons linéaires de ces solutions particulières pour approcher plus ou moins une solution quelconque.

Considérons, par exemple, l'équation de Laplace $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ dans le cercle $x^2 + y^2 \leqslant R^2$. Il nous sera commode de passer en coordonnées polaires r, φ ($x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$), où cette équation s'écrit

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0,$$

puis de chercher ses solutions particulières sous la forme

$$u(r, \varphi) = A(r)\, B(\varphi).$$

Substituant cette formule dans l'équation, il vient

$$\frac{1}{r}[rA'(r)]'\, B(\varphi) + \frac{A(r)}{r^2} B''(\varphi) = 0$$

et puis

$$\frac{r[rA'(r)]'}{A(r)} = -\frac{B''(\varphi)}{B(\varphi)} = \lambda.$$

Etant donné que dans cette égalité λ doit dépendre, d'une part, seulement de r et, d'autre part, seulement de φ, on déduit qu'il ne dépend ni de l'un, ni de l'autre, c'est-à-dire que λ doit être constant. L'équation

$$-\frac{B''(\varphi)}{B(\varphi)} = \lambda$$

ou

$$B'' + \lambda B(\varphi) = 0$$

a pour solution générale

$$B(\varphi) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda}\varphi) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda}\varphi).$$

Il est évident que $B(\varphi)$ doit être une fonction régulière périodique de période 2π de φ. Il faut et il suffit pour cela que $\sqrt{\lambda}$ soit un nombre entier n, c'est-à-dire que $\lambda = n^2$. (Montrez-le.)

L'équation

$$r[rA'(r)]' - n^2 A(r) = 0$$

pour le facteur $A(r)$ est *l'équation d'Euler*. Sa solution générale (pour $n \neq 0$) est

$$A(r) = c_3 r^n + c_4 r^{-n}.$$

Ainsi, il vient pour les solutions de l'équation de Laplace

$$u(r, \varphi) = A(r) B(\varphi) = (c_3 r^n + c_4 r^{-n})(c_1 \sin n\varphi + c_2 \cos n\varphi).$$

Les solutions particulières

$$u = r^{\pm n} \cos n\varphi, \quad u = r^{\pm n} \sin n\varphi$$

s'obtiennent en particularisant les constantes

$$(c_3 = c_2 = 1,\ c_1 = c_4 = 0), \quad (c_3 = c_1 = 1,\ c_2 = c_4 = 0),$$
$$(c_4 = c_2 = 1,\ c_1 = c_3 = 0), \quad (c_4 = c_1 = 1,\ c_2 = c_3 = 0).$$

Les solutions $r^{-n} \cos n\varphi$, $r^{-n} \sin n\varphi$ présentent une singularité pour $r = 0$, si bien que nous chercherons à nous en passer. Ajoutons encore au choix des solutions particulières $r^n \cos n\varphi$, $r^n \sin n\varphi$ la solution particulière $u = 1$, qui est une solution bornée correspondant à $n = 0$. (En la cherchant sous la forme $u(r, \varphi) = A(r) \cos(0 \cdot \varphi) = A(r)$, on remarque que la solution bornée de l'équation

$$r[rA'(r)]' = 0$$

ne s'obtient de la solution générale $A(r) = c_3 + c_4 \ln r$ que pour $c_4 = 0$.)

La combinaison linéaire des solutions particulières construites

$$u(r, \varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \frac{r^n}{R^n}(a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi)$$

est aussi évidemment solution de l'équation de Laplace.

Il est intéressant de noter que si l'on considère que les constantes

$$a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$$
$$b_1, b_2, b_3, \ldots$$

sont bornées, la combinaison linéaire de l'infinité de termes

$$u(r, \varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{R^n} (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi)$$

est aussi, pour $r < R$, solution de l'équation de Laplace. On peut recopier cette série sous la forme :

$$u(r, \varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} \frac{r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)(a_n - ib_n)}{R^n} =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} \frac{(x+iy)^n}{R^n} (a_n - ib_n).$$

La série

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - ib_n}{R^n} (x + iy)^n = w(x+iy) = w(z)$$

est une série de Taylor de rayon de convergence non inférieur à R. Il en résulte que dans le cercle de convergence la fonction $w(z)$ est analytique, $u = \operatorname{Re} w$ est harmonique.

Si l'on suppose la convergence uniforme de la série

$$u(r, \varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{R^n} (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) \qquad (1)$$

jusqu'à même la frontière du cercle $r = R$, on aura pour les valeurs aux limites $u(R, \varphi) = f(\varphi)$ la représentation par la série de Fourier

$$f(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi). \qquad (2)$$

On sait que les coefficients de Fourier a_k, b_k sont donnés par les formules

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos k\varphi \, d\varphi, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \sin k\varphi \, d\varphi, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \ldots$$

Pour assurer la convergence uniforme des séries (1) et (2) (de la première dans le cercle fermé $r \leqslant R$), il suffit de supposer la continuité des dérivées secondes de $f(\varphi)$. En intégrant par parties, on

peut s'assurer qu'alors

$$a_k = -\frac{1}{\pi k^2}\int_0^{2\pi} f''(\varphi)\cos k\varphi\, d\varphi,$$

$$b_k = -\frac{1}{\pi k^2}\int_0^{2\pi} f''(\varphi)\sin k\varphi\, d\varphi,$$

$$|a_k| \leqslant \frac{\text{const}}{k^2}, \quad |b_k| \leqslant \frac{\text{const}}{k^2}.$$

Ces inégalités assurent la convergence.

Ainsi donc, pour toute fonction suffisamment régulière $f(\varphi)$ donnée sur la frontière du cercle $0 \leqslant r \leqslant R$, la construction suivante de la solution du problème de Dirichlet est légitime :

1°. On calcule les coefficients de Fourier de $f(\varphi)$ d'après les formules

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\cos k\varphi\, d\varphi, \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n,\ \ldots,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\sin k\varphi\, d\varphi, \quad k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,\ \ldots$$

2°. On utilise ces coefficients pour former la « combinaison linéaire »

$$u(r,\ \varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{R^n}(a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{R^n} r^n \cos n\varphi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{R^n} r^n \sin n\varphi$$

des solutions particulières de l'équation de Laplace. Nous avons démontré que la fonction construite $u(r,\ \varphi)$ est, dans le cercle $r \leqslant R$, solution du problème de Dirichlet pour l'équation de Laplace avec les valeurs aux limites $f(\varphi)$, si $f(\varphi)$ est une fonction suffisamment régulière.

Nous allons montrer maintenant que le procédé décrit vaut pour n'importe quelle fonction $f(\varphi)$ continue, non forcément dérivable. Il existe des exemples montrant que la série de Fourier d'une fonction continue peut ne pas converger uniformément vers cette fonction. Malgré cela, nous montrerons que la série obtenue par notre procédé pour la solution du problème de Dirichlet converge vers cette solution uniformément dans tout cercle $r \leqslant R_0 < R$ de rayon R_0 inférieur à R. Au § 2, la solution du problème de Dirichlet dans

un cercle pour une fonction continue quelconque $f(\varphi)$ a été construite à l'aide de la formule de Poisson. Utilisons la formule complexe de cette solution

$$u(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi) =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\,d\alpha + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(\alpha)\,Re^{i\alpha}\,d\alpha}{Re^{i\alpha}-re^{i\varphi}} =$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(\alpha)\,Re^{-i\alpha}\,d\alpha}{Re^{-i\alpha}-re^{-i\varphi}} = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\,d\alpha +$$

$$+\operatorname{Re}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(\alpha)\,Re^{i\alpha}\,d\alpha}{Re^{i\alpha}-re^{i\varphi}} = \operatorname{Re}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left[-\frac{1}{2}+\frac{Re^{i\alpha}}{Re^{i\alpha}-re^{i\varphi}}\right]f(\alpha)\,d\alpha = \operatorname{Re} w$$

et développons l'expression sous le signe d'intégration en série de Taylor des puissances de $\frac{r}{R}$:

$$\left[-\frac{1}{2}+\frac{1}{1-\frac{r}{R}e^{i(\varphi-\alpha)}}\right]f(\alpha) = \frac{1}{2}f(\alpha)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n e^{in(\varphi-\alpha)}f(\alpha)$$

On peut intégrer terme à terme cette série et regrouper les termes :

$$w(x,\ y) = w(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left[-\frac{1}{2}+\frac{Re^{i\alpha}}{Re^{i\alpha}-re^{i\varphi}}\right]f(\alpha)\,d\alpha =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\,d\alpha + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(\cos n\varphi\cos n\alpha +$$

$$+\sin n\varphi\sin n\alpha)f(\alpha)\,d\alpha + i\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(\sin n\varphi\cos n\alpha -$$

$$-\sin n\alpha\cos n\varphi)\,f(\alpha)\,d\alpha = \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n-ib_n}{R^n}r^n(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n =$$

$$= \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n-ib_n}{R^n}(x+iy)^n$$

Par a_n et b_n nous avons désigné les intégrales

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\cos n\alpha\,d\alpha,\quad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\sin n\alpha\,d\alpha,\quad n=1,\ 2,\ \ldots,$$

lesquelles coïncident avec les coefficients de Fourier

Par là, nous avons démontré que, pour toute fonction continue $f(\varphi)$, la formule de la solution du problème de Dirichlet

$$u(x, y) = \operatorname{Re}\left\{\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - ib_n}{R^n}(x+iy)^n\right\}$$

n'est rien d'autre qu'une autre écriture de la formule de Poisson. Par conséquent, la formule (1) est vraie et la méthode de Fourier est légitimée. En séparant la partie imaginaire de la série

$$w = u + iv = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - ib_n}{R^n}(x+iy)^n,$$

on trouve

$$v(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{R^n}(-b_n \cos n\varphi + a_n \sin n\varphi).$$

Nous avons établi la règle de Fourier pour construire une fonction harmonique dans un cercle $u(x, y)$ d'après ses valeurs aux limites continues. Qui plus est, nous avons donné la série pour construire la fonction harmonique $v(x, y)$ conjuguée de $u(x, y)$ par les relations de Cauchy-Riemann

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}. \end{cases}$$

Il résulte de ces relations que la fonction $v(x, y)$ est univoquement déterminée par la donnée de $u(x, y)$ à une constante arbitraire près (v_x, v_y sont univoquement déterminées). Par là, nous avons démontré qu'une fonction w analytique dans le cercle $|x + iy| < R$ peut être reconstituée univoquement d'après les valeurs aux limites continues de sa partie réelle à une constante imaginaire arbitraire près iC. Il est important pour la suite de noter que si la série numérique $\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n| + |b_n|)$ converge, alors w, en tant que somme d'une série uniformément convergente de fonctions continues, sera continue dans le cercle fermé $|x + iy| \leqslant R$. Pour assurer la convergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n| + |b_n|)$, il suffit de supposer la fonction $f(\varphi)$ douée de dérivées secondes continues.

Notons que le raisonnement que nous avons fait donne une démonstration correcte du fait que toute fonction $f(\varphi)$ suffisamment régulière (ayant des dérivées secondes continues) périodique de période 2π peut être représentée par une série de Fourier (2) qui

converge uniformément vers elle, les coefficients de la série vérifiant les inégalités

$$|a_k| < \frac{\text{const}}{k^2}, \quad |b_k| < \frac{\text{const}}{k^2}.$$

Il est facile de voir que cette démonstration, basée sur la théorie de l'intégrale de Poisson, ne s'appuie pas en fait aucunement sur les données relatives aux séries de Fourier, que nous avons utilisées en première analyse des considérations suggestives.

Il est clair que si la fonction $f(z)$ a des dérivées secondes continues et si elle est périodique et de période $2l$, on peut l'écrire au moyen de la série suivante uniformément convergente :

$$f(z) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos \frac{k\pi z}{l} + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \sin \frac{k\pi z}{l}.$$

En effet, ce cas se ramène au précédent si l'on pose

$$z = \frac{l}{\pi} \varphi, \quad \varphi = \frac{2\pi}{2l} z = \frac{\pi z}{l}.$$

La forme de la série de Fourier donnée ici pour $f(z)$ sera utilisée plus bas dans ce paragraphe.

Pour autre exemple de la méthode de Fourier, nous considérerons le problème des vibrations acoustiques d'une couche de gaz d'épaisseur l ($0 \leqslant x \leqslant l$) entre deux plans immobiles. A cet effet, nous chercherons pour le système d'équations de l'acoustique

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{1}{\rho_0} \dfrac{\partial p}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 c_0^2 \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

des solutions satisfaisant aux conditions aux limites $u = 0$ pour $x = 0$, $x = l$. Commençons par chercher des solutions particulières de la forme

$$u = T(t)\, U(x),$$
$$p = T(t)\, P(x).$$

Il résulte des équations de l'acoustique que, si de telles solutions existent, alors T, P, U sont liées par les égalités

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{P'(x)}{U(x)} = \lambda = \text{const},$$
$$\frac{T'(t)}{T(t)} = -\rho_0 c_0^2 \frac{U'(x)}{P(x)} = \hat{\lambda} = \text{const}$$

(λ est, d'une part, fonction de t seul et, d'autre part, de x seul, si bien qu'il ne dépend en fait ni de l'un, ni de l'autre). D'où $T(t) = \text{const} \cdot e^{\lambda t}$, de sorte qu'on doit considérer des solutions particu-

лières de la forme :

$$u = e^{\lambda t} U(x),$$

$$p = e^{\lambda t} P(x).$$

Il est évident que pour $U(x)$ doivent être satisfaites les conditions aux limites $U(0) = U(l) = 0$. En substituant les solutions de la forme indiquée dans le système initial, on obtient pour U et P les équations différentielles

$$\lambda U + \frac{1}{\rho_0} \frac{dP}{dx} = 0,$$

$$\lambda P + \rho_0 c_0^2 \frac{dU}{dx} = 0.$$

La solution générale de ces équations a la forme

$$U = Ae^{\frac{\lambda x}{c_0}} + Be^{-\frac{\lambda x}{c_0}},$$

$$P = -\rho_0 c_0 Ae^{\frac{\lambda x l}{c_0}} + \rho_0 c_0 Be^{-\frac{\lambda x}{c_0}}.$$

Nous déterminerons les constantes A, B à partir des conditions aux limites $U(0) = U(l) = 0$. Ces conditions conduisent au système homogène d'équations linéaires

$$A + B = 0,$$

$$Ae^{\frac{\lambda l}{c_0}} + Be^{-\frac{\lambda l}{c_0}} = 0,$$

dont la solution n'est non nulle que si

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\frac{\lambda l}{c_0}} & e^{-\frac{\lambda l}{c_0}} \end{vmatrix} = e^{-\frac{\lambda l}{c_0}} - e^{\frac{\lambda l}{c_0}} = -2 \operatorname{sh} \frac{\lambda l}{c_0} = 0,$$

c'est-à-dire si $\lambda = \frac{ik\pi c_0}{l}$ (k est entier). Les constantes A, B pour de tels λ sont déterminées à un facteur arbitraire près. On peut poser $A = 1/2$, $B = -1/2$. Alors,

$$U = i \frac{e^{i\frac{k\pi}{l}x} - e^{-i\frac{k\pi}{l}x}}{2i} = i \sin \frac{k\pi}{l} x,$$

$$P = -\rho_0 c_0 \frac{e^{i\frac{k\pi}{l}x} + e^{-i\frac{k\pi}{l}x}}{2} = -\rho_0 c_0 \cos \frac{k\pi}{l} x.$$

Les valeurs du paramètre λ pour lesquelles le problème

$$\lambda U + \frac{1}{\rho_0}\frac{dP}{dx} = 0,$$

$$\lambda P + \rho_0 c_0^2 \frac{dU}{dx} = 0,$$

$$U(0) = U(l) = 0$$

a une solution non triviale sont dites *valeurs propres*, et les solutions correspondantes $U(x)$, $P(x)$ forment le *vecteur fonction propre*. Nous avons établi que les valeurs propres et les fonctions propres sont données par les formules

$$\lambda_k = i\frac{k\pi c_0}{l},$$

$$U_k = i\sin\frac{k\pi}{l}x, \quad P_k = -\rho_0 c_0 \cos\frac{k\pi}{l}x,$$

et nous avons ainsi montré qu'il y a une infinité de solutions particulières

$$u_k = e^{\lambda_k t}U_k(x), \quad p_k = e^{\lambda_k t}P_k(x).$$

Il est clair que toute combinaison linéaire finie

$$u = \sum_k a_k u_k, \quad p = \sum_k a_k p_k,$$

soit

$$\begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} = \sum_k a_k \begin{pmatrix} u_k \\ p_k \end{pmatrix},$$

vérifie également le système

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 c_0^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

et les conditions aux limites $u(0, t) = u(l, t) = 0$.

Pour le système

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 c_0^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0$$

on résout d'ordinaire le problème avec les données initiales

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad p(x, 0) = \psi(x).$$

Nous allons approcher le vecteur fonction $\{\varphi(x), \psi(x)\}$ par des combinaisons linéaires finies

$$\begin{pmatrix}\varphi(x)\\ \psi(x)\end{pmatrix} \approx \sum a_k \begin{pmatrix}U_k(x)\\ P_k(x)\end{pmatrix}.$$

Il est naturel d'espérer que la solution

$$\tilde{u}(x, t) = \sum a_k e^{\lambda_k t} U_k(x),$$
$$\tilde{p}(x, t) = \sum a_k e^{\lambda_k t} P_k(x)$$

approche la solution cherchée $u(x, t)$, $p(x, t)$.

Nous allons à présent nous contenter d'énoncés pas très rigoureux, qui sont nécessaires pour comprendre l'exemple. La théorie exacte sera construite un peu plus loin.

Arrêtons-nous encore sur la circonstance suivante. Considérant un système réel avec des conditions aux limites réelles, nous avons construit pour lui des solutions particulières complexes :

$$u_k = ie^{i\frac{k\pi c_0}{l}t} \sin\frac{k\pi x}{l} = i\cos\frac{k\pi c_0}{l}t \sin\frac{k\pi}{l}x - \sin\frac{k\pi c_0}{l}t \sin\frac{k\pi}{l}x,$$

$$p_k = -\rho_0 c_0 e^{i\frac{k\pi c_0}{l}t} \cos\frac{k\pi}{l}x =$$
$$= -\rho_0 c_0 \left(\cos\frac{k\pi c_0}{l}t \cos\frac{k\pi}{l}x + i\sin\frac{k\pi c_0}{l}t \cos\frac{k\pi}{l}x\right).$$

Il est clair que la combinaison linéaire

$$\sum a_k \begin{pmatrix}u_k\\ p_k\end{pmatrix} = \sum a_k \begin{pmatrix}\frac{u_k+u_{-k}}{2}\\ \frac{p_k+p_{-k}}{2}\end{pmatrix} + \sum i a_k \begin{pmatrix}\frac{u_k-u_{-k}}{2i}\\ \frac{p_k-p_{-k}}{2i}\end{pmatrix}$$

est aussi combinaison linéaire des solutions particulières réelles

$$\begin{cases}\frac{u_k+u_{-k}}{2} = -\sin\frac{k\pi c_0}{l}t \sin\frac{k\pi}{l}x,\\ \frac{p_k+p_{-k}}{2} = -\rho_0 c_0 \cos\frac{k\pi c_0}{l}t \cos\frac{k\pi}{l}x,\end{cases}$$

$$\begin{cases}\frac{u_k-u_{-k}}{2i} = \cos\frac{k\pi c_0}{l}t \sin\frac{k\pi}{l}x,\\ \frac{p_k-p_{-k}}{2i} = -\rho_0 c_0 \sin\frac{k\pi c_0}{l}t \cos\frac{k\pi}{l}x.\end{cases}$$

Inversement, toute combinaison de ces solutions particulières réelles est une combinaison des solutions complexes (u_k, p_k). L'utilisation des solutions complexes est commode pour simplifier les calculs.

Les solutions de la forme

$$\begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} -\sin \frac{k\pi c_0}{l} t \sin \frac{k\pi}{l} x \\ -\rho_0 c_0 \cos \frac{k\pi c_0}{l} t \cos \frac{k\pi}{l} x \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} \cos \frac{k\pi c_0}{l} t \sin \frac{k\pi}{l} x \\ -\rho_0 c_0 \sin \frac{k\pi c_0}{l} t \cos \frac{k\pi}{l} x \end{pmatrix} =$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} \cos \frac{k\pi c_0 (t+\tau)}{l} \sin \frac{k\pi}{l} x \\ -\rho_0 c_0 \sin \frac{k\pi c_0 (t+\tau)}{l} \cos \frac{k\pi}{l} x \end{pmatrix}$$

décrivent les vibrations propres de la couche de gaz comprise entre les plans immobiles $x = 0$, $x = l$, ce qu'on appelle encore parfois des *ondes stationnaires*. Les graphiques de la distribution de la vitesse

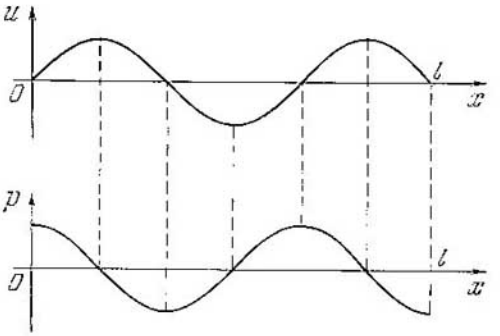

Fig. 24

et de la pression dans une telle onde à un certain instant sont représentés sur la fig. 24. L'appellation « ondes stationnaires » souligne le fait que, pour de telles vibrations, les points où l'amplitude de la vitesse u (ou de la pression p) est nulle (nœuds) ou extremum (ventres) sont fixes. Notons qu'aux « nœuds » de la vitesse l'amplitude de la pression est maximum. Il faut encore indiquer que les vibrations de la pression sont déphasées relativement à celles de u.

Nous allons maintenant légitimer la méthode de Fourier pour le système d'équations de l'acoustique. A savoir, nous allons montrer que la solution de ce système avec les conditions $u(0, t) = u(l, t) = 0$ et pour certaines restrictions complémentaires concernant les

fonctions initiales $u(x, 0)$ et $p(x, 0)$ est représentée par une somme infinie de solutions particulières du système, qui décrivent des ondes stationnaires. La solution générale des équations de l'acoustique a la forme établie au § 5 :

$$u = \frac{f(x - c_0 t) + g(x + c_0 t)}{2},$$

$$p = \rho_0 c_0 \frac{f(x - c_0 t) - g(x + c_0 t)}{2},$$

les fonctions f, g étant déterminées d'après les valeurs initiales $u|_{t=0} = \varphi(x)$; $p|_{t=0} = \psi(x)$ par les formules

$$f(z) = \varphi(z) + \frac{\psi(z)}{\rho_0 c_0}, \quad g(z) = \varphi(z) - \frac{\psi(z)}{\rho_0 c_0}.$$

Ces formules ne déterminent $f(z)$, $g(z)$ que pour $0 \leqslant z \leqslant l$, ce qui permet de construire la solution dans le triangle caractéristique $x - c_0 t \geqslant 0$, $x + c_0 t \leqslant l$.

Pour construire la solution partout dans la bande $0 \leqslant x \leqslant l$ et pour assurer la vérification des conditions aux limites $u = 0$ pour $x = 0$, l, nous aurons recours à l'astuce du prolongement des données initiales sur tout l'axe des x. Nous nous sommes déjà servis d'un procédé semblable lors de la résolution d'un problème d'équation de la chaleur.

Déterminant $f(z)$, $g(z)$ pour $0 \leqslant z \leqslant l$, nous les prolongerons pour tous les z de telle sorte que

$$f(z) = -g(-z), \quad f(l - z) = -g(l + z).$$

On s'assure sans peine que si $f(0) + g(0) = 0$, $f(l) + g(l) = 0$, un tel prolongement est possible et il est unique. En effet, si l'on connaît $f(z)$, $g(z)$ pour $0 \leqslant z \leqslant l$, alors les formules

$$f(-z) = -g(z), \quad -f(z) = g(-z)$$

permettent de déterminer ces fonctions pour $-l \leqslant z \leqslant 0$. L'égalité $f(0) + g(0) = 0$ assure la coïncidence des valeurs pour $z = 0$ avant et après le prolongement.

A présent, nous allons prolonger $f(z)$, $g(z)$ sur toute la droite en fonctions périodiques de période $2l$:

$$f(z + 2l) = f(z),$$

$$g(z + 2l) = g(z).$$

La possibilité d'un tel prolongement continu est assurée par les égalités $f(l) = f(-l)$, $g(l) = g(-l)$, qui se déduisent de la condition $f(l) + g(l) = 0$ et de la construction $f(-l) = -g(l)$, $g(-l) = -f(l)$. Nous supposerons que les fonctions $f(z)$, $g(z)$ prolongées sur tout l'axe des z sont continues et qu'elles ont des dérivées premières et secondes continues.

P r o b l è m e. Vérifier que pour cela les données initiales $u|_{t=0} = \varphi$, $p|_{t=0} = \psi$ doivent avoir des dérivées premières et secondes continues pour $0 \leqslant x \leqslant l$, satisfaisant aux relations suivantes:

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(l) = 0, \quad \varphi''(0) = \varphi''(l) = 0, \quad \psi'(0) = \psi'(l) = 0.$$

A présent, il n'est pas difficile de voir que les formules

$$u = \frac{f(x - c_0 t) + g(x + c_0 t)}{2},$$

$$p = \rho_0 c_0 \frac{f(x - c_0 t) - g(x + c_0 t)}{2}$$

donnent la solution des équations de l'acoustique pour tous les x, t et, notamment, pour tous les x, t de la bande $0 \leqslant x \leqslant l$. Des égalités

$$f(-c_0 t) + g(c_0 t) = 0,$$

$$f(l - c_0 t) + g(l + c_0 t) = 0$$

résulte l'observation des conditions aux limites

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0.$$

On sait que toute fonction périodique suffisamment régulière peut être développée en série de Fourier uniformément convergente:

$$f(z) = \frac{\breve{\alpha}_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \breve{\alpha}_k \cos \frac{k\pi}{l} z + \sum_{k=1}^{\infty} \breve{\beta}_k \sin \frac{k\pi}{l} z,$$

$$g(z) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos \frac{k\pi}{l} z + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \sin \frac{k\pi}{l} z.$$

(Nous avons déjà noté que la démonstration de ce fait découle, en particulier, des considérations du début de ce paragraphe.) La condition $f(z) = -g(-z)$ impose aux coefficients les liens

$$\breve{\alpha}_k = -\alpha_k, \quad \breve{\beta}_k = \beta_k,$$

en vertu desquels

$$f(z) = -\frac{\alpha_0}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos \frac{k\pi}{l} z + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \sin \frac{k\pi}{l} z,$$

$$g(z) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos \frac{k\pi}{l} z + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \sin \frac{k\pi}{l} z.$$

Les coefficients α_k, β_k vérifient les inégalités $|\alpha_k| < \text{const}/k^2$ $|\beta_k| < \text{const}/k^2$, qui résultent de la continuité des dérivées secon-

des f'', g''. Pour la solution

$$u = \frac{f(x-c_0t)+g(x+c_0t)}{2},$$

$$p = \rho_0 c_0 \frac{f(x-c_0t)-g(x+c_0t)}{2}$$

nous sommes conduits à la représentation

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \frac{1}{2}\left[\cos\frac{k\pi}{l}(x+c_0t) - \cos\frac{k\pi}{l}(x-c_0t)\right] + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \frac{1}{2}\left[\sin\frac{k\pi}{l}(x+c_0t) + \sin\frac{k\pi}{l}(x-c_0t)\right],$$

$$p = \frac{\rho_0 c_0}{2}\alpha_0 - \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \frac{\rho_0 c_0}{2}\left[\cos\frac{k\pi}{l}(x+c_0t) + \cos\frac{k\pi}{l}(x-c_0t)\right] + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \frac{\rho_0 c_0}{2}\left[-\sin\frac{k\pi}{l}(x+c_0t) + \sin\frac{k\pi}{l}(x-c_0t)\right]$$

(la permutation des termes effectuée lors de la déduction de cette représentation est légitime en vertu de la convergence uniforme et absolue des séries, qui résulte des inégalités

$$|\alpha_k| < \frac{\text{const}}{k^2}, \quad |\beta_k| < \frac{\text{const}}{k^2}\Big).$$

Par là, nous avons obtenu la représentation de la solution d'après la combinaison des vecteurs fonctions

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ p_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{u}_k \\ \tilde{p}_k \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \cos\frac{k\pi}{l}(x+c_0t) - \cos\frac{k\pi}{l}(x-c_0t) \\ -\rho_0 c_0\left[\cos\frac{k\pi}{l}(x+c_0t) + \cos\frac{k\pi}{l}(x-c_0t)\right] \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} \cos\frac{k\pi c_0}{l}\left(t+\frac{l}{2c_0}\right)\sin\frac{k\pi}{l}x \\ -\rho_0 c_0 \sin\frac{k\pi c_0}{l}\left(t+\frac{l}{2c_0}\right)\cos\frac{k\pi}{l}x \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \overset{\approx}{u}_k \\ \overset{\approx}{p}_k \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sin\frac{k\pi}{l}(x+c_0t) + \sin\frac{k\pi}{l}(x-c_0t) \\ \rho_0 c_0\left[-\sin\frac{k\pi}{l}(x+c_0t) + \sin\frac{k\pi}{l}(x-c_0t)\right] \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} \cos\frac{k\pi c_0}{l}t\sin\frac{k\pi}{l}x \\ -\rho_0 c_0 \sin\frac{k\pi c_0}{l}t\cos\frac{k\pi}{l}x \end{pmatrix},$$

pont chacune est une onde stationnaire.

Nous avons ainsi démontré que toute solution du système d'équations de l'acoustique, qui correspond à des données initiales suffisamment régulières $u(x, 0) = \varphi(x)$, $p(x, 0) = \psi(x)$ telles que

$$\varphi(0) = \varphi''(0) = \psi'(0) = \varphi(l) = \varphi''(l) = \psi'(l) = 0$$

(ce sont les conditions d'accord des données initiales avec les conditions aux limites $u(0, t) = u(l, t) = 0$), peut être développée en série uniformément convergente de solutions particulières — d'ondes stationnaires. La légitimation de la méthode de Fourier pour le problème envisagé est terminée.

A présent, un peu d'historique. La méthode appelée méthode de Fourier a fait son apparition au XVIIIe siècle lors de l'étude de l'équation décrivant les vibrations d'une corde. Cette équation est exactement la même que celle qui s'obtient si l'on élimine du système

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 c_0^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

une des fonctions inconnues (par exemple p). Ainsi nous sommes conduits à l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \tag{3}$$

Dans notre problème $u(x, t)$ satisfait aux conditions aux limites $u(0, t) = u(l, t) = 0$. Ces conditions sont aussi vérifiées par l'élongation d'une corde fixée à ses extrémités. (Au § 5 nous avons obtenu une équation du type (3) en éliminant non pas p, mais u.)

Etudiant l'équation des vibrations d'une corde, d'Alembert, en 1747, a montré que sa solution générale avait la forme

$$u(x, t) = f(x - c_0 t) + g(x + c_0 t).$$

En 1748, Euler a exprimé f, g d'après l'élongation initiale de la corde $u_0(x)$ et d'après sa vitesse initiale $u_1(x)$, ayant déduit la formule

$$u(x, t) = \frac{u_0(x - c_0 t) + u_0(x - c_0 t)}{2} + \frac{1}{2c_0}\int_{x-c_0 t}^{x+c_0 t} u_1(\xi)\, d\xi,$$

qu'on appelle d'ordinaire aujourd'hui *formule de d'Alembert*. Euler a remarqué que, d'après le sens du problème, les données initiales $u_0(x)$, $u_1(x)$ peuvent être prises sous la forme de deux courbes quelconques.

D'Alembert, en 1750, s'est hâté de critiquer cette interprétation élargie de son idée, car il pensait que $u(x, t)$ doit être forcément une fonction analytique de x, t.

En 1753, Daniel Bernoulli, par des considérations tout autres, a déduit que les solutions les plus générales de l'équation de la corde vibrante devaient être de la forme

$$u = \sum_k a_k \sin \frac{k\pi}{l} x \cos \frac{k\pi c_0}{l} (t - t_k),$$

c'est-à-dire des combinaisons linéaires d'ondes stationnaires. Euler n'était pas d'accord sur ce point. Il doutait de la possibilité de représenter une fonction arbitraire par une série trigonométrique.

En 1759, Lagrange, qui n'étudiait plus les vibrations d'une corde, mais qui l'approchait par un fil chargé de perles et passait ensuite à la limite, a confirmé, d'une part, les résultats d'Euler et, d'autre part, des résultats voisins de ceux de Bernoulli. Toujours est-il que les nombreux passages à la limite, qui ne pouvaient pas être réalisés tant soit peu rigoureusement à l'époque, ont permis à d'Alembert de n'être pas d'accord avec l'interprétation donnée par Lagrange à la question.

Ce n'est qu'en 1807 que Fourier a énoncé le théorème sur la représentation d'une fonction absolument arbitraire par une série trigonométrique. Pour étrange que cela soit, Lagrange a résolument protesté contre cela, bien que ses formules coïncidassent presque avec les formules des coefficients de la série trigonométrique de Fourier.

La démonstration du théorème de Fourier a été donnée en 1829 par Dirichlet, qui a imposé à la fonction représentée des conditions assez rigides, qui portent son nom.

En 1853, Riemann, étudiant les conditions dans lesquelles une fonction est représentée par une série trigonométrique, a été conduit, en particulier, à sa définition bien connue de l'intégrale. Le chapitre d'introduction de son ouvrage contient un exposé passionnant de l'histoire de cette question, exposé que j'ai repris ici. Je recommande vivement la lecture de ce chapitre.

Pour conclure ce paragraphe, nous nous arrêterons encore sur une question importante. Pour pouvoir utiliser la méthode de Fourier pour résoudre des problèmes concrets, il faut indiquer la règle de détermination des coefficients a_k (des coefficients de Fourier) dans le développement des données initiales du problème. Nous allons décrire maintenant une telle règle, qui se rapporte à l'exemple de système étudié

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 c_0^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Sur les solutions de ce système avec les conditions aux limites $u(0, t) = u(l, t) = 0$ est observée la loi de conservation de l'éner-

gie :

$$\frac{d}{dt}\left[\int_0^l \frac{\rho_0 u^2(x,t)+\frac{1}{\rho_0 c_0^2}p^2(x,t)}{2}dx\right]=0.$$

Elle résulte directement de l'identité de l'intégrale d'énergie (§ 5). Il se trouve que cette loi a pour conséquence l'orthogonalité des vecteurs fonctions propres par rapport à un produit scalaire lié à la forme quadratique de l'intégrale d'énergie. Il suffit seulement de noter que, nos fonctions propres étant complexes, il faudra préciser ces énoncés, remplacer la forme quadratique de l'intégrale d'énergie par une forme hermitique. L'exposé correct de ces faits relevant de la théorie des problèmes conservatifs, liés aux processus où l'énergie totale est conservée, fera l'objet du chapitre IV. Pour l'instant, nous nous bornerons à indiquer la formule

$$\int_0^l \left[\frac{\rho_0}{2}u_1(x)\,\overline{u_2}(x)+\frac{1}{2\rho_0 c_0^2}p_1(x)\,\overline{p_2}(x)\right]dx$$

pour le produit scalaire (hermitien) des vecteurs fonctions de composantes $(u_1(x),\ p_1(x))$, $(u_2(x),\ p_2(x))$ et nous noterons que les divers vecteurs fonctions

$$U_k = i\sin\frac{k\pi}{l}x, \quad P_k = -\rho_0 c_0\cos\frac{k\pi}{l}x$$

sont effectivement orthogonaux dans ce produit scalaire.

En effet, le produit scalaire de fonctions propres de numéros m, n est donné par la formule

$$\int_0^l \left[\frac{\rho_0}{2}i\sin\frac{m\pi x}{l}(-i)\sin\frac{n\pi x}{l}+\frac{1}{2\rho_0 c_0^2}\left(-\rho_0 c_0\cos\frac{m\pi x}{l}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left(-\rho_0 c_0\cos\frac{n\pi x}{l}\right)\right]dx=\frac{\rho_0}{2}\int_0^l\left[\sin\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}+\right.$$

$$\left.+\cos\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\right]dx=\begin{cases}\frac{\rho_0 l}{2}, & \text{si } m=n,\\ 0, & \text{si } m\neq n.\end{cases}$$

Ainsi que nous l'avons démontré, la solution de notre problème correspondant aux données initiales

$$u(x,0)=\varphi(x), \quad p(x,0)=\psi(x)$$

avec les fonctions $\varphi(x)$, $\psi(x)$ deux fois continûment dérivables satisfaisant aux conditions d'accord

$$\varphi(0)=\varphi(l)=\varphi''(0)=\varphi''(l)=0, \quad \psi'(0)=\psi'(l)=0$$

peut être représentée par la série uniformément convergente

$$\begin{pmatrix} u(x,\ t) \\ p(x,\ t) \end{pmatrix} = \sum_k a_k e^{\lambda_k t} \begin{pmatrix} U_k(x) \\ P_k(x) \end{pmatrix} = a_0 \begin{pmatrix} 0 \\ -\rho_0 c_0 \end{pmatrix} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k e^{i\frac{k\pi c_0}{l} t} \begin{pmatrix} i \sin \frac{k\pi x}{l} \\ -\rho_0 c_0 \cos \frac{k\pi x}{l} \end{pmatrix} + \right.$$

$$\left. + a_{-k} e^{-i\frac{k\pi c_0}{l} t} \begin{pmatrix} -i \sin \frac{k\pi x}{l} \\ -\rho_0 c_0 \cos \frac{k\pi x}{l} \end{pmatrix} \right].$$

Notamment, est uniformément convergente la série qui représente les données initiales:

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x,\ 0) \\ p(x,\ 0) \end{pmatrix} = a_0 \begin{pmatrix} 0 \\ -\rho_0 c_0 \end{pmatrix} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \begin{pmatrix} i \sin \frac{k\pi x}{l} \\ -\rho_0 c_0 \cos \frac{k\pi x}{l} \end{pmatrix} + a_{-k} \begin{pmatrix} -i \sin \frac{k\pi x}{l} \\ -\rho_0 c_0 \cos \frac{k\pi x}{l} \end{pmatrix} \right].$$

L'orthogonalité des fonctions propres nous fournit un outil très pratique pour calculer les coefficients a_k dans le développement du vecteur fonction initial. Pour montrer comment on procède, nous envisagerons l'intégrale

$$\int_0^l \left[\frac{\rho_0}{2} \varphi(x) \overline{U}_n(x) + \frac{1}{2\rho_0 c_0^2} \psi(x) \overline{P}_n(x) \right] dx =$$

$$= a_0 \int_0^l \left[\frac{\rho_0}{2} U_0(x) \overline{U}_n(x) + \frac{1}{2\rho_0 c_0^2} P_0(x) \overline{P}_n(x) \right] dx +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ a_k \int_0^l \left[\frac{\rho_0}{2} U_k \overline{U}_n + \frac{1}{2\rho_0 c_0^2} P_k \overline{P}_n \right] dx + \right.$$

$$\left. + a_{-k} \int_0^l \left[\frac{\rho_0}{2} U_{-k} \overline{U}_n + \frac{1}{2\rho_0 c_0^2} P_{-k} \overline{P}_n \right] dx \right\} = \frac{a_n \rho_0 l}{2}.$$

La convergence uniforme de la série qui représente le vecteur fonction φ, ψ entraîne la légitimité de notre intégration membre à membre.

Ainsi, nous sommes conduits aux formules suivantes pour les coefficients de Fourier dans notre problème

$$a_n = \frac{2}{\rho_0 l} \int_0^l \left[\frac{\rho_0}{2} \varphi(x) \overline{U}_n(x) + \frac{1}{2\rho_0 c_0^2} \psi(x) \overline{P}_n(x) \right] dx =$$

$$= -\frac{i}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx - \frac{1}{c_0 l} \int_0^l \psi(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx.$$

Sur ce, nous terminons notre premier aperçu des idées liées à la méthode de Fourier.

Au chap. IV, nous étudierons dans le détail la théorie de cette méthode dans le cas des systèmes hyperboliques à deux variables indépendantes. Alors, nous nous appuierons essentiellement sur le théorème d'existence des solutions du chapitre II et sur la technique de la transformation de Laplace.

§ 8. Correction

Lien entre les racines de l'équation caractéristique et les propriétés des ondes courtes. Exemple d'Hadamard. Notion de problèmes posés correctement et incorrectement. Problème incorrect pour l'équation de la chaleur. Remarques sur l'objet du cours d'équations de la physique mathématique.

La classification des équations aux dérivées partielles, décrite au § 6 (équations elliptiques, hyperboliques et paraboliques), était liée à la structure des caractéristiques, et cela n'est pas le fait du hasard.

Le fait est que les propriétés de l'équation caractéristique sont intimement liées avec les particularités qualitatives du comportement des solutions. Je vais essayer de faire la lumière sur ce point par des considérations non rigoureuses. Au reste, ces considérations, fréquemment utilisées par les spécialistes en sciences appliquées, se transforment en démonstration avec un peu d'effort. Néanmoins, nous ne ferons pas de telles tentatives.

Envisageons, par exemple, l'équation

$$A(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2B(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + C(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial t} = F(x, t)$$

en un voisinage du point (x_0, t_0) choisi de telle façon que les coefficients A, B, C, ... puissent être considérés, avec un degré de précision raisonnable, comme constants dans ce voisinage. Essayons de trouver pour notre équation des solutions de la forme $u = U[\rho(\xi x + \tau t)]$. Ici ξ, τ sont des constantes choisies une fois pour toutes, et ρ un paramètre. Si l'on prend ρ grand, la formule proposée décrira des ondes très courtes. Substituant cette formule

dans l'équation, il vient

$$(A\tau^2 + 2B\xi\tau + C\xi^2)\, U'' = O\left(\frac{1}{\rho}\right).$$

Faisant croître ρ, on voit que la fonction $U[\rho(\xi x + \tau t)]$ vérifie de plus en plus exactement l'équation, pourvu que les constantes ξ, τ vérifient la condition $A\tau^2 + 2B\xi\tau + C\xi^2 = 0$, c'est-à-dire si le vecteur (ξ, τ) est dirigé suivant la normale à la caractéristique. On pourra prendre pour $u = U[\rho(\xi x + \tau t)]$ n'importe quelle fonction constante le long des droites $\xi x + \tau t = \text{const}$. Ces droites, dans notre voisinage, peuvent être considérées comme coïncidant avec les caractéristiques.

Il est très utile de prendre pour $U(s)$ l'harmonique e^{is}. Il lui correspond des solutions approchées de la forme $u = e^{i\rho(\xi x + \tau t)}$. La partie réelle de ces solutions approchées est constituée par des ondes progressives sinusoïdales, si ξ, τ sont réels.

Si l'on prend une équation aux caractéristiques non réelles, par exemple, l'équation de Laplace $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ $(\xi^2 + \tau^2 = 0)$, la situation change. Parmi les solutions de la forme $e^{i\rho(\xi x + \tau t)} = e^{i\rho\xi x \pm \rho\xi t}$ (qui sont ici des solutions exactes, mais non approchées), il en est dont l'amplitude croît très vite avec t. Cette croissance est d'autant plus rapide que ξ est plus grand — que la longueur d'onde est plus petite. Il en est absolument de même des équations à coefficients variables, étant donné que, « au point de vue des ondes courtes », la variabilité des coefficients est inessentielle. C'est précisément pour cette raison qu'on commence l'étude des équations aux dérivées partielles par un modèle à coefficients constants. Pour ce modèle, il est commode de trouver, en premier lieu, des ondes courtes progressives, de voir si ces ondes croissent et comment elles croissent, et seulement après de construire la théorie rigoureuse.

A titre d'exemple, examinons les équations de l'acoustique

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 c_0^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

et efforçons-nous de lui trouver des solutions de la forme

$$u = Ue^{i(\alpha x + \lambda t)}, \quad p = Pe^{i(\alpha x + \lambda t)}.$$

Substituant les formules de u, p dans les équations et simplifiant par $e^{i(\alpha x + \lambda t)}$, on trouve que λ/α doit être valeur propre de la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\rho_0} \\ \rho_0 c_0^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

et que les coefficients U, P doivent former un vecteur propre de cette matrice. On obtient $\frac{\lambda}{\alpha} = \pm c_0$. Prenons le signe supérieur : $\lambda = c_0\alpha$. Alors $c_0 U + \frac{1}{\rho_0} P = 0$. La solution s'écrit

$$u = -\frac{P}{\rho_0 c_0} e^{i\alpha(x+c_0 t)}, \quad p = P e^{i\alpha(x+c_0 t)}.$$

On peut obtenir les solutions réelles en séparant la partie imaginaire ou la partie réelle. Ecrivons cette dernière :

$$u = -\frac{P}{\rho_0 c_0} \cos[\alpha(x + c_0 t)],$$
$$p = P \cos[\alpha(x + c_0 t)].$$

Les formules déduites montrent que les ondes sonores harmoniques, parmi lesquelles les ondes courtes aussi, se déplacent sans changer d'amplitude au cours du temps.

Venons-en au système elliptique (équations de Cauchy-Riemann) et voyons quel est le caractère des solutions construites d'après ces règles. Nous aurons de nouveau des solutions exactes, étant donné que les équations de Cauchy-Riemann sont à coefficients constants. Nous chercherons les solutions du système

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial u}{\partial x} \end{cases}$$

sous la forme

$$u = U e^{i(\lambda t + \alpha x)}, \quad v = V e^{i(\lambda t + \alpha x)}.$$

Substituant cette forme dans le système, on obtient

$$\lambda^2 + \alpha^2 = 0, \quad V = \frac{\lambda}{\alpha} U.$$

Prenons $\alpha = n$, $\lambda = -in$. Alors

$$u_n = U_n e^{nt - inx}, \quad v_n = -iU_n e^{nt - inx}.$$

Séparant la partie réelle, on trouve les solutions

$$u_n = U_n e^{nt} \cos nx,$$
$$v_n = U_n e^{nt} \sin nx.$$

Nous fixerons la constante U_n par la formule $U_n = e^{-\sqrt{n}}$.

L'exemple de suite de solutions

$$u_n = e^{-\sqrt{n}} e^{nt} \cos nx,$$
$$v_n = e^{-\sqrt{n}} e^{nt} \sin nx$$

a été construit en son temps (1904) par Hadamard, qui a été conduit par son étude à des conclusions très importantes.

Le fait est que la solution (u_n, v_n) satisfait pour $t = 0$ aux données initiales suivantes:

$$u_n(x, 0) = \varphi_n(x) = e^{-\sqrt{n}} \cos nx,$$
$$v_n(x, 0) = \psi_n(x) = e^{-\sqrt{n}} \sin nx.$$

Lorsque $n \to \infty$ ces données initiales s'annulent. Qui plus est, leurs dérivées $\varphi_n^{(k)}(x)$, $\psi_n^{(k)}(x)$ d'ordres $k = 1, 2, \ldots, p$ s'annulent lorsque $n \to \infty$. (Ici p est un nombre naturel arbitraire fixe.) En effet,

$$\left.\begin{aligned} \varphi_n^{(k)}(x) &= \pm n^k e^{-\sqrt{n}} \cos nx \\ \psi_n^{(k)}(x) &= \pm n^k e^{-\sqrt{n}} \sin nx \end{aligned}\right\}, \quad \text{si } k \text{ est pair,}$$

$$\left.\begin{aligned} \varphi_n^{(k)}(x) &= \pm n^k e^{-\sqrt{n}} \sin nx \\ \psi_n^{(k)}(x) &= \pm n^k e^{-\sqrt{n}} \cos nx \end{aligned}\right\}, \quad \text{si } k \text{ est impair.}$$

Par ailleurs, les quantités $u_n(x, t)$, $v_n(x, t)$ sont illimitées quel que soit t.

On voit que, quelle que soit la norme choisie pour évaluer la grandeur des données initiales, on ne saurait affirmer que si la norme est petite il en est de même de la solution (la solution est ici évaluée d'après le maximum de son module). Nous prendrons ici pour normes admissibles pour les données initiales celles qui ont la forme suivante:

$$\| \varphi(x) \|_p = \max_{0 \leqslant k \leqslant p} \sup_x | \varphi^{(k)}(x) |,$$
$$\| \psi(x) \|_p = \max_{0 \leqslant k \leqslant p} \sup_x | \psi^{(k)}(x) |.$$

Hadamard a proposé d'appeler incorrects les problèmes de ce genre.

Un problème est correct s'il est résoluble quelles que soient les données initiales (ou aux limites) appartenant à une certaine classe, s'il a une solution unique et si cette solution dépend continûment des données initiales.

Le problème est incorrect s'il est résoluble non pour des données initiales quelconques, ou bien si sa solution n'est pas unique, ou bien si l'on ne peut choisir des normes pour les solutions et des normes pour les données initiales susceptibles d'assurer la dépendance continue de la solution par rapport aux conditions du problème.

Il est supposé dans ce dernier énoncé qu'on ne peut choisir des normes appartenant à une certaine classe délimitée d'avance mais suffisamment large. En règle générale, on envisage pour telle classe la classe des normes incluant l'évaluation de la fonction et de ses dérivées jusqu'à un certain ordre fixe compris.

L'exemple d'Hadamard prouve que le problème de Cauchy pour les équations de Cauchy-Riemann est incorrect.

Le problème de Dirichlet pour l'équation de Laplace dans le cercle ou les problèmes 1 et 2 pour l'équation de la chaleur sont corrects. Nous avons démontré que ces problèmes sont résolubles, et nous avons aussi démontré les théorèmes d'unicité correspondants. La dépendance continue des solutions par rapport aux conditions aux limites ou aux conditions initiales résulte des principes de maximum correspondants. (Vérifiez-le.)

Nous allons maintenant apporter encore un exemple de problème incorrect. Envisageons la solution de l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

dans le domaine $t < 0$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$ et cherchons à déterminer cette solution d'après les valeurs qu'elle prend à l'instant $t = 0$:

$$u(x, 0) = \varphi(x).$$

Pour $x = 0$, $x = \pi$ on suppose vérifiées les conditions aux limites $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$.

Ce problème est celui de la détermination de l'évolution thermique d'un corps chauffé d'après son état à un instant donné. On établit facilement que ce problème est mal posé en envisageant la suite de solutions

$$u_n(x, t) = e^{-\sqrt{n}} e^{-n^2 t} \sin nx,$$

non bornée quel que soit $t < 0$ et vérifiant les conditions

$$u_n(x, 0) = \psi_n(x) = e^{-\sqrt{n}} \sin nx,$$

exactement comme dans l'exemple d'Hadamard. Hadamard a énoncé un postulat d'après lequel tous les processus de physique mathématique pouvant être décrits rationnellement par des équations différentielles sont liés à des problèmes bien posés.

Nous avons parfois à résoudre des problèmes incorrects lorsque nous voulons obtenir la description d'un certain processus non pas d'après les conditions qui lui donnent naissance, mais d'après certaines de ses conséquences obtenues par des mesures. Par exemple, il en est ainsi lorsqu'on peut trouver la distribution des températures dans un corps pour $t = -T_0 < 0$, connaissant l'état thermique pour $t = 0$.

Depuis Hadamard, les problèmes étudiés en théorie des équations de la physique mathématique sont en général corrects. Nous aussi nous suivrons cette voie.

I. Pétrovski a distingué une classe d'équations pour lesquelles le problème de Cauchy est correct, et a appelé hyperboliques les équations de cette classe. Pour les équations elliptiques, plus pré-

cisément pour une certaine sous-classe naturelle de ces équations, un problème correct typique est le problème de Dirichlet. Dans notre cours nous étudierons des exemples typiques d'équations hyperboliques et le problème de Cauchy pour ces équations. Nous n'envisagerons qu'un exemple d'équation elliptique, l'équation de Laplace. A titre d'exemples de problèmes pour les équations paraboliques ayant des caractéristiques multiples, nous avons déjà considéré plusieurs problèmes pour l'équation de la chaleur.

La notion de problème correct que nous avons introduite ne convient qu'aux équations décrivant les processus contenant un nombre infini de degrés de liberté. Nous allons essayer d'expliquer cette assertion par des exemples.

Commençons par le système fini suivant d'équations différentielles :

$$\frac{dy_1}{dt} = 1 \cdot y_1,$$

$$\frac{dy_2}{dt} = 2 \cdot y_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{dy_N}{dt} = N \cdot y_N.$$

Sa solution $y_k = y_{k_0} e^{kt}$ dans tout intervalle temporel fini $0 \leqslant t \leqslant T$ dépend continûment des données initiales $y_{1_0}, y_{2_0}, \ldots, y_{N_0}$. En effet, si l'on note

$$\| y \| = \max (| y_1 |, | y_2 |, \ldots, | y_N |),$$

il vient

$$\| y(t) \| \leqslant e^{NT} \| y(0) \|.$$

Cette inégalité montre précisément la dépendance continue des solutions par rapport aux données initiales (du fait de la linéarité du système et de la finitude de N, qui entraîne, en retour, que e^{Nt} est borné).

Il en va autrement du cas du système d'ordre infini

$$\frac{dy_1}{dt} = 1 \cdot y_1,$$

$$\frac{dy_2}{dt} = 2 \cdot y_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{dy_n}{dt} = n \cdot y_n,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

Parmi les solutions de ce système il en est qui croissent arbitrairement vite (y_n croît comme $e^{n^2 t}$), si bien qu'on ne saurait avoir de dépendance continue par rapport aux données initiales dans aucun intervalle de temps $0 \leqslant t \leqslant T$, si petit que soit T.

Toutefois, il y aura stabilité si l'on pose $\| y \| = \sup_k \| y_k \|$ et si l'on prend pour définition de la norme des données initiales $\| y_0 \|_T = \sup_k (| y_{k_0} | e^{kT})$. En effet, on a l'inégalité $\| y \| \leqslant \| y_0 \|_T$ (pour $0 \leqslant t \leqslant T$). La question de savoir si ce système infini d'équations différentielles est correct a été ramenée à celle de savoir si les normes ici introduites sont considérées par nous comme admissibles.

Arrêtons-nous sur l analogie entre l'exemple d'Hadamard et les exemples d'équations différentielles qui viennent d'être examinées.

On pourrait montrer correctement, chose que nous ne ferons pas maintenant, que chaque solution des équations de Cauchy-Riemann périodique par rapport à x avec la période 2π et partout définie dans une bande $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ peut s'écrire dans cette bande sous la forme

$$u = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y_n(t) \cos nx - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} z_n(t) \sin nx,$$

$$v = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n(t) \sin nx + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} z_n(t) \cos nx.$$

Dans cette représentation les séries peuvent être dérivées terme à terme et chacun des termes

$$u_n(x, t) = y_n(t) \cos nx \quad (u_n = -z_n \sin nx),$$
$$v_n(x, t) = y_n(t) \sin nx \quad (v_n = z_n \cos nx)$$

est lui-même solution du système de Cauchy-Riemann. Nous omettrons la démonstration de ces faits. Nous nous bornerons à l'examen de solutions pour lesquelles tous les $z_n(t) = 0$. Substituant

$$u_n(x, t) = y_n(t) \cos nx,$$

$$v_n(x, t) = y_n(t) \sin nx$$

dans les équations de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} = \frac{\partial v_n}{\partial x}, \quad \frac{\partial v_n}{\partial t} = -\frac{\partial u_n}{\partial x},$$

on obtient pour les $y_n(t)$ les équations différentielles

$$\frac{dy_n}{dt} = n y_n \quad (n = \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

de solutions

$$y_n = \text{const} \cdot e^{nt}.$$

Ce système d'équations différentielles est précisément du type envisagé dans l'exemple précédent. Les solutions particulières

utilisées dans l'exemple d'Hadamard ont la forme

$$u_n = e^{-\sqrt{n}} e^{nt} \cos nx,$$

$$v_n = e^{-\sqrt{n}} e^{nt} \sin nx.$$

Il leur correspond la solution suivante des équations différentielles

$$\ldots\ y_{-3} = 0,\quad y_{-2} = 0,\quad y_{-1} = 0,\ y_0 = 0,\ \ldots,\ y_{n-1} = 0,$$

$$y_n = e^{-\sqrt{n}} e^{nt},\quad y_{n+1} = 0,\ \ldots$$

Il nous semble que cette analogie entre équations aux dérivées partielles et systèmes infinis d'équations différentielles peut être utile lorsqu'on pense au contenu attribué à la notion de « correction ».

Sur ce, nous terminons notre aperçu général du sujet pour passer au chapitre suivant à l'étude des équations hyperboliques, qui constituent l'une des classes les plus importantes des équations de la physique mathématique.

CHAPITRE II

ÉQUATIONS HYPERBOLIQUES

§ 9. Intégrale d'énergie

Réduction à la forme canonique au voisinage d'un point d'un système hyperbolique à deux variables indépendantes. Invariants de Riemann. Ces invariants ne sont pas univoquement déterminés. La forme canonique est un cas particulier d'un système symétrique au sens de Friedrichs. Identité de l'« intégrale d'énergie » pour les solutions régulières des systèmes t-hyperboliques symétriques. Exemple: la loi de conservation de l'énergie pour les équations de l'acoustique. Lemme relatif à une inégalité intégrale.

Le système de n équations

$$\frac{\partial u}{\partial t} + C\frac{\partial u}{\partial x} + Du = f$$

pour n fonctions inconnues $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ *de matrices* $C = \| c_{ik} \| = \| c_{ik}(x, t) \|$, $D = \| d_{ik} \| = \| d_{ik}(x, t) \|$ *est dit hyperbolique si toutes les racines de l'équation caractéristique* $\det \| C - kE \| = 0$ (*E est la matrice unité*) *sont réelles et distinctes.*

Nous nous proposons de montrer comment on peut réduire ce système à une certaine forme canonique particulière. Considérons le vecteur propre z de la matrice C, correspondant à la valeur propre k_1. Il vérifie le système d'équations

$$(C - k_1 E)\, z = 0.$$

Soient les éléments $c_{ik}(x, t)$ de C des fonctions régulières des coordonnées et k_1 une racine simple de l'équation caractéristique. Le vecteur propre $z(x, t)$ est alors déterminé à un facteur arbitraire près, fonction de x et de t. Montrons qu'il est loisible de supposer que le vecteur $z(x, t)$ a des composantes régulières.

Commençons par étudier la régularité de la racine $k_1(x, t)$ du polynôme caractéristique

$$\det \| C - kE \| = (-1)^n [k^n + p_1(x, t)k^{n-1} + p_2(x, t)k^{n-2} + \ldots + p_n(x, t)] = P(k, x, t).$$

Ses coefficients $p_1(x, t)$, $p_2(x, t)$, $\ldots$, $p_n(x, t)$, étant des polynômes des éléments $c_{ik}(x, t)$, sont réguliers. Prenons un certain

point (x_0, t_0). La racine k_1 est simple, si bien que

$$\frac{\partial P(k_1, x_0, t_0)}{\partial k} \neq 0.$$

En vertu du théorème sur les fonctions implicites, il existe un voisinage du point (x_0, t_0) où est univoquement déterminée la fonction continue $k = k_1(x, t)$ satisfaisant aux conditions

$$P(k, x, t) = 0,$$

$$k(x_0, t_0) = k_1(x_0, t_0).$$

Cette fonction a le même degré de régularité que les coefficients $p_i(x, t)$, c'est-à-dire la régularité des éléments de la matrice C. En particulier, les dérivées $\frac{\partial k}{\partial x}, \frac{\partial k}{\partial t}$ se calculent d'après les formules

$$\frac{\partial k}{\partial x} = -\frac{P_x(k, x, t)}{P_k(k, x, t)}, \quad \frac{\partial k}{\partial t} = -\frac{P_t(k, x, t)}{P_k(k, x, t)}.$$

On peut écrire de façon analogue les formules pour les dérivées d'ordres supérieurs.

Le point (x_0, t_0) pouvant être pris arbitrairement, et k_1 désignant n'importe quelle racine de l'équation caractéristique, nous avons démontré le

Lemme. *Si, dans un certain domaine G du plan x, t, tous les éléments de C sont des fonctions régulières des coordonnées, et si toutes ses racines caractéristiques sont simples dans ce domaine, ces racines sont des fonctions régulières de x, t.*

A présent, nous nous proposons de construire un vecteur propre régulier z de la matrice $C - kE$. Nous ferons sa construction dans un certain voisinage d'un point arbitraire (x_0, t_0).

Au point (x_0, t_0) le rang de la matrice $C - kE$ est égal à $n - 1$. Par conséquent, il existe un mineur de cette matrice, obtenu en biffant une ligne (la r-ième) et une colonne (la q-ième), tel que son déterminant est non nul au point (x_0, t_0). Par raison de continuité, ce déterminant est non nul dans un voisinage de ce point. Ce voisinage seul sera considéré. Pour déterminer le vecteur $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$, posons $z_q = 1$ et envisageons toutes les équations du système $(C - kE)z = 0$, excepté la r-ième. Si le vecteur z vérifie ces $n - 1$ équations, il vérifie aussi la r-ième, qui dépend linéairement d'elles.

Pour les $n - 1$ inconnues $z_1, z_2, \ldots, z_{q-1}, z_{q+1}, \ldots, z_n$ on a un système de $n - 1$ équations de déterminant non nul. Ce système peut être résolu au moyen des formules de Cramer. Ces formules montrent aussitôt que toutes les composantes $z_1(x, t), z_2(x, t), \ldots,$

$$\ldots, z_{q-1}(x, t), z_q(x, t) = 1, z_{q+1}(x, t), \ldots, z_n(x, t)$$

seront dans ce voisinage des fonctions régulières de x, t. Il est clair que si on multiplie tous les $z_i(x, t)$ par une seule et même fonction régulière $\rho(x, t) \neq 0$, on obtient de nouveau un vecteur propre régulier. Notamment, par ce procédé on peut faire de sorte que les composantes $z_i(x, t)$ du vecteur propre soient normalisées par la condition $\sum_{i=1}^{n} z_i^2(x, t) = 1$. Le vecteur propre ainsi normalisé est univoquement déterminé au signe près. Mais ce signe nous empêche de nous servir du théorème de Bolzano-Weierstrass pour choisir un recouvrement fini de voisinages du sous-domaine fermé arbitraire et, raccordant en leurs intersections les signes des $z_i(x, t)$, construire un vecteur propre fonction régulière dans tout un sous-domaine fermé. Une telle construction peut se faire effectivement dans le cas d'un domaine simplement connexe. Dans un domaine doublement connexe elle peut être impossible.

Nous n'insisterons pas sur ce point et nous nous bornerons à construire un vecteur propre régulier seulement dans un certain voisinage de (x_0, t_0). Construisant de tels voisinages pour tous les vecteurs propres, puis prenant leurs intersections, on peut affirmer qu'il existe un voisinage de (x_0, t_0) où les éléments de la matrice

$$Z = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & \dots & z_{1n} \\ z_{21} & z_{22} & \dots & z_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_{n1} & z_{n2} & \dots & z_{nn} \end{pmatrix}$$

sont des fonctions régulières de x, t. Nous avons formé les colonnes de cette matrice avec les vecteurs propres, de sorte que

$$C \begin{pmatrix} z_{1p} \\ z_{2p} \\ \dots \\ z_{np} \end{pmatrix} = k_p \begin{pmatrix} z_{1p} \\ z_{2p} \\ \dots \\ z_{np} \end{pmatrix}.$$

En d'autres termes, on a l'identité

$$CZ \begin{pmatrix} k_1 z_{11} & k_2 z_{12} & \dots & k_n z_{1n} \\ k_1 z_{21} & k_2 z_{22} & \dots & k_n z_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_1 z_{1n} & k_2 z_{2n} & \dots & k_n z_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & \dots & z_{1n} \\ z_{12} & z_{22} & \dots & z_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_{n1} & z_{n2} & \dots & z_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 & & & 0 \\ & k_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & k_n \end{pmatrix} = ZK.$$

La matrice Z, qui est constituée par des vecteurs propres linéairement indépendants correspondant à des valeurs propres différentes, est non dégénérée. Aussi peut-on écrire

$$Z^{-1}CZ = K.$$

Cette égalité signifie qu'une telle transformation avec la matrice Z réduit C à la forme diagonale K. Ce fait est connu en algèbre linéaire. Nous avons fait sa déduction en détail pour montrer qu'il était possible de prendre Z régulière pour le moins dans un certain voisinage.

Nous allons montrer maintenant que si dans un certain domaine il existe une matrice régulière Z telle que $Z^{-1}CZ = K$, dans ce domaine le système hyperbolique

$$\frac{\partial u}{\partial t} + C\frac{\partial u}{\partial x} + Du = f$$

peut être réduit à une certaine forme canonique.

Faisant la substitution $u = Zv$, écrivons notre système comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial t}(Zv) + C\frac{\partial}{\partial x}(Zv) + D(Zv) = f.$$

Dérivons :

$$Z\frac{\partial v}{\partial t} + CZ\frac{\partial v}{\partial x} + \left(DZ + \frac{\partial}{\partial t}Z + C\frac{\partial}{\partial x}Z\right)v = f$$

et multiplions le système à gauche par Z^{-1}

$$\frac{\partial v}{\partial t} + Z^{-1}CZ\frac{\partial v}{\partial x} + Z^{-1}\left(DZ + \frac{\partial}{\partial t}Z + C\frac{\partial}{\partial x}Z\right)v = Z^{-1}f.$$

Utilisant l'identité $Z^{-1}CZ = K$ et introduisant les notations

$$Z^{-1}\left(DZ + \frac{\partial}{\partial t}Z + C\frac{\partial}{\partial x}Z\right) = M, \quad Z^{-1}f = g,$$

on est conduit à un système de la forme suivante, dite canonique :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + K\frac{\partial v}{\partial x} + Mv = g.$$

Voici un exemple de système du second ordre sous forme canonique

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + k_1(x, t)\frac{\partial v_1}{\partial x} + m_{11}(x, t)v_1 + m_{12}(x, t)v_2 = g_1(x, t),$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial t} + k_2(x, t)\frac{\partial v_2}{\partial x} + m_{21}(x, t)v_1 + m_{22}(x, t)v_2 = g_2(x, t).$$

Les composantes $v_i(x, t)$ du vecteur fonction $v(x, t)$ cherché, le système étant pris sous forme canonique, sont dites les *invariants de Riemann*. La matrice Z qui met le système sous la forme canoni-

que étant non univoquement déterminée, il en est de même des invariants de Riemann, qui sont non univoquement déterminés. Par la suite il sera commode de mettre à profit cette non-univocité.

On dit parfois que le système $\frac{\partial u}{\partial t} + C\frac{\partial u}{\partial x} + Du = f$ est *hyperbolique* s'il existe une matrice régulière Z réduisant ce système à la forme canonique décrite ci-dessus. Alors, il n'est pas du tout nécessaire d'exiger la simplicité des racines caractéristiques. Cette simplicité nous était nécessaire pour construire la matrice $Z(x, t)$ régulière. Si la forme canonique a été obtenue, la construction de la théorie ultérieure n'exige aucunement la simplicité.

Exemple. Le système d'équations de Maxwell

$$\frac{\mu}{c_0}\frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x}, \quad \frac{\varepsilon}{c_0}\frac{\partial H_y}{\partial t} = -\frac{\partial H_z}{\partial x},$$

$$\frac{\mu}{c_0}\frac{\partial H_z}{\partial t} = -\frac{\partial E_y}{\partial x}, \quad \frac{\varepsilon}{c_0}\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial H_y}{\partial x}$$

a des racines caractéristiques doubles, mais cela n'empêche pas de le réduire à la forme canonique (cf. § 5 chap. I)

$$\frac{\partial(\sqrt{\mu}H_y + \sqrt{\varepsilon}E_z)}{\partial t} - \frac{c_0}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\frac{\partial(\sqrt{\mu}H_y + \sqrt{\varepsilon}E_z)}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial(\sqrt{\mu}H_z - \sqrt{\varepsilon}E_y)}{\partial t} - \frac{c_0}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\frac{\partial(\sqrt{\mu}H_z - \sqrt{\varepsilon}E_y)}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial(\sqrt{\mu}H_y - \sqrt{\varepsilon}E_z)}{\partial t} + \frac{c_0}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\frac{\partial(\sqrt{\mu}H_y - \sqrt{\varepsilon}E_z)}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial(\sqrt{\mu}H_z + \sqrt{\varepsilon}E_y)}{\partial t} + \frac{c_0}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\frac{\partial(\sqrt{\mu}H_z + \sqrt{\varepsilon}E_y)}{\partial x} = 0.$$

Les paragraphes suivants seront consacrés à l'étude minutieuse d'une classe importante de systèmes hyperboliques, savoir les systèmes symétriques t-hyperboliques (au sens de Friedrichs). Rappelons la définition qu'on en a donnée au § 6 chap. I pour le cas de trois variables indépendantes x, y, t. Le système d'équations

$$A(x, y, t)\frac{\partial u}{\partial t} + B(x, y, t)\frac{\partial u}{\partial x} + C(x, y, t)\frac{\partial u}{\partial y} = f(x, y, t, u)$$

est dit *symétrique t-hyperbolique* si les matrices A, B, C sont symétriques et si la matrice A est définie positive.

On voit que dans le cas de deux variables indépendantes un système hyperbolique réduit à la forme canonique

$$E\frac{\partial v}{\partial t} + K\frac{\partial v}{\partial x} + Mv = f$$

est symétrique t-hyperbolique, étant donné que la matrice diagonale K est symétrique et que la matrice unité E est définie positive. Dans le cas où l'on a plus de deux variables indépendantes, un système arbitraire strictement hyperbolique (à racines caractéristiques simples) ne peut, en générale, être réduit à la forme symétrique au sens de Friedrichs.

Nous allons établir maintenant pour les systèmes symétriques t-hyperboliques une identité très importante dite *intégrale d'énergie*. Elle est appelée à jouer un rôle fondamental dans la construction de la théorie tout entière des systèmes symétriques.

Bornons-nous à des systèmes linéaires de la forme

$$A\frac{\partial u}{\partial t}+B\frac{\partial u}{\partial x}+C\frac{\partial u}{\partial y}+Qu=f,$$

où (159)

$$A=A(x, y, t),\quad B=B(x, y, t),\quad C=C(x, y, t),$$
$$Q=Q(x, y, t),\quad f=f(x, y, t),$$

et

$$A=A^*,\quad B=B^*,\quad C=C^*.$$

La matrice Q n'est pas supposée symétrique. Multiplions le système scalairement par $2u$

$$2\left(A\frac{\partial u}{\partial t}, u\right)+2\left(B\frac{\partial u}{\partial x}, u\right)+2\left(C\frac{\partial u}{\partial y}, u\right)+2(Qu, u)=2(f, u).$$

Transformons les différents termes de l'égalité obtenue (en utilisant le fait que $A=A^*$, $B=B^*$, $C=C^*$):

$$2\left(A\frac{\partial u}{\partial t}, u\right)=\left(A\frac{\partial u}{\partial t}, u\right)+\left(A\frac{\partial u}{\partial t}, u\right)=\left(A\frac{\partial u}{\partial t}, u\right)+$$
$$+\left(\frac{\partial u}{\partial t}, A^*u\right)=\left(A\frac{\partial u}{\partial t}, u\right)+\left(\frac{\partial u}{\partial t}, Au\right)=\left(A\frac{\partial u}{\partial t}, u\right)+$$
$$+\left(Au, \frac{\partial u}{\partial t}\right)=\left(\frac{\partial}{\partial t}[Au], u\right)-\left(\left[\frac{\partial}{\partial t}A\right]u, u\right)+$$
$$+\left(Au, \frac{\partial u}{\partial t}\right)=\frac{\partial}{\partial t}(Au, u)-\left(\left[\frac{\partial}{\partial t}A\right]u, u\right).$$

De même

$$2\left(B\frac{\partial u}{\partial x}, u\right)=\frac{\partial}{\partial x}(Bu, u)-\left(\left[\frac{\partial}{\partial x}B\right]u, u\right).$$
$$2\left(C\frac{\partial u}{\partial y}, u\right)=\frac{\partial}{\partial y}(Cu, u)-\left(\left[\frac{\partial}{\partial y}C\right]u, u\right).$$

En outre

$$2(Qu, u)=(Qu, u)+(u, Q^*u)=([Q+Q^*]u, u).$$

Une fois toutes ces transformations faites, on peut écrire

$$\frac{\partial}{\partial t}(Au, u)+\frac{\partial}{\partial x}(Bu, u)+\frac{\partial}{\partial y}(Cu, u)=(Du, u)+2(f, u).$$

Ici

$$D=\frac{\partial}{\partial t}A+\frac{\partial}{\partial x}B+\frac{\partial}{\partial y}C-(Q+Q^*)=D(x,\ y,\ t).$$

Cette dernière égalité montre quelle doit être la régularité de A, B, C, Q pour que D possède telle régularité déterminée.

Considérons un domaine quelconque G intérieur au domaine d'existence de la solution u, ce domaine étant délimité par une surface S régulière par morceaux. Intégrons notre identité dans le domaine G

$$\iiint\limits_G\left[\frac{\partial}{\partial t}(Au,\ u)+\frac{\partial}{\partial x}(Bu,\ u)+\frac{\partial}{\partial y}(Cu,\ u)\right]dx\,dy\,dt=$$

$$=\iiint\limits_G[(Du,\ u)+2(f,\ u)]\,dx\,dy\,dt.$$

L'intégrale du premier membre, en tant qu'intégrale d'une divergence, peut être transformée en intégrale de surface d'après le théorème de Gauss-Ostrogradsky. Nous désignerons par $(\tau,\ \xi,\ \eta)$ la normale unité extérieure de S. On a

$$\iint\limits_S[\tau(Au,\ u)+\xi(Bu,\ u)+\eta(Cu,\ u)]\,ds=$$

$$=\iiint\limits_G[(Du,\ u)+2(f,\ u)]\,dx\,dy\,dt.$$

L'identité intégrale

$$\iint\limits_S([\tau A+\xi B+\eta C]u,\ u)\,ds=\iiint\limits_G[(Du,\ u)+2(f,\ u)]\,dx\,dy\,dt$$

est dite intégrale d'énergie du système symétrique.

Si l'on prend pour exemple le système d'équations décrivant les propagations d'ondes sonores (cf. § 6) de matrices

$$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{\rho_0 c_0^2} & 0 & 0\\ 0 & \rho_0 & 0\\ 0 & 0 & \rho_0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

(la matrice Q et le vecteur f sont nuls), on obtient l'identité

$$\iint\limits_S\left[\tau\left(\frac{p^2}{\rho_0 c_0^2}+\rho_0 u^2+\rho_0 v^2\right)+\xi 2pu+\eta 2pv\right]ds=0,$$

qui exprime (après division par 2) la loi de conservation de l'énergie pour les ondes sonores. Dans le cas de deux variables x, t nous nous

sommes déjà servis d'une telle loi au § 5 lors de la démonstration du théorème d'unicité.

L'intégrale d'énergie déduite servira au paragraphe suivant pour démontrer l'unicité de la solution du problème de Cauchy dans le cas d'un système hyperbolique arbitraire. En attendant, nous terminerons ce paragraphe en démontrant un lemme auxiliaire qui nous servira à maintes reprises par la suite.

Lemme relatif à une inégalité intégrale. *Soit pour* $0 \leqslant t \leqslant T$ *une fonction* $I(t) \geqslant 0$ *continue et dérivable. Si cette fonction* $I(t)$ *vérifie, quels que soient* $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant T$, *l'inégalité*

$$I(t_2) \leqslant I(t_1) + M \int_{t_1}^{t_2} I(t)\,dt + N \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{I(t)}\,dt \qquad (M > 0,\ N \geqslant 0),$$

alors

$$\sqrt{I(t)} \leqslant \sqrt{I(0)}\, e^{\frac{M}{2}t} + \frac{N}{M}\left(e^{\frac{M}{2}t} - 1\right). \tag{1}$$

Démonstration. Par hypothèse, on a pour $t_1 < t_2$ l'inégalité

$$\frac{I(t_2) - I(t_1)}{t_2 - t_1} \leqslant \frac{\int_{t_1}^{t_2} (MI + N\sqrt{I})\,dt}{t_2 - t_1} = MI(t^*) + N\sqrt{I(t^*)}.$$

Nous nous sommes servis ici du théorème de la moyenne, qui nous a permis de choisir t^* ($t_1 \leqslant t^* \leqslant t_2$). En réduisant $[t_1, t_2]$ au point intérieur t de l'intervalle et en utilisant la dérivabilité de $I(t)$ on obtient

$$\frac{dI}{dt} \leqslant MI(t) + N\sqrt{I(t)}. \tag{2}$$

Si, pour la valeur $\hat{t}$ choisie, $I(\hat{t}) = 0$, l'observation de l'inégalité (1) au point $\hat{t}$ est évidente. Soit à présent $I(\hat{t}) > 0$. Désignons par t_1 ou bien la plus grande des valeurs de t pour lesquelles $I(t) = 0$ et $t < \hat{t}$, ou bien (si $I(t) > 0$ pour tous les $t < \hat{t}$) le point $t = 0$. Sur l'intervalle $(t_1, \hat{t})$ la fonction $I(t)$ est positive. Divisons les deux membres de l'inégalité (2) par $2\sqrt{I(t)}$. On a

$$\frac{d\sqrt{I(t)}}{dt} \leqslant \frac{M}{2}\sqrt{I(t)} + \frac{N}{2},$$

$$\frac{d\sqrt{I(t)}}{dt} - \frac{M}{2}\sqrt{I(t)} \leqslant \frac{N}{2}.$$

Multiplions les deux membres de la dernière inégalité par $e^{-\frac{M}{2}t}$:

$$\frac{d\left[e^{-\frac{M}{2}t}\sqrt{I(t)}\right]}{dt} \leqslant \frac{N}{2}e^{-\frac{M}{2}t}.$$

Intégrons cette inégalité de t_1 à t

$$e^{-\frac{M}{2}\hat{t}}\sqrt{I(\hat{t})}-e^{-\frac{M}{2}t_1}\sqrt{I(t_1)}\leqslant\frac{N}{M}\left[e^{-\frac{M}{2}t_1}-e^{-\frac{M}{2}\hat{t}}\right].$$

Par conséquent

$$\sqrt{I(\hat{t})}\leqslant\sqrt{I(t_1)}\,e^{\frac{M}{2}(\hat{t}-t_1)}+\frac{N}{M}\left[e^{\frac{M}{2}(\hat{t}-t_1)}-1\right].$$

Comme $\hat{t}-t_1\leqslant\hat{t}$, et que $I(t_1)$ est soit égale à $I(0)$, soit nulle, l'inégalité intégrale (1) est démontrée.

§ 10. Théorème d'unicité et évaluations des solutions des systèmes hyperboliques

Utilisation de l'intégrale d'énergie pour évaluer les solutions des systèmes hyperboliques symétriques. Les évaluations sont faites dans un domaine du demi-espace $t \geqslant 0$ délimité supérieurement par la surface d'une « calotte » dont on sait que sur elle l'intégrale d'énergie est non négative. La vérification de cette condition n'est pas explicitée ici. Théorème d'unicité pour les domaines envisagés. Déduction d'évaluations pour les dérivées par application de la technique étudiée aux systèmes élargis comprenant les équations pour les dérivées qu'on se propose d'évaluer. Méthode particulière d'élargissement en incluant seulement les équations pour les dérivées par rapport à t.

Nous abordons l'étude du théorème d'unicité et du théorème de dépendance continue des solutions par rapport aux données initiales pour les systèmes hyperboliques symétriques. Chemin faisant, nous obtiendrons certaines évaluations importantes pour les solutions et pour leurs dérivées. Tous ces théorèmes et évaluations se déduisent de l'étude des intégrales d'énergie à l'aide de l'inégalité intégrale démontrée à la fin du paragraphe précédent. La démonstration faite ici suppose la non-négativité de certaines intégrales de surface. Comme nous ne nous occuperons pas ici de ces intégrales, toutes nos déductions auront un caractère conventionnel. Les conditions de non-négativité de ces intégrales seront étudiées aux paragraphes suivants. Leur étude est liée à des idées majeures.

Etudiant le système hyperbolique symétrique

$$A\frac{\partial u}{\partial t}+B\frac{\partial u}{\partial x}+C\frac{\partial u}{\partial y}+Qu=f,$$

nous avons établi au paragraphe précédent pour ses solutions régulières une identité intégrale, qui a été dénommée « intégrale d'énergie » :

$$\int\!\!\int_S([\tau A+\xi B+\eta C]\,u,\,u)\,ds=\int\!\!\int_G\int[(Du,\,u)+2(f,\,u)]\,dt\,dx\,dy.$$

Dans cette identité la surface S délimite un domaine G dans l'espace $(t,\,x,\,y)$, le vecteur $(\tau,\,\xi,\,\eta)$ est la normale unité extérieure de

cette surface. La matrice D est définie par l'égalité

$$D=\frac{\partial}{\partial t}A+\frac{\partial}{\partial x}B+\frac{\partial}{\partial y}C-(Q+Q^*).$$

Soit un domaine délimité par une surface qui se décompose en deux parties. La première de ces parties est un morceau fini du plan $t=0$, la seconde est en quelque sorte une « calotte » qui s'appuie sur la frontière de la première et qui est située dans le demi-espace $t>0$. Cette calotte est représentée sur la fig. 25.

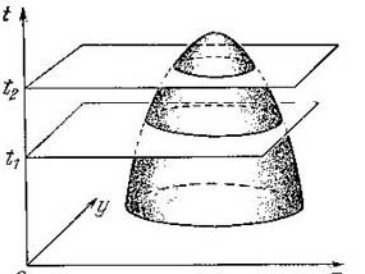

Fig. 25

Nous supposerons que partout sur la surface de la calotte la forme quadratique $(|\tau A+\xi B+\eta C|\,u,\,u)$ est non négative. Nous n'expliciterons pas ici les conditions dans lesquelles cette hypothèse est vérifiée. Menons les sections $t=t_1$, $t=t_2\,(t_2>t_1)$ et considérons le domaine G délimité par ces sections et par la surface de la calotte. Sur la section $t=t_2$ la normale extérieure $(\tau,\,\xi,\,\eta)$ a pour coordonnées $(1,\,0,\,0)$, et sur la section $t=t_1$ ses coordonnées sont $(-1,\,0,\,0)$. Omettant dans l'identité de l'intégrale d'énergie l'intégrale non négative sur la surface latérale et remplaçant l'intégrale triple dans le domaine G par une intégrale répétée, on obtient l'inégalité

$$\iint\limits_{t=t_2}(Au,\,u)\,dx\,dy\leqslant\iint\limits_{t=t_1}(Au,\,u)\,dx\,dy+$$

$$+\int\limits_{t_1}^{t_2}\Big\{\iint\limits_{t=\text{const}}[\,|(Du,\,u)|+2\,|(f,\,u)|\,]\,dx\,dy\Big\}\,dt.$$

Ici toutes les intégrales sur les sections $t=t_2$, $t=t_1$, $t=\text{const}$ sont prises exclusivement sur l'intersection de G par le plan correspondant.

Désignons par $I(t)$ l'intégrale

$$\iint\limits_{t=\text{const}}(Au,\,u)\,dx\,dy.$$

Utilisons les inégalités :

$$-M\,(Au,\,u)\leqslant(Du,\,u)\leqslant M\,(Au,\,u),$$

$$\iint\limits_{t=\text{const}}|\,(Du,\,u)\,|\,dx\,dy\leqslant M\iint\limits_{t=\text{const}}(Au,\,u)\,dx\,dy=MI\,(t),$$

$$\iint_{t=\text{const}} 2\,|(f,\,u)|\,dx\,dy \leqslant 2 \iint_{t=\text{const}} \sqrt{(f,\,f)}\,\sqrt{(u,\,u)}\,dx\,dy \leqslant$$

$$\leqslant 2\sqrt{\iint_{t=\text{const}} (f,\,f)\,dx\,dy}\,\sqrt{p^2 \iint_{t=\text{const}} (Au,\,u)\,dx\,dy} \leqslant$$

$$\leqslant N\sqrt{\iint_{t=\text{const}} (Au,\,u)\,dx\,dy} = N\sqrt{I(t)}.$$

Il vient en utilisant ces inégalités

$$I(t_2) \leqslant I(t_1) + M\int_{t_1}^{t_2} I(t)\,dt + N\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{I(t)}\,dt.$$

Appliquons à présent le lemme relatif à l'inégalité intégrale, démontré à la fin du paragraphe précédent :

$$\sqrt{I(t)} \leqslant \sqrt{I(0)}\,e^{\frac{M}{2}t} + N\,\frac{e^{\frac{M}{2}t} - 1}{M}$$

La constante M évalue ici les coefficients du système et leurs dérivées, et N les seconds membres f.

Il résulte de l'inégalité démontrée que si $u = 0$ pour $t = 0$ et si $f(x, t) = 0$, alors $I(t) = 0$, et donc partout dans la calotte $u = 0$. Cette assertion constitue précisément le théorème d'unicité. Il est vrai que nous n'avons pas encore justifié la condition majeure de positivité de l'intégrale de surface sur la calotte, si bien que nous n'avons pas établi quelles sont les calottes pour lesquelles ce théorème est vrai.

Notons que $(u, u) \leqslant \text{const}\,(Au, u)$, et définissant la norme $\|\,u\,\|$ du vecteur fonction $u(t) = u(x, y, t)$ sur la section $t = \text{const}$ par l'égalité

$$\|\,u(t)\,\| = \sqrt{\iint_{t=\text{const}} (u,\,u)\,dx\,dy},$$

nous écrirons l'évaluation déduite sous la forme suivante :

$$\|\,u(t)\,\| \leqslant \text{const}\,\|\,u(0)\,\| + \text{const}\,\max_t \|\,f(t)\,\|.$$

Nous supposons ici que t varie sur le segment fini $0 \leqslant t \leqslant T$, grâce à quoi nous évaluons $e^{\frac{M}{2}t}$, $\dfrac{e^{\frac{M}{2}t} - 1}{M}$ supérieurement au moyen de certaines constantes.

Les raisonnements précédents sont indépendants, aux notations près, du nombre de variables d'espace (ici nous avons deux coordon-

nées spatiales x, y). Exactement de la même manière on pourrait étudier le cas de trois variables d'espace x, y, z ou celui d'une seule variable x.

Arrêtons-nous succinctement sur ce dernier cas. On se reportera alors à la fig. 26. La «calotte» est alors non pas une surface, mais une courbe, et au lieu d'intégrales doubles sur les sections $t = \text{const}$ nous aurons à considérer des intégrales simples. La norme $\| u(t) \|$ est ici définie comme suit :

$$\| u(t) \| = \sqrt{\int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \left[\sum_i u_i^2(x, t) \right] dx}.$$

Bien entendu, on peut se représenter le cas de la « calotte » de la fig. 27. Les sections d'une telle calotte par les droites $t = \text{const}$

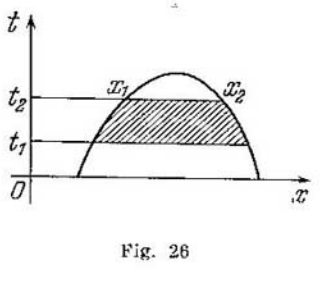

Fig. 26

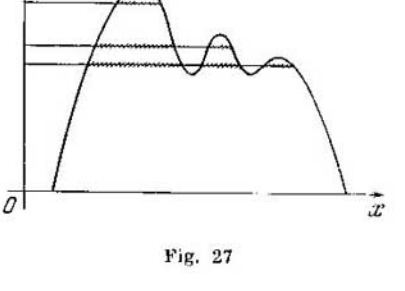

Fig. 27

peuvent être constituées par plusieurs segments disjoints. On pourrait donner sans peine des formulations correctes valables pour de tels cas.

Nous allons voir maintenant comment le procédé décrit plus haut peut servir à la déduction d'évaluations non pas des solutions elles-mêmes, mais de leurs dérivées. Considérons parallèlement au système initial

$$A \frac{\partial u}{\partial t} + B \frac{\partial u}{\partial x} + C \frac{\partial u}{\partial y} + Qu = f$$

encore trois égalités qui s'en déduisent par dérivation par rapport à t, x, y. Avec le système initial, ces égalités forment un système élargi qui contient quatre fois plus d'équations et d'inconnues que le

système initial :

$$A\frac{\partial u}{\partial t}+B\frac{\partial u}{\partial x}+C\frac{\partial u}{\partial y}+Qu=f,$$

$$A\frac{\partial u_t}{\partial t}+B\frac{\partial u_t}{\partial x}+C\frac{\partial u_t}{\partial y}+(Q+A_t)\,u_t+B_t u_x+C_t u_y+Q_t u=f_t,$$

$$A\frac{\partial u_x}{\partial t}+B\frac{\partial u_x}{\partial x}+C\frac{\partial u_x}{\partial y}+A_x u_t+(B_x+Q)\,u_x+C_x u_y+Q_x u=f_x,$$

$$A\frac{\partial u_y}{\partial t}+B\frac{\partial u_y}{\partial x}+C\frac{\partial u_y}{\partial y}+A_y u_t+B_y u_x+(C_y+Q)\,u_y+Q_y u=f_y$$

On peut encore recopier ce système sous la forme suivante à l'aide de matrices partitionnées :

$$\begin{pmatrix} A & & & 0\\ & A & & \\ & & A & \\ 0 & & & A \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} u\\ u_t\\ u_x\\ u_y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} B & & & 0\\ & B & & \\ & & B & \\ 0 & & & B \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} u\\ u_t\\ u_x\\ u_y\end{pmatrix}+$$

$$+\begin{pmatrix} C & & & 0\\ & C & & \\ & & C & \\ 0 & & & C \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial y}\begin{pmatrix} u\\ u_t\\ u_x\\ u_y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} Q & 0 & 0 & 0\\ Q_t & Q+A_t & B_t & C_t\\ Q_x & A_x & Q+B_x & C_x\\ Q_y & A_y & B_y & Q+C_y\end{pmatrix}\times$$

$$\times\begin{pmatrix} u\\ u_t\\ u_x\\ u_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f\\ f_t\\ f_x\\ f_y\end{pmatrix}.$$

Cette forme montre que le système élargi est lui aussi symétrique. Ceci permet de lui appliquer le raisonnement suivi plus haut. Ce raisonnement fournit les évaluations des dérivées de $u\,(x,\ y,\ t)$ d'après leurs valeurs initiales pour $t=0$ et d'après les seconds membres et leurs dérivées $f_t,\ f_x,\ f_y$. Les constantes dans ces évaluations dépendent des matrices du système élargi. Pour les trouver, il faut exiger une plus grande régularité des coefficients du système initial et de ses seconds membres que lors de l'évaluation du vecteur fonction $u\,(x,\ y,\ t)$ lui-même.

Les valeurs initiales des dérivées $u_x,\ u_y$ peuvent être obtenues en dérivant les données initiales, et les valeurs initiales de la dérivée u_t se calculent d'après les valeurs initiales de $u,\ u_x,\ u_y$ à l'aide du système fondamental d'équations

$$Au_t=-Bu_x-Cu_y-Qu+f,$$
$$u_t=A^{-1}(f-Bu_x-Cu_y-Qu).$$

Si l'on doit évaluer non seulement les dérivées premières, mais aussi les dérivées secondes ou d'ordres supérieurs, de la même façon, en dérivant, on élargit le système de telle sorte qu'il contienne après cela en tant que fonctions inconnues les dérivées de tous les ordres à évaluer.

Il est clair que plus l'ordre des dérivées évaluées est élevé, plus grande doit être la régularité des coefficients des équations initiales, celle des seconds membres et des données initiales.

Exercice. Déduire le système élargi au moyen duquel on peut évaluer les dérivées secondes des solutions.

Dans certains cas, procédant aux évaluations, il est parfois commode d'élargir le système en lui associant les équations non de toutes les dérivées, mais celles correspondant à une partie de ces dérivées. Alors, les autres dérivées peuvent être évaluées à l'aide des équations elles-mêmes. Nous allons montrer comment on opère sur l'exemple d'un système à deux variables indépendantes x, t. On élargira le système en lui associant des équations pour les dérivées par rapport à t.

Supposons que le système hyperbolique symétrique étudié à coefficients réguliers ait été écrit sous la forme

$$A\frac{\partial u}{\partial t}+B\frac{\partial u}{\partial x}+Qu=f$$

Nous supposerons la matrice B non dégénérée (det $\| B \| \neq 0$). Dès lors, on peut exprimer $\frac{\partial u}{\partial x}$ au moyen de $\frac{\partial u}{\partial t}$, u, f et des coefficients du système :

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-B^{-1}A\frac{\partial u}{\partial t}-B^{-1}Qu+B^{-1}f$$

Ceci étant, si l'on a pu évaluer u, u_t, à l'aide de l'égalité écrite on pourra aussi aisément évaluer u_x.

Dérivant le système donné par rapport à t et associant le résultat au système initial, on obtient l'élargissement suivant :

$$A\frac{\partial u}{\partial t}+B\frac{\partial u}{\partial x}+Qu=f,$$

$$A\frac{\partial u_t}{\partial t}+B\frac{\partial u_t}{\partial x}+Q_tu+(A_t+Q)\,u_t+\underline{B_tu_x}=f_t$$

L'élargissement sous la forme écrite est encore incommode, étant donné que parmi les termes d'ordre inférieur figure le terme souligné B_tu_x non exprimé au moyen des fonctions cherchées u, u_t du système élargi. Mais, comme l'on vient de noter, on peut exprimer u_x au moyen de u, u_t. Après quoi, on obtient la forme suivante d'élar-

gissement :

$$A\frac{\partial u}{\partial t}+B\frac{\partial u}{\partial x}+Qu=f,$$

$$A\frac{\partial u_t}{\partial t}+B\frac{\partial u_t}{\partial x}+(Q_t-B_tB^{-1}Q)\,u+(Q+A_t-B_tB^{-1}A)\,u_t=f_t-B_tB^{-1}f.$$

Sous forme matricielle le système élargi est le suivant :

$$\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & A\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}u\\ u_t\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}B & 0\\ 0 & B\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix}u\\ u_t\end{pmatrix}+$$
$$+\begin{pmatrix}Q & 0\\ Q_t-B_tB^{-1}Q & Q+A_t-B_tB^{-1}A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ u_t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f\\ f_t-B_tB^{-1}f\end{pmatrix}.$$

Lorsque les coefficients sont suffisamment réguliers, en continuant à dériver, on peut obtenir les équations vérifiées par le vecteur u, u_t, u_{tt}. On devra alors se servir du fait que $u_{tx}=\frac{\partial u_t}{\partial x}$ s'exprime d'après u, u_t, u_{tt} au moyen d'une équation obtenue lors du processus d'élargissement déjà décrit. De la même manière s'obtiennent aussi les équations pour u_{ttt}, u_{tttt} et même pour les dérivées par rapport à t d'ordre supérieur.

Exercice. Ecrire les matrices pour l'élargissement fait suivant le schéma qui vient d'être décrit lorsqu'on veut évaluer les dérivées jusqu'au second ordre inclus.

§ 11. Condition de non-négativité de la forme quadratique liée à l'intégrale d'énergie

Cône des vecteurs liés aux formes quadratiques définies non négatives de l'intégrale d'énergie. Sa convexité. Méthode pour calculer la frontière de ce cône. L'inégalité $\tau+H(\xi,\eta)\geqslant 0$ et la définition de $H(\xi,\eta)$. Homogénéité et l'égalité qui en découle $\xi H_\xi+\eta H_\eta=H$. Exemples: système hyperbolique à deux variables indépendantes x, t sous forme canonique et équations de la théorie de l'élasticité. Remarque relatif au cas où les coefficients sont variables.

Etudiant au paragraphe précédent les intégrales d'énergie, force a été d'envisager des surfaces S sur lesquelles

$$\int\int_S([\tau A+\xi B+\eta C]\,u,\,u)\,ds\geqslant 0\,;$$

ici τ, ξ, η sont les composantes de la normale à S; A, B, C sont des matrices symétriques, A étant définie positive. Nous allons à présent prendre un point fixe $(x_0,\,t_0,\,y_0)$ de l'espace et considérer pour les matrices A, B, C décrivant les coefficients d'un certain système en ce point l'ensemble de tous les vecteurs $(\tau,\,\xi,\,\eta)$ pour lesquels la matrice $\tau A+\xi B+\eta C$ est définie non négative.

Primo, notons que le vecteur $\tau = 1$, $\xi = 0$, $\eta = 0$ correspond, par hypothèse, à la forme définie positive $\tau A + \xi B + \eta C$. Notons de même que, avec chaque vecteur (τ, ξ, η) correspondant à une forme définie positive (non négative), n'importe quel vecteur $\overline{\tau} = \mu\tau$, $\overline{\xi} = \mu\xi$, $\overline{\eta} = \mu\eta$, pour $\mu > 0$, donne également une matrice définie positive (non négative) $\overline{\tau}A + \overline{\xi}B + \overline{\eta}C = \mu(\tau A + \xi B + \eta C)$. Cette assertion peut être formulée comme suit:

Les vecteurs correspondant à des formes quadratiques définies positives (non négatives) forment un cône.

Montrons que le cône de vecteurs (τ, ξ, η) correspondant à des formes définies positives est convexe. En effet, soit

$$\tau_1 (Au, u) + \xi_1 (Bu, u) + \eta_1 (Cu, u) \geqslant \varkappa_1 (u, u),$$

$$\tau_2 (Au, u) + \xi_2 (Bu, u) + \eta_2 (Cu, u) \geqslant \varkappa_2 (u, u).$$

Tout vecteur (τ, ξ, η) situé sur le segment réunissant les extrémités des vecteurs (τ_1, ξ_1, η_1), (τ_2, ξ_2, η_2) peut s'écrire sous la forme

$$\tau = (1 - \alpha)\tau_1 + \alpha\tau_2, \quad \xi = (1 - \alpha)\xi_1 + \alpha\xi_2,$$

$$\eta = (1 - \alpha)\eta_1 + \alpha\eta_2,$$

où $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Il en résulte que

$$\tau (Au, u) + \xi (Bu, u) + \eta (Cu, u) \geqslant [(1 - \alpha)\varkappa_1 + \alpha\varkappa_2] (u, u) \geqslant$$

$$\geqslant \min [\varkappa_1, \varkappa_2] (u, u).$$

Cette inégalité exprime que les formes sont définies positives.

Ainsi, on voit que, en même temps que deux vecteurs correspondant à des formes définies positives, tous les vecteurs qui en sont des combinaisons linéaires avec des coefficients positifs correspondent aussi à de telles formes. Par conséquent, le cône de vecteurs (τ, ξ, η) correspondant à des formes définies positives est convexe et contient le vecteur $(1, 0, 0)$ perpendiculaire aux plans $t = \text{const}$. Ce cône ne coïncide pas avec l'espace tout entier, puisqu'au vecteur $(-1, 0, 0)$ correspond une forme définie négative.

Considérons les vecteurs situés sur la frontière d'un cône de formes définies positives. La forme quadratique $\tau (Au, u) + \xi (Bu, u) + \eta (Cu, u)$ étant continue par rapport au vecteur (τ, ξ, η), cette forme sera définie non négative sur la frontière du cône:

$$\tau (Au, u) + \xi (Bu, u) + \eta (Cu, u) \geqslant 0.$$

Par ailleurs, pour le vecteur (τ_0, ξ_0, η_0) situé sur la frontière du cône cette forme ne saurait être définie positive, puisque alors on aurait l'inégalité

$$\tau_0 (Au, u) + \xi_0 (Bu, u) + \eta_0 (Cu, u) > \varkappa > 0,$$

si

$$(u, u) = 1,$$

et cette inégalité serait observée, en vertu de la continuité de la forme quadratique, pour tous les vecteurs (τ, ξ, η) voisins de (τ_0, ξ_0, η_0). Ceci contredit le fait que (τ_0, ξ_0, η_0) est un vecteur frontière.

Il est connu en algèbre que la forme quadratique d'une matrice symétrique $\tau(Au, u) + \xi(Bu, u) + \eta(Cu, u)$ est définie positive si, et seulement si, toutes ses valeurs propres sont positives, et que cette forme est définie non négative si, et seulement si, toutes ses valeurs propres sont non négatives. Dès lors, la non-négativité d'une forme quadratique non définie positive entraîne la nullité de l'une des racines caractéristiques de sa matrice. On voit donc que pour les vecteurs (τ, ξ, η) situés sur la frontière du cône de formes définies positives

$$\det \| \tau A + \xi B + \eta C \| = 0.$$

Le cône des vecteurs satisfaisant à cette dernière égalité est ce que nous avons appelé au § 6 le *cône des normales caractéristiques*. Il divise tout l'espace en plusieurs parties. Considérons la partie qui contient le vecteur (1, 0, 0). Nous avons montré que cette partie de l'espace coïncide avec les vecteurs (τ, ξ, η) pour lesquels la forme est définie positive. Cette partie est convexe.

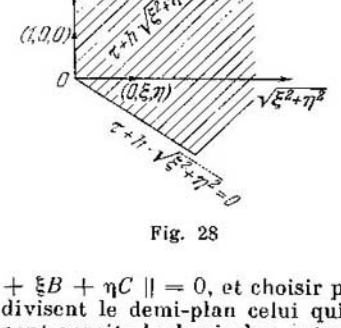

Fig. 28

Soit un demi-plan qui passe par l'axe des τ et par un vecteur fixe $(0, \xi, \eta)$. De nos raisonnements résulte la règle suivante déterminant dans ce demi-plan un « cône » convexe — un angle — contenant les vecteurs (τ, ξ, η) liés aux formes positives. Il faut considérer tous les rayons qui sont des solutions de l'équation $\det \| \tau A + \xi B + \eta C \| = 0$, et choisir parmi les angles en lesquels ces rayons divisent le demi-plan celui qui contient le vecteur (1, 0, 0). Tournant ensuite le demi-plan autour de l'axe des τ, on peut, en prenant la réunion des angles distingués, obtenir le cône tout entier qui correspond aux formes définies non négatives. Dans le demi-plan arbitrairement choisi l'ensemble des vecteurs correspondant aux formes définies non négatives remplit l'angle entre le demi-axe supérieur des τ et une droite dont on peut écrire l'équation sous la forme suivante :

$$\tau + h\sqrt{\xi^2+\eta^2} = 0$$

(fig. 28). L'intérieur de cet angle est déterminé par l'inégalité

$$\tau + h\sqrt{\xi^2+\eta^2} \geqslant 0.$$

Il est clair qu'en général le coefficient angulaire h sera différent d'un demi-plan à l'autre de ce genre. Aussi doit-on considérer que

$$h = h\left(\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}},\ \frac{\eta}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}\right).$$

Pour cet ensemble de vecteurs liés à la définition non négative de la forme $\tau A + \xi B + \eta C$ notre inégalité s'écrit sous la forme :

$$\tau + \sqrt{\xi^2+\eta^2}\, h\left(\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}},\ \frac{\eta}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}\right) \geqslant 0.$$

On utilise d'ordinaire pour l'expression $\sqrt{\xi^2+\eta^2}\, h\left(\xi/\sqrt{\xi^2+\eta^2},\ \eta/\sqrt{\xi^2+\eta^2}\right)$ la notation $H(\xi, \eta)$. Il est clair qu'on a pour $\alpha > 0$ l'égalité

$$H(\alpha\xi,\ \alpha\eta) = \alpha H(\xi,\ \eta),$$

qui exprime que H est une fonction homogène du premier degré. Si H est une fonction dérivable, on a d'après le théorème d'Euler pour les fonctions homogènes

$$\xi H_\xi + \eta H_\eta = H.$$

Le cône des vecteurs (τ, ξ, η) correspondant aux formes non négatives est donné par l'inégalité

$$\tau + H(\xi,\ \eta) \geqslant 0.$$

On peut encore trouver comme suit la fonction $H(\xi, \eta)$. On doit, pour tout couple fixe (ξ, η), trouver la plus grande racine τ^* de l'équation $\det \| \tau A + \xi B + \eta C \| = 0$ et poser $H(\xi, \eta) = -\tau^*$.

Nous allons maintenant illustrer la construction décrite par deux exemples.

Le premier exemple sera considéré pour le cas de deux variables x, t seulement, pour bien souligner que les raisonnements sont indépendants du nombre de variables d'espace. Il est clair que dans ce cas $H = H(\xi)$, mais il se peut qu'alors $H(-\xi) \neq -H(\xi)$.

Considérons le système hyperbolique sous forme canonique :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + K\frac{\partial u}{\partial x} + Qu = f,$$

$$K = \begin{pmatrix} k_1 & & 0 \\ & k_2 & \\ & \ddots & \\ 0 & & k_n \end{pmatrix}.$$

Ici $A = E$ (matrice unité), $B = K$,

$$\det \| \tau A + \xi B \| = \det \| \tau E + \xi K \| = \det \begin{pmatrix} \tau + k_1\xi & & 0 \\ & \tau + k_2\xi & \\ & \ddots & \\ 0 & & \tau + k_n\xi \end{pmatrix} =$$

$$= (\tau + k_1\xi)(\tau + k_2\xi) \ldots (\tau + k_n\xi).$$

L'équation $\det \| \tau E + \xi K \| = 0$ détermine le cône des normales caractéristiques : n droites $\tau + k_i \xi = 0$ qui divisent le plan (τ, ξ) en plusieurs angles. L'angle contenant le vecteur $\tau = 1$, $\xi = 0$ est délimité par les rayons $\tau + k_p \xi = 0$ correspondant au plus grand et au plus petit des coefficients k_p (fig. 29). La fonction $H(\xi)$ se détermine ici comme suit :

$$H(\xi) = \max_i (-\xi k_i).$$

A titre de second exemple nous considérerons les équations bidimensionnelles de la théorie de l'élasticité

$$\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial y},$$

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial y}, \qquad (\sigma_{12} = \sigma_{21})$$

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial t} = \left(K + \frac{4}{3}\mu\right) \frac{\partial u}{\partial x} + \left(K - \frac{2}{3}\mu\right) \frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\frac{\partial \sigma_{22}}{\partial t} = \left(K - \frac{2}{3}\mu\right) \frac{\partial u}{\partial x} + \left(K + \frac{4}{3}\mu\right) \frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial t} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Dans ce système d'équations ρ_0 est la densité du milieu, u, v sont les composantes du vecteur vitesse de déplacement, les σ_{ik} sont les

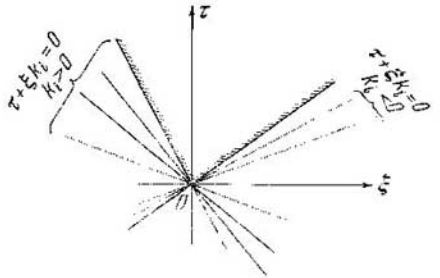

Fig. 29

composantes du tenseur des contraintes. Les coefficients positifs constants K et μ sont ce qu'on appelle *module de compression uniforme* et *module de glissement*. La déduction des équations de la théorie de l'élasticité est faite dans les cours de mécanique des milieux continus.

Le système écrit n'est pas mis sous forme symétrique et il est incommode pour le but poursuivi. Divisons la dernière équation par μ, et remplaçons les troisième et quatrième équations par certaines combinaisons linéaires de ces équations.

Ceci fait, les équations des ondes élastiques s'écrivent sous la forme définitive suivante :

$$\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial y} = 0, \qquad \rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial \left[\frac{3K+4\mu}{4\mu\,(3K+\mu)} \sigma_{11} - \frac{3K-2\mu}{4\mu\,(3K+\mu)} \sigma_{22} \right]}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial \left[-\frac{3K-2\mu}{4\mu\,(3K+\mu)} \sigma_{11} + \frac{3K+4\mu}{4\mu\,(3K+\mu)} \sigma_{22} \right]}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

On a maintenant un système symétrique de la forme

$$A \frac{\partial u}{\partial t} + B \frac{\partial u}{\partial x} + C \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

On peut s'en convaincre aisément en posant $u_1 = u$, $u_2 = v$, $u_3 = \sigma_{11}$, $u_4 = \sigma_{22}$, $u_5 = \sigma_{12}$ et en écrivant les matrices A, B, C :

$$A = \begin{pmatrix} \rho_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3K+4\mu}{4\mu\,(3K+\mu)} & -\frac{3K-2\mu}{4\mu\,(3K+\mu)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3K-2\mu}{4\mu\,(3K+\mu)} & \frac{3K+4\mu}{4\mu\,(3K+\mu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu} \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'équation $\det \| \tau A + \xi B + \eta C \| = 0$ s'écrit pour ce système

$$\begin{vmatrix} \tau\rho_0 & 0 & -\xi & 0 & -\eta \\ 0 & \tau\rho_0 & 0 & -\eta & -\xi \\ -\xi & 0 & \tau \frac{3K+4\mu}{4\mu\,(3K+\mu)} & -\tau \frac{3K-2\mu}{4\mu\,(3K+\mu)} & 0 \\ 0 & -\eta & -\tau \frac{3K-2\mu}{4\mu\,(3K+\mu)} & \tau \frac{3K+4\mu}{4\mu\,(3K+\mu)} & 0 \\ -\eta & -\xi & 0 & 0 & \frac{\tau}{\mu} \end{vmatrix} = 0$$

Notant que

$$\tau \frac{3K+4\mu}{4\mu\,(3K+\mu)} + \tau \frac{3K-2\mu}{4\mu\,(3K+\mu)} = \frac{1}{2}\frac{\tau}{\mu},$$

et introduisant les notations

$$\omega = \rho_0 \tau, \quad a = \tau \frac{3K+4\mu}{4\mu\,(3K+\mu)}, \quad b = \tau \frac{3K-2\mu}{4\mu\,(3K+\mu)},$$

nous recopierons cette équation sous la forme plus compacte

$$\begin{vmatrix} \omega & 0 & -\xi & 0 & -\eta \\ 0 & \omega & 0 & -\eta & -\xi \\ -\xi & 0 & a & -b & 0 \\ 0 & -\eta & -b & a & 0 \\ -\eta & -\xi & 0 & 0 & 2(a+b) \end{vmatrix} = 0,$$

puis nous développerons le déterminant :

$$[a\,(\xi^2+\eta^2) - \omega\,(a^2-b^2)]\,[\xi^2+\eta^2-2\omega\,(a+b)] = 0. \qquad (1)$$

L'expression du déterminant peut être obtenue par un calcul direct (assez fastidieux). Le calcul se simplifie considérablement si l'on note que le système d'équations est invariant par rotation, si bien qu'il est naturel de s'attendre à ce que le déterminant dépende de façon simple des variables ξ et η : il ne dépend que de $\xi^2+\eta^2$. Posant dans le déterminant $\eta = 0$ et le développant suivant les deuxième et quatrième lignes, on obtient l'égalité

$$[-\xi^2+2\omega\,(a+b)] \begin{vmatrix} \omega & -\xi & 0 \\ -\xi & a & -b \\ 0 & -b & a \end{vmatrix} = [-\xi^2+2\omega\,(a+b)]\,[\omega\,(a^2-b^2) - a\xi^2] = 0.$$

Remplaçant à présent ξ^2 par $\xi^2+\eta^2$, nous sommes conduits à l'égalité (1).

On peut à présent reprendre les notations initiales et écrire

$$\det \| \tau A + \xi B + \eta C \| = \frac{\rho_0^2}{4\mu^2 \left(K+\frac{1}{3}\mu\right)} \tau \left[\tau^2 - \frac{K+\frac{4}{3}\mu}{\rho_0}(\xi^2+\eta^2)\right] \times \left[\tau^2 - \frac{\mu}{\rho_0}(\xi^2+\eta^2)\right] = 0.$$

Cette équation définit le plan $\tau = 0$ et deux cônes

$$\tau^2 - \frac{K+\frac{4}{3}\mu}{\rho_0}(\xi^2+\eta^2) = 0,$$

$$\tau^2 - \frac{\mu}{\rho_0}(\xi^2+\eta^2) = 0.$$

Ces cônes et le plan $\tau = 0$ sont représentés sur la fig. 30. La nappe interne du cône contenant le vecteur $\tau = 1$, $\xi = 0$, $\eta = 0$ est la nappe supérieure

$$\tau^2 - \frac{K + \frac{4}{3}\mu}{\rho_0}(\xi^2 + \eta^2) = 0.$$

C'est dire que les matrices $\tau A + \xi B + \eta C$ seront définies non négatives si

$$\tau - \sqrt{\frac{K + \frac{4}{3}\mu}{\rho_0}}\sqrt{\xi^2 + \eta^2} \geqslant 0.$$

La fonction $H(\xi, \eta)$ ici doit être définie par l'égalité

$$H(\xi, \eta) = -\sqrt{\frac{K + \frac{4}{3}\mu}{\rho_0}}\sqrt{\xi^2 + \eta^2}.$$

Nous pensons que ces exemples ont suffisamment illustré la structure et le mode de détermination de l'ensemble des vecteurs correspondant aux matrices définies non négatives $\tau A + \xi B + \eta C$.

Pour conclure faisons encore une remarque. Jusqu'à présent nous avons étudié la forme $\tau(Au, u) + \xi(Bu, u) + \eta(Cu, u)$ en un point fixe (x_0, y_0, t_0). Si les matrices des coefficients A, B, C sont variables, c'est-à-dire si elles dépendent du point (x, y, t), alors le cône des vecteurs (τ, ξ, η) liés aux formes définies non négatives diffère d'un point à l'autre. Aussi devrons-nous écrire son équation sous la forme

$$\tau + H(\xi, \eta, x, y, t) \geqslant 0.$$

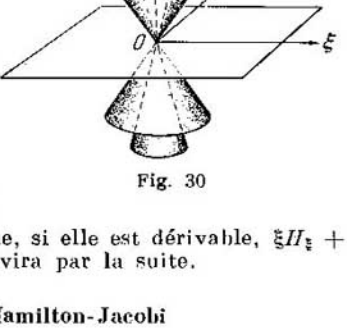

Fig. 30

La fonction H est ici encore homogène du premier degré par rapport aux variables ξ, η, de sorte que, si elle est dérivable, $\xi H_\xi + \eta H_\eta = H$. Cette égalité nous servira par la suite.

§ 12. Equation d'Hamilton-Jacobi

Inégalité et équation d'Hamilton-Jacobi. Description schématique de la méthode d'intégration de cette équation. Bicaractéristiques et équations canoniques d'Hamilton pour leur construction. Cône des normales caractéristiques pour les équations de l'acoustique et pour l'équation d'Hamilton-Jacobi pour ce système. Description des domaines d'unicité du système. Cône des caracté-

ristiques et cône des normales caractéristiques. Exemple: équations de l'acoustique.

Dans ce paragraphe, nous ferons le bilan dans l'étude de la question du domaine d'unicité pour les solutions des systèmes hyperboliques symétriques.

Soit un domaine limité inférieurement par le plan $t = 0$, et supérieurement par une « calotte » $\varphi(x, y, t) = 0$ (grad $\varphi \neq 0$). Supposons $\varphi < 0$ dans le domaine et $\varphi > 0$ en dehors. Ainsi donc, nous considérons un domaine défini par les inégalités $\varphi < 0$, $t > 0$. Ce domaine est supposé fini. La normale extérieure à la « calotte » $\varphi = 0$ est dirigée suivant le vecteur gradient $(\varphi_t, \varphi_x, \varphi_y)$. Si (τ, ξ, η) est la normale unité extérieure, alors

$$k\tau = \varphi_t,\ k\xi = \varphi_x,\ k\eta = \varphi_y,\ k > 0.$$

Si l'on veut que la forme $\tau(Au, u) + \xi(Bu, u) + \eta(Cu, u)$ soit définie non négative, il faut, on le sait, exiger que

$$\tau + H(\xi, \eta, x, y, t) \geqslant 0.$$

Multiplions le premier membre de l'inégalité par k positif et servons-nous de l'homogénéité (au premier degré) de H:

$$k\tau + H(k\xi, k\tau, x, y, t) \geqslant 0.$$

En d'autres termes, l'équation de la surface $\varphi(x, y, t) = 0$ doit être donnée par la fonction φ vérifiant l'inégalité

$$\varphi_t + H(\varphi_x, \varphi_y, x, y, t) \geqslant 0.$$

Cette inégalité est dite inégalité d'Hamilton-Jacobi. Parmi toutes les surfaces vérifiant cette inégalité, un rôle particulier revient aux surfaces pour lesquelles la fonction φ vérifie l'égalité $\varphi_t + H(\varphi_x, \varphi_y, x, y, t) = 0$, qui porte le nom d'*équation d'Hamilton-Jacobi*. Notons encore une fois que si l'on calcule sur une surface $\varphi = \text{const}$ liée à cette équation l'intégrale

$$\int\int [(\tau A + \xi B + \eta C)u, u]\, ds,$$

cette intégrale sera non négative.

Notons encore le fait que, lors de la déduction des évaluations des dérivées, nous avons élargi le système étudié à un système pour lequel les matrices des coefficients des dérivées prenaient la forme partitionnée

$$\begin{pmatrix} A & & 0 \\ & A & \\ 0 & & A \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} B & & 0 \\ & B & \\ 0 & & B \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} C & & 0 \\ & C & \\ 0 & & C \end{pmatrix}.$$

Il est évident que les conditions de définition non négative de la matrice élargie

$$\tau\begin{pmatrix} A & & 0 \\ & A & \\ 0 & & A \end{pmatrix} + \xi\begin{pmatrix} B & & 0 \\ & B & \\ 0 & & B \end{pmatrix} + \eta\begin{pmatrix} C & & 0 \\ & C & \\ 0 & & C \end{pmatrix}$$

coïncident avec les conditions de définition non négative de la matrice $\tau A + \xi B + \eta C$.

Nous avons déjà défini la notion de caractéristique en tant que surface sur laquelle la normale (τ, ξ, η) vérifie l'équation $\det \| \tau A + \xi B + \eta C \| = 0$. L'égalité $\tau + H = 0$ ne donne qu'une partie des solutions de cette équation. *L'égalité* $\det \| \tau A + \xi B + \eta C \| = 0$ *définit un cône, le cône des normales caractéristiques. L'équation d'Hamilton-Jacobi distingue une nappe seulement de ce cône, à savoir la nappe contenant le demi-axe positif des* τ.

Les méthodes d'intégration de l'équation d'Hamilton-Jacobi sont étudiées dans les cours de mécanique rationnelle. Nous allons nous arrêter très succinctement sur le mode de déduction de la solution (dont on suppose l'existence et la régularité, ainsi que la régularité de H), afin d'utiliser ce mode lors de l'étude d'un exemple important.

En même temps que l'équation $\varphi_t + H(\varphi_x, \varphi_y, x, y, t) = 0$, considérons les égalités qui s'en déduisent en la dérivant par rapport à x et y :

$$\frac{\partial \varphi_x}{\partial t} + H_{\varphi_x}\frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + H_{\varphi_y}\frac{\partial \varphi_y}{\partial x} + H_x = 0,$$

$$\frac{\partial \varphi_y}{\partial t} + H_{\varphi_x}\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + H_{\varphi_y}\frac{\partial \varphi_y}{\partial y} + H_y = 0.$$

Notant à présent que $\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} = \frac{\partial \varphi_y}{\partial x}$, recopions-les comme suit :

$$\frac{\partial \varphi_x}{\partial t} + H_{\varphi_x}\frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + H_{\varphi_y}\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + H_x = 0,$$

$$\frac{\partial \varphi_y}{\partial t} + H_{\varphi_x}\frac{\partial \varphi_y}{\partial x} + H_{\varphi_y}\frac{\partial \varphi_y}{\partial y} + H_y = 0.$$

On peut écrire l'équation initiale elle-même

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + H(\varphi_x, \varphi_y, x, y, t) = 0,$$

en utilisant l'identité $H(\varphi_x, \varphi_y, x, y, t) = \varphi_x H_{\varphi_x} + \varphi_y H_{\varphi_y}$ (homogénéité de H par rapport à φ_x, φ_y au premier degré), comme suit :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + H_{\varphi_x}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + H_{\varphi_y}\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0.$$

Le système

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + H_{\varphi_x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + H_{\varphi_y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial \varphi_x}{\partial t} + H_{\varphi_x} \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + H_{\varphi_y} \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + H_x = 0,$$

$$\frac{\partial \varphi_y}{\partial t} + H_{\varphi_x} \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} + H_{\varphi_y} \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} + H_y = 0$$

s'intègre facilement par la méthode des caractéristiques, étudiée dans le cours d'équations différentielles.

Posons $q_1 = x$, $q_2 = y$, $\varphi_x = p_1$, $\varphi_y = p_2$ et recopions le système encore une fois :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + H_{p_1}(p_1, p_2, q_1, q_2, t) \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} + H_{p_2}(p_1, p_2, q_1, q_2, t) \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} = 0,$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} + H_{p_1} \frac{\partial p_1}{\partial q_1} + H_{p_2} \frac{\partial p_1}{\partial q_2} + H_{q_1} = 0,$$

$$\frac{\partial p_2}{\partial t} + H_{p_1} \frac{\partial p_2}{\partial q_1} + H_{p_2} \frac{\partial p_2}{\partial q_2} + H_{q_2} = 0.$$

Considérons les caractéristiques de ce système

$$\frac{dq_1}{dt} = H_{p_1}, \qquad \frac{dq_2}{dt} = H_{p_2}.$$

Le long de ces caractéristiques

$$\frac{dp_1}{dt} = \frac{\partial p_1}{\partial t} + H_{p_1} \frac{\partial p_1}{\partial q_1} + H_{p_2} \frac{\partial p_1}{\partial q_2} = -H_{q_1}, \qquad \frac{dp_2}{dt} = -H_{q_2}.$$

En outre, toujours le long des caractéristiques,

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + H_{p_1} \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} + H_{p_2} \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} = 0.$$

De la sorte, si l'on sait que dans un certain voisinage du plan $t = 0$ (ou plus exactement au voisinage d'un certain domaine de ce plan) existe la solution $\varphi(x, y, t)$ de l'équation d'Hamilton-Jacobi

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + H\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, x, y, t\right) = 0,$$

prenant pour $t = 0$ les valeurs initiales $\varphi(x, y, 0) = \varphi_0(x, y)$, on peut construire cette solution comme suit.

On mène par chaque point (x, y) de notre domaine du plan $t = 0$ la caractéristique déterminée par les données initiales

$$q_{10} = x|_{t=0}, \qquad q_{20} = y|_{t=0},$$

$$p_{10} = \frac{\partial \varphi_0}{\partial x}, \qquad p_{20} = \frac{\partial \varphi_0}{\partial y}$$

et les équations

$$\frac{dp_i}{dt} = -H_{q_i}, \quad \frac{dq_i}{dt} = H_{p_i}$$

(équations canoniques d'Hamilton). Les trajectoires de ces équations

$$x = q_1 = q_1(t, q_{10}, q_{20}); \quad y = q_2 = q_2(t, q_{10}, q_{20})$$

remplissent un certain voisinage de notre domaine, donné pour $t = 0$. Le long de chacune de ces trajectoires $\varphi = \varphi(q_{10}, q_{20}) = \varphi_0(q_{10}, q_{20})$ ne dépend pas de t. A partir des équations $x = q_1(t, q_{10}, q_{20})$, $y = q_2(t, q_{10}, q_{20})$ d'après les quantités x, y, t données, on peut déterminer q_{10}, q_{20}, et donc aussi les valeurs de φ.

Suivant le schéma décrit, la démonstration de l'existence de la solution n'est pas très compliquée, encore qu'elle soit ardue. Une

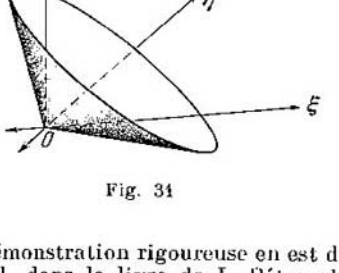

Fig. 31

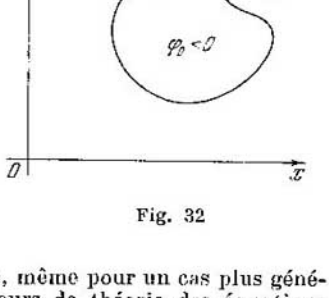

Fig. 32

démonstration rigoureuse en est donnée, même pour un cas plus général, dans le livre de I. Pétrovski « Cours de théorie des équations différentielles». Nous nous bornerons au schéma indiqué et nous passerons à des exemples.

Notons seulement que les caractéristiques de l'équation $\varphi_t = H(\varphi_x, \varphi_y, x, y, t) = 0$, décrivant à son tour la surface caractéristique d'un certain système, sont dites *bicaractéristiques*.

Ecrivons l'équation d'Hamilton-Jacobi pour le système symétrique décrivant la propagation des ondes sonores dans un milieu en mouvement

$$\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} + \rho_0 U \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0,$$

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} + \rho_0 U \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{1}{\rho_0 c_0^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{U}{\rho_0 c_0^2} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Ici $u + U$ et v sont les composantes de la vitesse ($u \ll U$, $v \ll U$), p est la perturbation de la pression. Si l'on pose $t' = t$, $x' = x - Ut$, $y' = y$ (c'est-à-dire si l'on passe à des coordonnées en mouvement avec la vitesse U), ce système se réduit au système d'équations de

l'acoustique, système qui nous est connu :

$$\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t'} + \frac{\partial p}{\partial x'} = 0,$$

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t'} + \frac{\partial p}{\partial y'} = 0,$$

$$\frac{1}{\rho_0 c_0^2} \frac{\partial p}{\partial t'} + \frac{\partial u}{\partial x'} + \frac{\partial v}{\partial y'} = 0.$$

L'équation $\det \| \tau A + \xi B + \eta C \| = 0$ pour les équations du son dans un milieu en mouvement s'écrit

$$\begin{vmatrix} \rho_0 (\tau + U\xi) & 0 & \xi \\ 0 & \rho_0 (\tau - U\xi) & \eta \\ \xi & \eta & \frac{1}{\rho_0 c_0^2} (\tau + U\xi) \end{vmatrix} = 0.$$

Le développement du déterminant donne l'égalité

$$\frac{\rho_0}{c_0^2} (\tau + U\xi) [(\tau + U\xi)^2 - c_0^2 (\xi^2 + \eta^2)] = 0.$$

Le cône des normales caractéristiques pour ce système se décompose en le plan

$$\tau + U\xi = 0$$

et le cône du second degré

$$(\tau + U\xi)^2 - c_0^2 (\xi^2 + \eta^2) = 0.$$

De la sorte, le cône des normales caractéristiques divise l'espace tout entier des τ, ξ, η en quatre parties :

I. $\tau + U\xi > c_0 \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$,

II. $c_0 \sqrt{\xi^2 + \eta^2} > \tau + U\xi > 0$,

III. $0 > \tau + U\xi > -c_0 \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$,

IV. $-c_0 \sqrt{\xi^2 + \eta^2} > \tau + U\xi$.

Le vecteur $\tau = 1$, $\xi = 0$, $\eta = 0$ appartient de toute évidence au domaine I : $\{\tau + U\xi > c_0 \sqrt{\xi^2 + \eta^2}\}$. C'est précisément dans ce domaine que sont situés les vecteurs (τ, ξ, η) correspondant aux formes énergétiques définies positives.

Si $|U| < c_0$, on a pour les vecteurs de ce domaine

$$\tau > c_0 \sqrt{\xi^2 + \eta^2} - U\xi \geqslant (c_0 - |U|) |\xi| \geqslant 0.$$

Tout ce domaine se trouve alors dans le demi-espace $t > 0$. Mais si $|U| > c_0$, le domaine $\tau > c_0 \sqrt{\xi^2 + \eta^2} - U\xi$ coupe alors le demi-

espace $\tau < 0$. Sa disposition est montrée dans ce cas sur la fig. 31 ($U > 0$).

L'équation d'Hamilton-Jacobi correspondant à notre système a la forme

$$\varphi_t + U\varphi_x - c_0\sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2} = 0,$$
$$(H(\xi, \eta) = U\xi - c_0\sqrt{\xi^2 + \eta^2}).$$

Dans un gaz au repos ($U = 0$), elle se simplifie

$$\varphi_t + H(\varphi_x, \varphi_y) = \varphi_t - c_0\sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2} = 0.$$

Construisons d'abord les caractéristiques pour ce cas le plus simple ($H, (\xi, \eta) = -c_0\sqrt{\xi^2 + \eta^2}$). Supposons que l'inégalité $\varphi_0(x, y) < 0$ définisse dans le plan x, y un certain domaine, celui représenté sur la fig. 32. La courbe $\varphi_0(x, y) = 0$ est sa frontière. Cherchons à construire une fonction $\varphi = \varphi(x, y, t)$ telle que $\varphi(x, y, 0) = \varphi_0(x, y)$, et qu'elle vérifie l'équation d'Hamilton-Jacobi

$$\varphi_t - c_0\sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2} = 0.$$

La seule question qui nous intéresse maintenant, c'est de voir comment varie au cours du temps la frontière du domaine $\varphi < 0$, c'est-à-dire comment se meut la courbe $\varphi(x, y, t) = 0$ lorsque t varie. Prenons un point quelconque (x_0, y_0) sur la courbe $\varphi_0 = 0$ et définissons sur elle

$$q_{10} = x_0, \quad q_{20} = y_0, \quad p_{10} = \varphi_{0x}, \quad p_{20} = \varphi_{0y}.$$

Il est évident que le vecteur (p_{10}, p_{20}) est dirigé suivant la normale extérieure à la courbe $\varphi_0 = 0$. Ecrivons les équations de la bicaractéristique passant par le point (x_0, y_0) ($H = -c_0\sqrt{p_1^2 + p_2^2}$),

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dq_1}{dt} = H_{p_1} = -c_0\frac{p_1}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2}}, \quad \frac{dp_1}{dt} = -H_{q_1} = 0,$$
$$\frac{dy}{dt} = \frac{dq_2}{dt} = H_{p_2} = -c_0\frac{p_2}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2}}, \quad \frac{dp_2}{dt} = -H_{q_2} = 0.$$

Ces équations montrent que le long de la bicaractéristique p_1, p_2 sont constants, et donc est aussi constant le vecteur vitesse du mouvement $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$ le long de la bicaractéristique. Ce vecteur est dirigé suivant la même droite que (p_1, p_2), mais en sens inverse, et son module est

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = c_0.$$

Ainsi, lorsqu'on se meut suivant une bicaractéristique, on s'enfonce dans le domaine $\varphi_0 < 0$ suivant la normale à sa frontière avec

la vitesse constante c_0. Rappelons que le long d'une bicaractéristique

$$\varphi(x, y, t) = \text{const} = 0.$$

La fig. 33 montre où se déplace la frontière $\varphi(x, y, t) = 0$ dans le petit temps t.

Rappelons-nous à présent le théorème d'unicité que nous avons étudié. En vertu de ce théorème, les données initiales connues à l'instant $t = 0$ dans le domaine $\varphi(x, y, t) < 0$ déterminent univoquement la solution pour $t > 0$ dans le domaine $\varphi(x, y, t) < 0$.

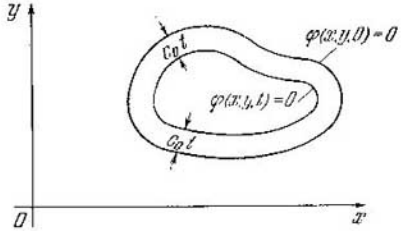

Fig. 33

Pourquoi les dimensions du domaine décroissent-elles sur notre figure lorsque t croît ? Si l'on se rappelle que la vitesse du mouvement de la frontière de ce domaine porte le nom de « vitesse du son », on peut donner à ce fait l'interprétation intuitive non rigoureuse mais juste. Que l'on connaisse les données initiales dans le domaine $\varphi(x, y, 0) < 0$ ne signifie pas encore qu'elles n'existent pas pour $\varphi(x, y, 0) > 0$. Tout simplement, elles nous y sont inconnues. L'influence de ces données initiales se propage avec la vitesse du son c_0. A chaque instant t la courbe $\varphi(x, y, t) = 0$ sépare le domaine où est arrivée l'influence des données initiales qui nous sont inconnues du domaine non atteint par l'influence de ces données initiales. Aussi rien d'étonnant à ce que la frontière $\varphi(x, y, t) = 0$ se meuve vers l'intérieur du domaine $\varphi < 0$ avec la vitesse c_0. Qui plus est, utilisant cette interprétation intuitive, il n'est pas difficile de comprendre comment varie au cours du temps t le domaine d'unicité dans les cas où la frontière du domaine initial $\varphi_0(x, y) = 0$ présente des angles.

L'équation d'Hamilton-Jacobi

$$\varphi_t - c_0 \sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2} = 0$$

a, par exemple, les solutions suivantes, qui sont des fonctions linéaires de x, y, t :

$$\varphi = c_0 t + \alpha x + \beta y + \gamma \quad (\alpha^2 + \beta^2 = 1).$$

Notamment, telles sont les solutions

$$\varphi_1 = \varphi_1(x, y, t) = c_0 t - x - 3,$$
$$\varphi_2 = \varphi_2(x, y, t) = c_0 t + x,$$
$$\varphi_3 = \varphi_3(x, y, t) = c_0 t + y,$$
$$\varphi_4 = \varphi_4(x, y, t) = c_0 t - y - 1.$$

La fonction régulière par morceaux

$$\varphi(x, y, t) = \min(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4) =$$
$$= \min[c_0 t - x - 3,\ c_0 t + x,\ c_0 t + y,\ c_0 t - y - 1]$$

est, dans chaque domaine de régularité, solution de l'équation

$$\varphi_t = c_0 \sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2}.$$

C'est pourquoi si dans ces domaines de régularité l'on dirige le vecteur unité (τ, ξ, η) suivant la normale extérieure à la frontière du domaine $\varphi < 0$, il vient

$$\iint\limits_{\varphi=0} [\tau(Au, u) + \xi(Bu, u) + \eta(Cu, u)]\, ds \geqslant 0.$$

(Cette intégrale peut être décomposée en la somme d'intégrales prises sur les domaines de régularité de la surface $\varphi = 0$.)

Le domaine $\varphi < 0$, $t > 0$ est le domaine d'unicité des équations de l'acoustique. Examinons-le de plus près. L'inégalité $\varphi(x, y, 0) <$

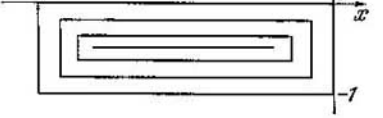

Fig. 34

< 0 distingue dans le plan $t = 0$ le rectangle $-3 < x < 0$, $-1 < y < 0$ représenté sur la fig. 34. Lorsque t croît, la frontière $\varphi = 0$ se déplace vers l'intérieur du rectangle initial. La vitesse normale de ce déplacement vaut c_0. On voit sur la figure comment avec le temps le domaine $\varphi < 0$ diminue. Lorsque $t = \frac{1}{2c_0}$ les frontières horizontales sont venues en coïncidence, et dès cet instant le domaine cesse d'exister.

Si l'on représente ce domaine dans l'espace x, y, t, il a l'aspect d'un remblai (fig. 35). Les conditions initiales données sur la base

de ce remblai déterminent une solution unique partout dans le remblai. Les surfaces latérales du remblai, qui délimitent le domaine d'unicité, sont les caractéristiques des équations de l'acoustique. Toutes les caractéristiques ne conviennent pas à la délimitation du

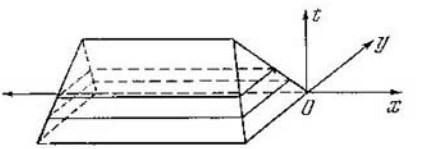

Fig. 35

domaine d'unicité — il faut que leurs normales appartiennent à la frontière du cône des formes définies positives. L'équation d'Hamilton-Jacobi distingue précisément de telles caractéristiques.

Voici encore un important exemple de domaine d'unicité pour ce même système. Supposons à présent que le domaine où sont données les conditions initiales soit le cercle $\sqrt{x^2+y^2} \leqslant R$. Considérons la fonction

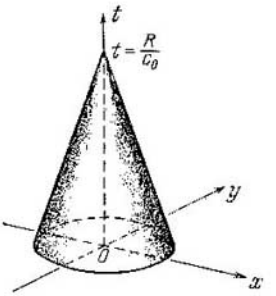

Fig. 36

$$\varphi(x, y, t) = \sqrt{x^2+y^2} + c_0 t - R.$$

Elle satisfait à l'équation

$$\varphi_t - c_0\sqrt{\varphi_x^2+\varphi_y^2} = 0$$

et aux données initiales

$$\varphi(x, y, 0) = \sqrt{x^2+y^2} - R$$

($\varphi(x, y, 0) < 0$ dans le cercle). C'est pourquoi la surface

$$\sqrt{x^2+y^2} + c_0 t - R = 0$$

est la frontière du domaine d'unicité (fig. 36). Cette frontière est une surface conique de sommet au point $x = 0$, $y = 0$, $t = \frac{R}{c_0}$. Pour $t > \frac{R}{c_0}$ cette surface $\sqrt{x^2+y^2} + c_0 t - R = 0$ cesse d'exister. Sur la frontière d'existence elle a un point singulier — le sommet du cône.

Il est clair que l'image géométrique ne change pas si le centre du cercle se trouve non pas à l'origine des coordonnées, mais en un point quelconque (x_0, y_0). Ceci permet de dire que la solution à un instant $t = t_0$ au point (x_0, y_0) ne dépend que des données initiales à l'instant $t = 0$ dans le domaine G si le cône caractéristique

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - c_0^2 (t - t_0)^2 = 0$ (plus exactement sa nappe pour $t < t_0$) s'appuie pour $t = 0$ sur un cercle tout entier contenu dans le domaine G (fig. 37).

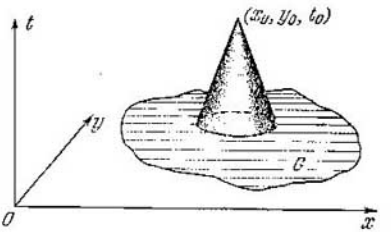

Fig. 37

Le domaine d'unicité total est la réunion de tels cônes (caractéristiques) qui s'appuient par la base sur le domaine G.

Problème. Décrivez la structure du domaine d'unicité pour le cas où les conditions initiales pour le même système sont données dans le domaine représenté sur la fig. 38. Aux sommets du polygone sont mises entre parenthèses les coordonnées (x, y) de ces sommets.

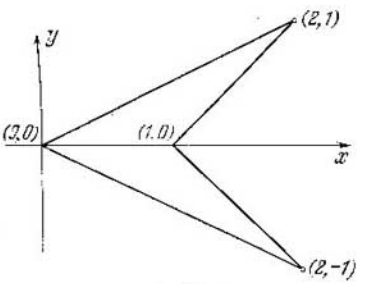

Fig. 38

Nous avons défini une surface caractéristique comme une surface dont la normale (τ, ξ, η) est située sur le cône des normales caractéristiques

$$\det \| \tau A + \xi B + \eta C \| = 0.$$

Supposons que le vecteur (τ, ξ, η) décrive un tel cône. Faisons correspondre à chacun de ces vecteurs un plan normal :

$$\tau (t - t_0) + \xi (x - x_0) + \eta (y - y_0) = 0.$$

Lorsque (τ, ξ, η) décrit le cône des normales caractéristiques, ces plans enveloppent un autre cône. Il est clair que si une surface possède une normale située sur le cône des normales caractéristiques, elle est elle-même tangente à l'un des plans

$$\tau (t - t_0) + \xi (x - x_0) + \eta (y - y_0) = 0$$

et au cône enveloppé par ces plans. Ce dernier est appelé *cône des caractéristiques*.

Illustrons la notion de cône de caractéristiques sur l'exemple des équations du son dans un gaz en mouvement. Le cône des normales

caractéristiques pour ces équations est donné, on le sait, par l'égalité

$$(\tau + U\xi)\,[(\tau + U\xi)^2 - c_0^2\,(\xi^2 + \eta^2)] = 0.$$

Les plans $\tau\,(t - t_0) + \xi\,(x - x_0) + \eta\,(y - y_0) = 0$, orthogonaux aux vecteurs (τ, ξ, η) liés par l'égalité $\tau + U\xi = 0$, passent par la droite $x - Ut = x_0 - Ut_0$, $y = y_0$, ce que montre l'identité

$$\begin{aligned}\tau\,(t - t_0) + \xi\,(x - x_0) + \eta\,(y - y_0) &= -U\xi\,(t - t_0) + \\ &+ \xi\,(x - x_0) + \eta\,(y - y_0) = \\ &= \xi\,[x - Ut - (x_0 - Ut_0)] + \eta\,(y - y_0) = 0.\end{aligned}$$

Cette droite est précisément le « cône » qui s'obtient comme enveloppe des plans dont la normale est située dans le plan $\tau + U\xi = 0$.

Si les vecteurs (τ, ξ, η) engendrent le cône $(\tau + U\xi)^2 - c_0^2\,(\xi^2 + \eta^2) = 0$, les plans qui leurs sont normaux enveloppent le cône

$$\begin{aligned}\varphi\,(x, y, t) = c_0^2\,(t - t_0)^2 - [(x - Ut) - \\ - (x_0 - Ut_0)]^2 - (y - y_0)^2 = 0.\end{aligned}$$

Il est facile de s'en convaincre en vérifiant par un calcul direct que la fonction $\varphi\,(x, y, t)$ satisfait à l'équation

$$(\varphi_t + U\varphi_x)^2 - c_0^2\,(\varphi_x^2 + \varphi_y^2) = 0.$$

De sorte que pour les équations de la propagation du son le cône des normales caractéristiques est constitué par le plan

$$\tau + U\xi = 0$$

et le cône

$$(\tau + U\xi)^2 - c_0^2\,(\xi^2 + \eta^2) = 0,$$

alors que le cône des caractéristiques se décompose en la droite $x - Ut = x_0 - Ut_0$, $y = y_0$ et le cône

$$c_0^2\,(t - t_0)^2 - [(x - Ut) - (x_0 - Ut_0)]^2 - (y - y_0)^2 = 0.$$

La disposition du cône des caractéristiques de sommet à l'origine des coordonnées $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $t_0 = 0$ est représentée sur la fig. 39 dans le cas subsonique ($|U| < c_0$), et sur la fig. 40 dans le cas supersonique ($|U| > c_0$). Le cône des caractéristiques pour les équations considérées (plus exactement, l'une de ses nappes) est toujours situé dans le demi-espace supérieur et ne contient l'axe des t que dans le cas subsonique. (Comparez le croquis du cône des caractéristiques avec celui du cône des normales caractéristiques, examiné au début de ce paragraphe : fig. 31, cas supersonique.)

En conclusion, nous donnerons le domaine d'unicité pour les équations du son dans un gaz en mouvement, lorsque les conditions

initiales sont données pour $\varphi(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} - R < 0$, c'est-à-dire dans le cercle de rayon R et de centre à l'origine des coordon-

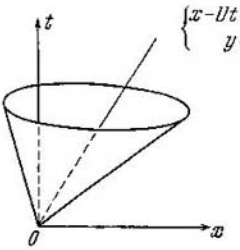

Fig. 39

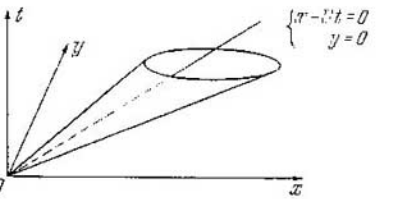

Fig. 40

nées. La solution de l'équation d'Hamilton-Jacobi

$$\varphi_t + U\varphi_x - c_0\sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2} = 0$$

avec la condition initiale

$$\varphi(x, y, 0) = \sqrt{x^2 + y^2} - R$$

est donnée par la formule

$$\varphi(x, y, t) = \sqrt{(x - Ut)^2 + y^2} + c_0 t - R.$$

La surface

$$\sqrt{(x - Ut)^2 + y^2} + c_0 t - R = 0,$$

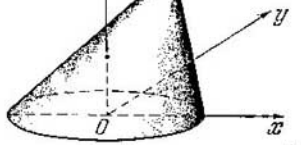

Fig. 41

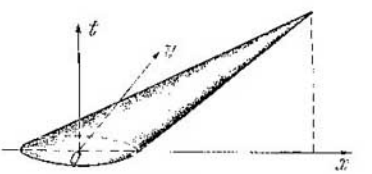

Fig. 42

qui délimite le domaine d'unicité requis représente une nappe du cône caractéristique de sommet au point

$$t_0 = \frac{R}{c_0},\quad x_0 = Ut_0 = \frac{UR}{c_0},\quad y_0 = 0.$$

La disposition du domaine d'unicité dans l'espace x, y, t est représentée sur les fig. 41 (cas subsonique) et 42 (cas supersonique).

§ 13. Position du problème mixte pour le système hyperbolique

Etude (sur un exemple) de la position des conditions aux limites pour un système hyperbolique. Nombre de conditions que l'on doit se donner sur telle ou telle frontière pour que le problème ait une solution unique. Conditions de concordance des données initiales et des conditions aux limites (sur un exemple). Conditions aux limites dissipatives. Un système hyperbolique peut être réduit à la forme canonique de telle façon que les conditions aux limites deviennent dissipatives.

Dans les prochains paragraphes nous étudierons les méthodes qui donnent les évaluations des solutions et le théorème d'unicité pour les systèmes hyperboliques dans le cas où le problème étudié n'est pas un problème de Cauchy. Nous montrerons que, outre les conditions initiales, il y a lieu parfois de se donner encore certaines conditions aux limites.

Par exemple, résolvant l'équation $\frac{du}{dt} + \frac{du}{dx} = 0$ pour $x > 0$, on peut se donner les valeurs de u non seulement pour $t = 0$, mais aussi

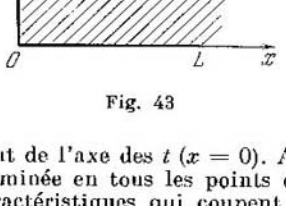

Fig. 43

sur un certain segment de l'axe des t ($x = 0$). Alors la solution $u = f(x - t)$ est déterminée en tous les points du plan x, t par lesquels passent les caractéristiques qui coupent le domaine où sont données les conditions initiales et les conditions aux limites. S'il y a lieu de chercher la solution seulement pour $x > 0$, $t > 0$, alors son domaine de définition a la forme représentée sur la fig. 43. Nous avons déjà rencontré cet exemple au § 5. Les données initiales régulières

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant L,$$
$$u(0, t) = \psi(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T$$

doivent, bien entendu, vérifier la condition de concordance $\varphi(0) = \psi(0)$, afin que la solution $u(x, t)$ soit continue sur la caractéristique $x - t = 0$. Comme on a $\frac{du}{dt} = -\frac{du}{dx}$ en vertu de l'équation, pour la continuité des dérivées au point (0, 0) il faut exiger l'égalité $\psi'(0) = -\varphi'(0)$.

Si l'on sait que $u(x, t)$ est deux fois continûment dérivable, $\varphi(x)$, $\psi(t)$ vérifient encore l'égalité $\varphi''(0) - \psi''(0) = 0$. En effet, les égalités suivantes sont vérifiées pour les solutions

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

La différence des premiers membres de ces égalités est

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

Cette égalité considérée au point $x = 0$, $t = 0$ se transforme précisément en la condition formulée $\varphi''(0) - \psi''(0) = 0$.

Problème. Déduire les conditions de concordance au point $x = 0$, $t = 0$ des dérivées troisièmes et quatrièmes des conditions initiales et aux limites. Rappelons que l'on étudie les solutions de l'équation $u_t + u_x = 0$ pour lesquelles $u(x, 0) = \varphi(x)$, $u(0, t) = \psi(t)$.

Plus grande nous voulons la régularité de la solution, plus rigides doivent être les conditions de concordance imposées aux conditions initiales et aux limites. Nous aurons affaire aux conditions de concordance au cours de la démonstration du théorème d'existence. Mais nous n'en parlerons pas en général lorsque nous étudierons le théorème d'unicité. Il suffira de supposer que tel ou tel problème a une solution suffisamment régulière, et peu importe pour l'instant moyennant quelle concordance cette régularité est obtenue.

Pour comprendre quelles sont les conditions aux limites qui doivent être posées pour tels systèmes hyperboliques, envisageons l'exemple suivant.

Soit à étudier dans le domaine $0 \leqslant x \leqslant L$, $t \geqslant 0$ les solutions du système

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial u_1}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + 2\frac{\partial u_2}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial t} - \frac{\partial u_3}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial u_4}{\partial t} = 0.$$

Ce système possède deux familles de caractéristiques de pente positive

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 1, \\ du_1 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2, \\ du_2 = 0. \end{cases}$$

une famille de pente négative

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -1, \\ du_3 = 0 \end{cases}$$

et une famille verticale

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 0, \\ du_4 = 0. \end{cases}$$

Pour déterminer la fonction u_4 il suffit de se borner aux données initiales

$$u_4(x, 0) = \varphi_4(x),$$

puisque u_4 est constante le long des caractéristiques verticales. Ces caractéristiques sont représentées sur la fig. 44. Les valeurs de u_4

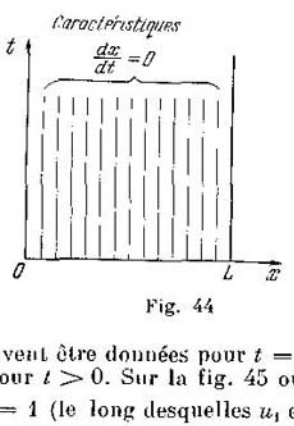

Fig. 44

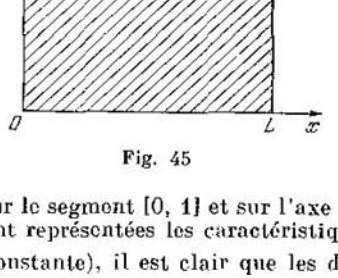

Fig. 45

doivent être données pour $t = 0$ sur le segment $[0, 1]$ et sur l'axe des t pour $t > 0$. Sur la fig. 45 où sont représentées les caractéristiques $\frac{dx}{dt} = 1$ (le long desquelles u_1 est constante), il est clair que les données initiales

$$u_1(x, 0) = \varphi_1(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant L,$$
$$u_1(0, t) = \psi_1(t), \quad 0 \leqslant t,$$

déterminent la solution partout dans le domaine envisagé.

De même, pour déterminer $u_2(x, t)$ il suffit de se donner

$$u_2(x, 0) = \varphi_2(x), \; u_2(0, t) = \psi_2(t).$$

La fonction $u_3(x, t)$ est déterminée d'après ses valeurs sur la base $(t = 0, 0 \leqslant x \leqslant L)$ et sur la frontière de droite $(x = L, t \geqslant 0)$ du domaine. Cela est évident sur la figure (fig. 46), où l'on a représenté les droites sur lesquelles u_3 est constante (les caractéristiques $\frac{dx}{dt} =$

$= -1$). On pose

$$u_3(x, 0) = \varphi_3(x) \ (0 \leqslant x \leqslant L), \ u_3(L, t) = \psi_3(t) \ (t \geqslant 0).$$

Ainsi, on voit que la solution du système dans le domaine choisi est complètement déterminée par les conditions initiales et aux limites suivantes.

Conditions initiales

$$u_1(x, 0) = \varphi_1(x), \ u_2(x, 0) = \varphi_2(x),$$

pour $t = 0, \ 0 \leqslant x \leqslant L.$

$$u_3(x, 0) = \varphi_3(x), \ u_4(x, 0) = \varphi_4(x).$$

Conditions aux limites sur la frontière de gauche

$$u_1(0, t) = \psi_1(t),$$

pour $x = 0, \ t \geqslant 0.$

$$u_2(0, t) = \psi_2(t)$$

Conditions aux limites sur la frontière de droite

$$u_3(L, t) = \psi_3(t) \text{ pour } x = L, \ t \geqslant 0.$$

Nous avons été obligés de donner différents nombres de conditions sur les diverses frontières. On doit se donner sur la frontière de gauche autant de conditions que notre système a de caractéristiques de pente positive $\frac{dx}{dt}$. A mesure que t croît, ces caractéristiques s'éloignent de la frontière de gauche, emportant de là les valeurs des invariants de Riemann correspondants. Nous dirons que pour la

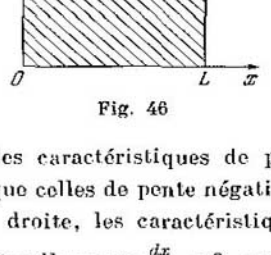

Fig. 46

frontière de gauche les caractéristiques de pente positive $\frac{dx}{dt} > 0$ sont « partantes », et que celles de pente négative sont « incidentes ». Pour la frontière de droite, les caractéristiques avec $\frac{dx}{dt} > 0$ sont dites « incidentes », et celles avec $\frac{dx}{dt} < 0$, « partantes ».

Dans l'exemple examiné, nous avons été obligés de poser sur chaque frontière autant de conditions aux limites qu'on a sur cette

frontière de familles de caractéristiques qui en « partent ». Ces conditions aux limites peuvent être de forme plus compliquée. Soit, par exemple

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= \alpha_{13}u_3 + \alpha_{14}u_4 + \psi_1(t), \\ u_2 &= \alpha_{23}u_3 + \alpha_{24}u_4 + \psi_2(t) \end{aligned}\right\} \text{ sur la frontière de gauche,}$$

$u_3 = \beta_{31}u_1 + \beta_{32}u_2 + \beta_{34}u_4 + \psi_3(t)$ sur la frontière de droite.

En se donnant ces conditions aux limites et en indiquant les conditions initiales pour $t = 0$: $u_1(x, 0) = \varphi_1(x)$, $u_2(x, 0) = \varphi_2(x)$, $u_3(x, 0) = \psi_3(x)$, $u_4(x, 0) = \varphi_4(x)$, prenons T de telle façon que pendant le temps T aucune des caractéristiques n'ait le temps de couper notre bande $0 \leqslant x \leqslant L$, d'une frontière à l'autre. Il suffit que

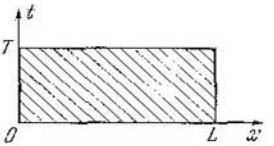

Fig. 47

$$T \max \left| \frac{dx}{dt} \right| < \frac{L}{2}$$

$\left(\frac{dx}{dt}\right.$ est la pente des caractéristiques$\left.\right)$. Dans le système d'équations de notre exemple $\max \left| \frac{dx}{dt} \right|$, qui est la pente maximum des caractéristiques, vaut 2. Aussi peut-on prendre

$$T = \frac{L}{8} = \frac{1}{2} \frac{\frac{L}{2}}{\max \left| \frac{dx}{dt} \right|}.$$

Pour $0 \leqslant t \leqslant T$ les valeurs de u_3 sur la frontière gauche sont exclusivement déterminées par les conditions initiales, sans qu'on ait à utiliser des conditions aux limites quelles qu'elles soient. On le voit clairement si l'on se reporte à la fig. 47, où sont représentées les caractéristiques $\frac{dx}{dt} = -1$ le long desquelles u_3 est constante.

Pour déterminer u_4 partout dans le domaine envisagé, y compris la frontière de gauche, ainsi que nous l'avons déjà dit, les données initiales suffisent. On voit que pour $0 \leqslant t \leqslant T$ et $x = 0$ on peut trouver $u_3(0, t)$, $u_4(0, t)$, et puis calculer leurs combinaisons

$$\alpha_{13}u_3 + \alpha_{14}u_4 + \psi_1(t), \qquad \alpha_{23}u_3 + \alpha_{24}u_4 + \psi_2(t).$$

Ces combinaisons, en vertu des conditions aux limites, sont égales à $u_1(0, t)$, $u_2(0, t)$.

De même sur la frontière de droite pour $0 \leqslant t \leqslant T$ les données initiales suffisent à déterminer les valeurs de u_1, u_2, lesquelles valeurs sont « apportées » à cette frontière par les caractéristiques de pentes $\frac{dx}{dt} = 1$, $\frac{dx}{dt} = 2$. Les données initiales déterminent aussi la valeur aux limites de u_4. D'après la formule

$$u_3 = \beta_{31}u_1 + \beta_{32}u_2 + \beta_{34}u_4 + \psi_4(t)$$

ceci permet de calculer u_3.

Ayant déterminé sur la frontière de gauche u_1, u_2 et sur celle de droite u_3, nous avons ramené le problème au cas déjà étudié et nous sommes à présent en état de déterminer $u_1(x, t)$, $u_2(x, t)$, $u_3(x, t)$, $u_4(x, t)$ partout dans le rectangle $0 \leqslant t \leqslant T$, $0 \leqslant x \leqslant L$. Puis, prenant pour données initiales les valeurs pour $t = T$, on trouve exactement de la même façon la solution pour $T \leqslant t \leqslant 2T$.

En progressant par de tels intervalles temporels, on trouve successivement les fonctions cherchées pour $2T \leqslant t \leqslant 3T$, $3T \leqslant t \leqslant 4T$, etc., c'est-à-dire pour tous les $t > 0$.

Pour un système hyperbolique arbitraire, il se trouve que le nombre requis de conditions aux limites et leur forme se déterminent exactement de la même manière que dans l'exemple traité. On doit laisser sur chaque frontière autant de conditions qu'il part de familles de caractéristiques de cette frontière. Ces conditions doivent être telles qu'elles puissent être résolues par rapport aux « invariants de Riemann » correspondant aux caractéristiques partantes.

Nous nous bornerons par la suite à l'étude des systèmes qui n'ont pas de caractéristiques verticales. Et même nous supposerons que, dans les domaines envisagés, $\left|\frac{dx}{dt}\right|$ (la valeur absolue de la vitesse caractéristique) est inférieurement bornée par une constante positive.

Supposons le système hyperbolique d'équations donné sous forme canonique

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + k_i \frac{\partial u_i}{\partial x} + \sum_{l=1}^{n} m_{il}u_l = f_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n_0),$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} - k_i \frac{\partial u_i}{\partial x} + \sum_{l=1}^{n} m_{il}u_l = f_i \quad (i = n_0 + 1, \ldots, n),$$

$$k_i > 0$$

dans la bande $0 \leqslant x \leqslant L$ pour $0 \leqslant t \leqslant T$.

Considérons pour ce système les conditions aux limites suivantes

$$u_i = \sum_{j=n_0+1}^{n} \alpha_{ij} u_j \text{ pour } x = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n_0),$$

$$u_i = \sum_{j=1}^{n_0} \beta_{ij} u_j \text{ pour } x = l \quad (i = n_0 + 1, \ldots, n).$$

Pour la simplicité, nous nous bornerons à des conditions aux limites homogènes, dont les coefficients α_{ij}, β_{ij} sont des fonctions régulières de t. Les données initiales pour le problème décrit sont prises sous la forme

$$u_i(x, 0) = \varphi_i(x).$$

On peut montrer que le problème ainsi posé a une solution, et cette solution est unique, si l'on impose au système et aux données initiales certaines restrictions de régularité. Qui plus est, on peut montrer que la solution d'un tel problème dépend continûment des conditions initiales, des coefficients et des seconds membres du système, des coefficients des conditions aux limites.

La démonstration des faits énumérés prouve par ailleurs que le problème est bien posé. Quant aux raisonnements faits sur un exemple type, ils ne sauraient être interprétés que comme des considérations suggestives permettant de bien poser le problème.

Nous ferons d'abord la démonstration du théorème d'unicité. Le théorème de la dépendance continue des solutions par rapport au données du problème et le théorème d'existence seront examinés plus tard. Lors de leur démonstration, nous restreindrons encore la classe des problèmes envisagés pour faciliter la déduction.

Lors de l'étude du théorème d'unicité on n'aura pas recours à des restrictions supplémentaires quelles qu'elles soient. Démontrant le théorème d'unicité, nous obtiendrons de même certaines évaluations de la solution et de ses dérivées.

Avant d'aborder la démonstration (elle sera faite au prochain paragraphe), nous nous servirons de l'arbitraire dans la réduction du système à la forme canonique. Nous avons déjà indiqué l'existence d'un tel arbitraire. Multiplions chacune des équations du système

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} \pm k_i \frac{\partial u_i}{\partial x} + \sum_l m_{il} u_l = f_i$$

par un facteur positif régulier quelconque $\mu = \mu_i(x, t) > 0$. Le résultat de cette multiplication peut s'écrire sous la forme:

$$\frac{\partial \mu_i u_i}{\partial t} \pm k_i \frac{\partial \mu_i u_i}{\partial x} - \frac{\frac{\partial \mu_i}{\partial t} \pm k_i \frac{\partial \mu_i}{\partial x}}{\mu_i} \mu_i u_i + \sum_l \frac{\mu_i}{\mu_l} m_{il} \mu_l u_l = \mu_i f_i.$$

Désignant $\mu_i u_i$ par v_i, on obtient pour ces nouvelles fonctions inconnues encore une fois un système canonique d'équations hyperboliques

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} \pm k_i \frac{\partial v_i}{\partial x} + \sum_l \hat{m}_{il} v_l = \hat{f}_i.$$

Les racines caractéristiques $k_i(x, t)$ de ce système sont les mêmes que pour le système initial, mais les coefficients $\hat{m}_{il}$ et les seconds membres $\hat{f}_i$ sont différents. Les conditions aux limites

$$u_i = \sum_{j=n_0+1}^{n} \alpha_{ij} u_j \quad (i = 1, 2, \ldots, n_0) \text{ pour } x = 0,$$

$$u_i = \sum_{j=1}^{n_0} \beta_{ij} u_j \quad (i = n_0 + 1, \ldots, n) \text{ pour } x = L$$

deviennent pour les inconnues $v_i = \mu_i u_i$:

$$v_i = \sum_{j=n_0+1}^{n} \frac{\mu_i}{\mu_j} \alpha_{ij} v_j \quad (i = 1, 2, \ldots, n_0) \text{ pour } x = 0,$$

$$v_i = \sum_{j=1}^{n_0} \frac{\mu_i}{\mu_j} \beta_{ij} v_j \quad (i = n_0 + 1, \ldots, n) \text{ pour } x = L.$$

Il est remarquable que les μ_i figurant aux numérateurs correspondent aux numéros liés aux caractéristiques « partantes », et que les μ_j aux dénominateurs ont les mêmes indices j que les caractéristiques « incidentes ». On peut choisir les fonctions $\mu_i(x, t)$ de telle façon que tous les éléments de matrices des conditions aux limites pour $v_1, v_2, \ldots, v_n$ soient en valeur absolue plus petits qu'un nombre arbitraire fixe donné. Bien entendu, réduisant ces éléments, nous changerons et, en règle générale, nous augmenterons $\hat{m}_{il}$, $\hat{f}_i$ et leurs dérivées.

Nous allons donner maintenant une définition importante, dont le sens sera dégagé au paragraphe suivant quand on fera la démonstration du théorème d'unicité.

Les conditions aux limites données sur l'une des frontières sont dites dissipatives si, aux points de cette frontière, on a pour tout vecteur fonction $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ satisfaisant aux conditions aux limites, l'inégalité

$$-\sum_{\substack{\text{sur les } i \\ \text{incidents}}} k_i u_i^2 + \sum_{\substack{\text{sur les } i \\ \text{partants}}} k_i u_i^2 \leqslant 0.$$

(Ecrivant « sur les i incidents », nous avons en vue que la sommation porte sur tous les i pour lesquels la caractéristique correspondante

est incidente. Même remarque en ce qui concerne l'abréviation « sur les i partants ».)

Nous allons nous servir de la liberté dans le choix des facteurs normalisants $\mu_i(x, t)$ pour rendre les conditions aux limites dissipatives.

Envisageons, par exemple, la frontière de gauche avec les conditions aux limites

$$v_i = \sum_{j=n_0+1}^{n} \frac{\mu_i}{\mu_j} \alpha_{ij} v_j \quad (i = 1, 2, \ldots, n_0)$$

et substituons ces $v_1, v_2, \ldots, v_{n_0}$ dans l'expression

$$-\sum_{\substack{\text{sur les } i \\ \text{incidents}}} k_i v_i^2 - \sum_{\substack{\text{sur les } i \\ \text{partants}}} k_i v_i^2 = -\sum_{i=n_0+1}^{n} k_i v_i^2 + \sum_{i=1}^{n_0} k_i v_i^2 =$$

$$= -\sum_{i=n_0+1}^{n} k_i v_i^2 + \sum_{i=1}^{n_0} k_i \left(\sum_{j=n_0+1}^{n} \frac{\mu_i}{\mu_j} \alpha_{ij} v_j \right)^2.$$

A l'issue de cette substitution, la première somme est devenue une forme définie négative de $v_{n_0+1}, v_{n_0+2}, \ldots, v_n$, et la seconde une certaine autre forme de ces variables. Choisissant les μ_i, on peut rendre tous les coefficients de cette seconde forme suffisamment petits, et donc la somme totale définie négative. Pour ces μ_i les conditions aux limites pour $v_1, v_2, \ldots, v_n$ seront dissipatives.

Qui plus est, les conditions aux limites seront strictement dissipatives. Nous appellerons ainsi les conditions pour lesquelles on a l'inégalité suivante, quel que soit le vecteur fonction vérifiant les conditions aux limites :

$$-\sum_{\substack{\text{sur les } i \\ \text{incidents}}} k_i u_i^2 + \sum_{\substack{\text{sur les } i \\ \text{partants}}} k_i u_i^2 \leqslant -k_0 \sum_{\substack{\text{sur les } i \\ \text{incidents}}} u_i^2, \; k_0 > 0.$$

Choisissant les μ_i séparément sur la frontière gauche et sur la frontière droite de façon à satisfaire aux conditions de dissipation, on peut ensuite construire partout dans le rectangle des fonctions régulières $\mu_i(x, t)$ telles que sur les frontières elles coïncident avec celles qui y ont été choisies.

Considérant dans la suite le système

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + k_i \frac{\partial u_i}{\partial x} + \sum_{l=1}^{n} m_{il} u_l = f_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n_0,$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} - k_i \frac{\partial u_i}{\partial x} + \sum_{l=1}^{n} m_{il} u_l = f_i, \quad i = n_0 + 1, \ldots, n,$$

avec les conditions aux limites

$$u_i = \sum_{j=n_0+1}^{n} \alpha_{ij} u_j \quad (i = 1, 2, \ldots, n_0) \text{ pour } x = 0,$$

$$u_i = \sum_{j=1}^{n_0} \beta_{ij} u_j \quad (i = n_0 + 1, \ldots, n) \text{ pour } x = L,$$

il nous sera toujours permis de supposer ce problème dissipatif, voir strictement dissipatif.

La démonstration du théorème d'unicité pour les systèmes dissipatifs est donnée au paragraphe suivant.

§ 14. Théorème d'unicité de la solution du problème mixte

Position du problème mixte avec des conditions aux limites dissipatives. Evaluation de la solution et théorème d'unicite. Elargissement du système d'équations et des conditions aux limites du problème. Déduction des évaluations des dérivées. Aperçu des évaluations des solutions pour les systèmes hyperboliques symétriques. Conditions de concordance des données initiales et des conditions aux limites. Dépendance continue des solutions par rapport aux conditions du problème. Notions de problèmes réversibles. Exemples d'étude de positions de conditions aux limites pour les systèmes hyperboliques.

Passons directement à la démonstration du théorème d'unicité et à la déduction des évaluations pour la solution du problème mixte dissipatif.

Nous envisageons pour $0 \leqslant x \leqslant L$, $t \geqslant 0$ les solutions du système

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + k_i \frac{\partial u_i}{\partial x} + \sum_{l=1}^{n} m_{il} u_l = f_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n_0,$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} - k_i \frac{\partial u_i}{\partial x} + \sum_{l=1}^{n} m_{il} u_l = f_i, \quad i = n_0 + 1, \ldots, n,$$

avec les conditions aux limites

$$u_i = \sum_{j=n_0+1}^{n} \alpha_{ij} u_j, \quad i = 1, 2, \ldots, n_0 \quad \text{pour } x = 0,$$

$$u_i = \sum_{j=1}^{n_0} \beta_{ij} u_j, \quad i = n_0 + 1, \ldots, n \quad \text{pour } x = L.$$

Les conditions initiales pour ce problème sont données sous la forme

$$u_i(x, 0) = \varphi_i(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant L, \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Le problème ainsi posé est dit *mixte*, étant donné qu'il exige que les solutions vérifient non seulement des conditions initiales, mais aussi des conditions aux limites. Supposons observées sur les deux frontières les conditions de dissipation. A savoir, supposons que, quelles que soient les fonctions $u_i(x, t)$ vérifiant les conditions aux limites, l'on ait sur chacune des frontières les inégalités

$$-\sum_{\substack{\text{sur les } i \\ \text{incidents}}} k_i u_i^2 + \sum_{\substack{\text{sur les } i \\ \text{partants}}} k_i u_i^2 \leqslant 0.$$

Notre système est donné sous forme de système hyperbolique symétrique

$$E\frac{\partial u}{\partial t} + K\frac{\partial u}{\partial x} + mu = f$$

avec les matrices suivantes

$$E = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} k_1 & & & & 0 \\ & k_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & k_{n_0} & \\ & & & & -k_{n_0+1} \\ & & & & \ddots \\ 0 & & & & -k_n \end{pmatrix},$$

$$m = \| m_{ik} \|.$$

Nous avons montré que les solutions de ce système satisfont à l'identité suivante portant le nom d'intégrale d'énergie

$$\iint \left[\frac{\partial}{\partial t}(u, u) + \frac{\partial}{\partial x}(Ku, u)\right] dx\, dt = \oint (u, u)\, dx + (Ku, u)\, dt =$$

$$= \iint [(Du, u) + 2(f, u)]\, dx\, dt.$$

Les éléments de la matrice D peuvent être calculés d'après les éléments de la matrice $m = \| m_{ik} \|$ et d'après les dérivées des éléments de K, c'est-à-dire d'après les dérivées de $k_i(x, t)$.

Considérons le contour rectangulaire du plan x, t, délimité à droite et à gauche par des segments de droites verticales $x = 0$, $x = L$, et supérieurement et inférieurement par des segments de droites horizontales $t = t_1$, $t = t_2$. Un tel contour est représenté sur la fig. 48.

Considérant sur ce contour $(A_1A_2A_3A_4)$ l'intégrale d'énergie, nous sommes conduits à l'inégalité

$$\int_{A_3}^{A_2}\left(\sum_{i=1}^{n}u_i^2\right)dx \leqslant \int_{A_1}^{A_4}\left[-\sum_{\substack{\text{sur les } i\\ \text{incidents}}}k_iu_i^2+\sum_{\substack{\text{sur les } i\\ \text{partants}}}k_iu_i^2\right]dt+$$

$$+\int_{A_2}^{A_3}\left[-\sum_{\substack{\text{sur les } i\\ \text{incidents}}}k_iu_i^2+\sum_{\substack{\text{sur les } i\\ \text{partants}}}k_iu_i^2\right]dt+\int_{A_1}^{A_2}\left(\sum_{i=1}^{n}u_i^2\right)dx+$$

$$+M\int_{t_1}^{t_2}\left[\int_0^L\sum u_i^2(x,t)\,dx\right]dt+N\int_{t_1}^{t_2}\left[\sqrt{\int_0^L\sum u_i^2(x,t)\,dx}\right]dt.$$

Nous avons écrit ici une inégalité au lieu d'une égalité, étant donné que nous n'avons pas écrit en détail l'intégrale double dans

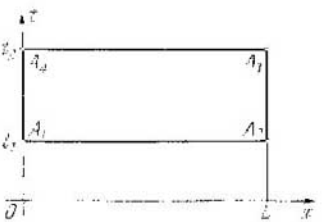

Fig. 48

le rectangle. Cette intégrale double a été renforcée. Les constantes M et N évaluent supérieurement respectivement la matrice D et le vecteur f des seconds membres. Un raisonnement analogue a été fait un peu plus en détail au § 10 lors de l'évaluation des intégrales d'énergie.

En vertu de la dissipativité, nous ne faisons que renforcer l'inégalité en rejetant les intégrales sur les frontières de gauche et de droite. Désignant pour abréger par $I(t)$ l'intégrale

$$I(t)=\int_0^L\sum_{i=1}^{n}u_i^2(x,t)\,dx,$$

on obtient pour elle l'inégalité déjà connue

$$I(t_2)\leqslant I(t_1)+\int_{t_1}^{t_2}\left[MI(t)+N\sqrt{I(t)}\right]dt.$$

où la constante N évalue supérieurement les seconds membres ($|f_i|$).

En vertu du lemme sur l'inégalité intégrale, on déduit de cette évaluation la restriction suivante sur la croissance des solutions:

$$\sqrt{I(t)} \leqslant \sqrt{I(0)}\, e^{\frac{M}{2}t} + N\,\frac{e^{\frac{M}{2}t}-1}{M}$$

Le théorème d'unicité résulte de cette inégalité. En effet, si l'on avait deux solutions du problème avec les mêmes seconds membres $f_i(x, t)$ et avec les mêmes données initiales $u_i(x, 0) = \varphi_i(x)$, la différence de ces solutions vérifierait le système homogène ($f_i = 0$) et des données initiales nulles. Envisageant le système homogène avec des données initiales nulles, nous devons considérer que $N = 0$, $I(0) = 0$. D'où $I(t) = 0$. L'unicité n'exige rien de plus. En réalité, nous avons obtenu un peu plus que la démonstration de l'unicité: nous avons obtenu l'évaluation des solutions au sens de la norme suivante

$$\| u \| = \max_{T \geqslant t \geqslant 0} \sqrt{\int_0^L \sum_{i=1}^{n} u_i^2(x, t)\, dx}.$$

Désignons par $\| u_0 \|_0$ la norme du vecteur fonction initial

$$\| u_0 \|_0 = \| u(x, 0) \|_0 = \sqrt{\int_0^L \sum_{i=1}^{n} u_i^2(x, 0)\, dx}.$$

Fixant un certain T, on peut écrire comme suit l'évaluation obtenue

$$\| u \| \leqslant \text{const} \{ \| u_0 \|_0 + \| f \| \}.$$

Si l'on veut évaluer non seulement la solution, mais aussi ses dérivées, on peut, ainsi qu'on l'a déjà noté, élargir le système envisagé en lui associant des équations pour les dérivées. Ces équations s'obtiennent par dérivation des équations initiales et par un certain groupement des termes.

Lorsqu'on traite le problème mixte, il est commode d'avoir recours à un procédé d'élargissement particulier, lequel a aussi été examiné. Dans ce procédé l'élargissement se fait en associant seulement les dérivées par rapport à t. Toutes les autres dérivées s'expriment d'après les dérivées partielles par rapport à t à l'aide des équations initiales ou d'équations qui s'en déduisent encore en dérivant par rapport à t.

Nous avons noté que pour procéder à un tel élargissement particulier il suffisait que la matrice B du système

$$A\frac{\partial u}{\partial t} + B\frac{\partial u}{\partial x} + Qu = f$$

fût non dégénérée.

Dans le cas ici envisagé du système canonique

$$E\frac{\partial u}{\partial t}+K\frac{\partial u}{\partial x}+mu=f$$

cette condition est remplie, étant donné que le rôle de la matrice B est ici tenu par la matrice diagonale K, dont les éléments diagonaux k_i sont non nuls.

Déduisons à présent les conditions aux limites pour le système élargi. Nous ne considérerons alors que la frontière gauche et nous n'élargirons le système qu'au compte des dérivées premières.

Les conditions aux limites du système initial ont la forme

$$u_i(0, t)=\sum_{j=n_0+1}^{n}\alpha_{ij}(t)\,u_j(0, t),\quad i=1, 2, \ldots, n_0.$$

En les dérivant par rapport à t et posant

$$\alpha'_{ij}=\frac{d}{dt}\alpha_{ij},$$

écrivons-les sous la forme suivante :

$$u_i(0, t)=\sum_{j=n_0+1}^{n}\alpha_{ij}(t)\,u_j(0, t),\quad i=1, 2, \ldots, n_0,$$

$$u_{it}(0, t)=\sum_{j=n_0+1}^{n}\alpha_{ij}(t)\,u_{jt}(0, t)+\sum_{j=n_0+1}^{n}\alpha'_{ij}(t)\,u_j(0, t).$$

Le système élargi a la forme

$$\begin{pmatrix}E & 0\\ 0 & E\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}u\\ u_t\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}K & 0\\ 0 & K\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix}u\\ u_t\end{pmatrix}+\text{termes d'ordre nul}=0.$$

Ce système élargi a pour invariants de Riemann u_i, u_{it}, et en vertu de la structure partitionnée de la matrice, la fonction u_i et sa dérivée u_{it} correspondent simultanément à une caractéristique incidente ou à une caractéristique partant de la frontière. En effet, les équations correspondantes sont de la forme

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+k_i\frac{\partial u_i}{\partial x}+\text{termes d'ordre nul}=0,$$

$$\frac{\partial u_{it}}{\partial t}+k_i\frac{\partial u_{it}}{\partial x}+\text{termes d'ordre nul}=0.$$

Les conditions aux limites déduites en dérivant les conditions aux limites initiales se trouvent être résolues par rapport aux invariants de Riemann liés aux caractéristiques partantes du système élargi. D'où la possibilité de ramener le système élargi à la forme dissipative, et donc la possibilité d'obtenir des évaluations de ses solutions. Ces évaluations donnent des évaluations pour les dérivées du système initial.

Il est intéressant et important de noter que dans le cas où les coefficients α_{ij} des conditions aux limites ne dépendent pas de t, alors pour le système élargi ils se décomposent en deux groupes indépendants :

$$u_i = \sum_{j=n_0+1}^{n} \alpha_{ij} u_j, \quad i = 1, 2, \ldots, n_0,$$

$$u_{it} = \sum_{j=n_0+1}^{n} \alpha_{ij} u_{jt}, \quad i = 1, 2, \ldots, n_0.$$

Les matrices $\| \alpha_{ij} \|$ dans ces deux groupes sont les mêmes. Si l'on se rappelle encore qu'aux invariants u_i, u_{it} correspondent des vitesses caractéristiques identiques k_i, il devient alors clair que le fait que le système initial soit dissipatif entraîne cette propriété pour le système élargi.

Dans le cas des α_{ij} constants il suffit de réduire à la forme dissipative le système initial seul. Par la suite, seuls seront, en règle générale, étudiés les problèmes mixtes pour lesquels les matrices α_{ij}, β_{ij} des conditions aux limites sont constantes.

On peut à présent jeter un coup d'œil en arrière et faire le résumé des évaluations obtenues pour les solutions.

Toutes ces évaluations ont été obtenues pour les systèmes hyperboliques symétriques. S'il fallait évaluer les dérivées, on élargissait le système initial en lui associant des équations pour ces dérivées. De telles équations s'obtiennent en dérivant le système initial. Pour que les dérivations puissent se faire, il faut que les solutions évaluées, les coefficients du système et ses seconds membres soient suffisamment réguliers. Nous avons indiqué des procédés d'élargissement par lesquels les systèmes élargis sont à nouveau hyperboliques symétriques.

Toutes les évaluations furent basées sur l'application de l'identité de l'intégrale d'énergie, qui a pour le système

$$A \frac{\partial u}{\partial t} + B \frac{\partial u}{\partial x} + C \frac{\partial u}{\partial y} + Qu = f$$

la forme

$$\int\int_S (|\tau A + \xi B + \eta C| u, u)\, ds = \int\int_G \int |(Du, u) + 2(f, u)|\, dx\, dy\, dt.$$

Ici G est un domaine, S sa frontière, (τ, ξ, η) la normale unité extérieure.

La matrice symétrique D est déterminée d'après les matrices du système initial par la formule

$$D = \frac{\partial}{\partial t} A + \frac{\partial}{\partial x} B + \frac{\partial}{\partial y} C - (Q + Q^*).$$

Faisant les évaluations, on prend la surface S sous forme de domaines plans situés dans les plans $t = t_1$, $t = t_2$, et d'une « frontière latérale » qui raccorde ces domaines. En tant que frontière latérale, on prend souvent la partie de la « calotte » comprise entre les plans $t = t_1$, $t = t_2$, la normale (τ, ξ, η) à laquelle vérifie l'inégalité

$$\tau + H(\xi, \eta, x, y, t) \geqslant 0.$$

Ici $H(\xi, \eta, x, y, t)$ est la fonction d'Hamilton-Jacobi, construite d'après les matrices A, B, C du système étudié à l'aide du procédé décrit en détail.

Un cas important est encore celui où sur la « frontière latérale » l'inégalité d'Hamilton-Jacobi n'est pas observée, mais où l'on sait en revanche que sur cette frontière sont remplies des conditions aux limites dissipatives. Ce cas n'a été étudié que pour deux variables indépendantes x, t pour un système hyperbolique sous forme canonique.

Etudiant les solutions du problème mixte, cas où les solutions vérifient, outre les conditions initiales, certaines conditions aux limites, on doit imposer aux données initiales, outre les conditions de régularité, des conditions de concordance des données initiales avec les conditions aux limites.

En effet, si l'on sait que la solution du problème est continue, les données initiales doivent, c'est évident, vérifier les conditions aux limites.

Si l on étudie le système élargi (pour évaluer les dérivées) et qu'on suppose que ce système élargi ait une solution continue, cela signifie que les données initiales de ce système vérifient ses conditions aux limites. Envisageons, par exemple, le système

$$A\frac{\partial u}{\partial t} + B\frac{\partial u}{\partial x} + \ldots = 0,$$

$$A\frac{\partial u_t}{\partial t} + B\frac{\partial u_t}{\partial x} + \ldots = 0.$$

Ses données initiales sont $u(x, 0)$, $u_t(x, 0)$. Celles-ci se calculent d'après $u(x, 0)$ et $u_x(x, 0)$ à l'aide du premier groupe d'équations $(Au_t + Bu_x + \ldots = 0)$. Les conditions de concordance consistent à exiger que les données initiales ainsi construites vérifient les conditions aux limites du système élargi, sur la déduction desquelles nous nous sommes longuement arrêtés plus haut.

Nous allons voir rapidement à présent comment notre technique permet d'obtenir le théorème de dépendance continue des solutions par rapport aux données initiales, aux seconds membres et aux coefficients des équations dans le cas des systèmes hyperboliques symétriques.

Nous évaluerons la différence des solutions de deux systèmes

$$A_1 \frac{\partial u_1}{\partial t} + B_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + C_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} + Q_1 u_1 = f_1,$$

$$A_2 \frac{\partial u_2}{\partial t} + B_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} + C_2 \frac{\partial u_2}{\partial y} + Q_2 u_2 = f_2$$

dans le domaine limité inférieurement par le plan $t = 0$, supérieurement par une « calotte » satisfaisant aux inégalités de Hamilton-Jacobi déduites à l'aide de l'un et de l'autre de ces systèmes.

Définissons la norme $\| v \|$ d'un certain vecteur fonction v comme suit :

$$\| v \| = \max_t \sqrt{\iint_{t=\text{const}} \left(\sum v_i^2 \right) dx\, dy}.$$

L'intégrale double ici est prise dans la partie interne de la section $t = \text{const}$ située dans la « calotte ». Supposons bornées, pour les solutions des deux systèmes, les normes

$$\| u_i \|, \quad \left\| \frac{\partial u_i}{\partial t} \right\|, \quad \left\| \frac{\partial u_i}{\partial x} \right\|.$$

Il suffit pour cela de supposer que les coefficients et les données initiales des deux systèmes sont suffisamment réguliers, mais nous passerons sur la démonstration de ce fait.

Considérons la différence des équations de nos systèmes. Cette différence peut être recopiée sous la forme de l'équation suivante pour la différence des solutions $u_1 - u_2$:

$$A_1 \frac{\partial (u_1 - u_2)}{\partial t} + B_1 \frac{\partial (u_1 - u_2)}{\partial x} + C_1 \frac{\partial (u_1 - u_2)}{\partial y} + Q_1 (u_1 - u_2) =$$

$$= f_1 - f_2 - (A_1 - A_2) \frac{\partial u_2}{\partial t} - (B_1 - B_2) \frac{\partial u_2}{\partial x} - (C_1 - C_2) \frac{\partial u_2}{\partial y} -$$

$$- (Q_1 - Q_2) u_2.$$

Si les normes $\| A_1 - A_2 \|$, $\| B_1 - B_2 \|$, $\| C_1 - C_2 \|$, $\| Q_1 - Q_2 \|$, $\| f_1 - f_2 \|$ sont petites, il en est de même (suivant notre norme $\| \ \|$) de toute la somme écrite au second membre de cette égalité.

Considérant cette équation vectorielle comme un système pour $u_1 - u_2$ et supposant petite la différence des données initiales, c'est-à-dire la différence $\| u_{10} - u_{20} \|_0$, on peut déduire de là l'évaluation de la petitesse de $\| u_1 - u_2 \|$. On aura démontré par là même que si les données initiales, les coefficients et les seconds membres sont suffisamment réguliers, alors la solution dépend continûment de tous ces paramètres du problème.

On démontre exactement de la même manière la dépendance continue des solutions du problème mixte par rapport à toutes ses quan-

tités déterminantes. Seulement, il faudra alors supposer que $u_1(x, t)$, $u_2(x, t)$ vérifient les mêmes conditions aux limites. En fait, la démonstration peut se faire aussi lorsque les conditions aux limites sont voisines, mais nous passerons sur les modifications de technique exigées par une telle démonstration.

Si l'on avait démontré les théorèmes d'existence pour tous les problèmes examinés (problème de Cauchy dans le domaine situé sous la «calotte» et problème mixte pour $t > 0$, $0 \leqslant x \leqslant L$), de l'unicité des solutions démontrée et de leur dépendance continue par rapport aux conditions du problème résulterait qu'ils sont bien posés. Nous ferons par la suite la démonstration du théorème d'existence pour le cas de deux variables indépendantes (x, t).

Arrêtons-nous à présent sur la notion très simple mais fort importante pour la suite, qu'est la notion de problème mixte réversible. Les problèmes réversibles jouent un rôle fondamental dans la théorie de la méthode de Fourier, qui sera étudiée au chapitre IV.

Résolvant le système

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + k_i \frac{\partial u_i}{\partial x} + \sum_{l=1}^{n} m_{il} u_l = f_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n_0,$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} - k_i \frac{\partial u_i}{\partial x} + \sum_{l=1}^{n} m_{il} u_l = f_i, \quad i = n_0 + 1, \ldots, n,$$

$$k_i > 0 \quad (0 \leqslant x \leqslant L)$$

avec les conditions aux limites

$$u_i = \sum_{j=n_0+1}^{n} \alpha_{ij} u_j \quad \text{pour } x = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n_0),$$

$$u_i = \sum_{j=1}^{n_0} \beta_{ij} u_j \quad \text{pour } x = L \quad (i = n_0 + 1, \ldots, n)$$

et les données initiales

$$u_i(x, 0) = \varphi_i(x)$$

on peut avoir à chercher la solution non pour $t \geqslant 0$, mais pour $t \leqslant 0$. Dans le cas d'une telle « inversion » du temps, caractéristiques dirigées vers la frontière et caractéristiques qui partent de cette frontière changent de rôles. Le nombre de conditions aux limites doit être à présent égal au nombre de caractéristiques « incidentes » au sens primitif. Le problème ne peut être simultanément résolu du côté des $t < 0$ et du côté des $t > 0$ que si le nombre des caractéristiques de pente positive est égal au nombre des caractéristiques de pente négative (c'est-à-dire si $n = 2n_0$) et si les conditions aux limites peuvent être résolues aussi bien par rapport aux inva-

riants de Riemann liés à la pente positive des caractéristiques $(u_1, u_2, \ldots, u_{n_0})$ que par rapport aux invariants correspondant aux caractéristiques à pente négative $(u_{n_0+1}, u_{n_0+2}, \ldots, u_{2n_0})$. Les conditions aux limites peuvent alors s'écrire :

$$\sum_{j=1}^{n_0} \gamma_{ij} u_j = \sum_{j=n_0+1}^{2n_0} \alpha_{ij} u_j \quad (i = 1, 2, \ldots, n_0)$$

à l'une des extrémités ($\det \| \gamma_{ij} \| \neq 0$, $\det \| \alpha_{ij} \| \neq 0$), et on a une condition analogue avec d'autres matrices γ_{ij}, α_{ij} à l'autre extrémité du segment.

Nous appellerons *réversibles* les problèmes résolubles quel que soit le sens du temps.

Pour conclure ce paragraphe, nous allons voir sur quelques exemples simples comment on étudie à l'aide des caractéristiques la position de problèmes mixtes pour les systèmes hyperboliques.

Soit à étudier, pour $t \geqslant 0$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, le système

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 5\frac{\partial u}{\partial x} + 16\frac{\partial v}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + 5\frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Voyons quel doit être le nombre de conditions aux limites qu'on doit se donner pour ce système pour $x = 0$ et $x = 1$. Calculons les pentes des caractéristiques pour ce système, en tant que racines de l'équation caractéristique

$$\begin{vmatrix} 5-k & 16 \\ 1 & 5-k \end{vmatrix} = (5-k)^2 - 16 = 0 ; \; k_1 = 9, \; k_2 = 1.$$

Les pentes des deux caractéristiques du système considéré sont positives. Par conséquent, pour $x = 0$ on doit se donner deux conditions aux limites. Pour $x = 1$ on n'a pas à se donner des conditions aux limites.

Considérons à présent le système

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 3\frac{\partial u}{\partial x} + 16\frac{\partial v}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + 3\frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Ses vitesses caractéristiques sont déterminées en tant que racines de l'équation

$$\begin{vmatrix} 3-k & 16 \\ 1 & 3-k \end{vmatrix} = 0; \; k_1 = 7, \; k_2 = -1.$$

Pour $x = 0$ ainsi que pour $x = 1$ ce système exige la donnée d'une seule condition aux limites.

Peut-on se donner ces conditions aux limites sous la forme: $u = 0$ pour $x = 0$, $u = 0$ pour $x = 1$? Pour répondre à cette question il faut réduire le système à la forme canonique. Dans l'exemple étudié il suffit d'ajouter à la première équation (ou d'en retrancher) la seconde multipliée par 4. On obtient alors les équations

$$\frac{\partial (u+4v)}{\partial t} + 7\frac{\partial (u+4v)}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial (u-4v)}{\partial t} - \frac{\partial (u-4v)}{\partial x} = 0.$$

La condition aux limites $u = 0$ peut s'écrire sous forme de l'égalité $u + 4v = -(u - 4v)$, qui est résoluble aussi bien par rapport à l'invariant correspondant à la pente positive des caractéristiques que par rapport à l'autre invariant.

Aussi la condition $u = 0$ peut-elle être donnée aussi bien sur la frontière gauche que sur la frontière droite. Ces conditions correspondent au problème réversible.

Mais on ne saurait se donner la condition aux limites $u + 4v = 0$ sur la frontière droite, étant donné que $u + 4v$ est l'invariant de Riemann correspondant à la caractéristique dirigée vers cette frontière

$$\frac{\partial x}{\partial t} = 7.$$

§ 15. Evaluation des solutions d'équations aux différences pour le problème mixte

Schéma aux différences de la solution du problème mixte pour le système hyperbolique. Evaluation des solutions des équations aux différences dans le cas de conditions aux limites dissipatives. Les données initiales doivent vérifier les conditions aux limites.

Nous décrirons dans ce paragraphe le schéma aux différences le plus simple à l'aide duquel on peut résoudre approximativement le problème aux limites dissipatif pour les équations hyperboliques. Nous ne démontrerons pas que les solutions approchées sont voisines des solutions exactes. Encore que nous le voulions, nous ne le pourrions pas, puisque nous ne connaissons pas encore le fait de l'existence de la solution des équations différentielles. Le théorème d'existence sera démontré par la suite. Le schéma aux différences que nous allons étudier maintenant est appelé à jouer un rôle important dans la démonstration de ce théorème. Les évaluations des solutions d'équations aux différences, analogues aux évaluations des intégrales d'énergie, seront essentiellement utilisées dans la démonstration du théorème. L'attention principale lors de l'étude du schéma aux différences sera précisément concentrée sur la déduction de ces évaluations.

Le système, que nous étudierons dans le rectangle $0 \leqslant x \leqslant L$, $0 \leqslant t \leqslant T$, est de la forme

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + k_i \frac{\partial u_i}{\partial x} + \sum_{l=1}^{n} m_{il} u_l = f_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n_0,$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} - k_i \frac{\partial u_i}{\partial x} + \sum_{l=1}^{n} m_{il} u_l = f_i, \quad i = n_0 + 1, \ldots, n.$$

Les coefficients $k_i(x, t) > 0$, $m_{il}(x, t)$ et les seconds membres $f_i(x, t)$ sont supposés bornés et suffisamment réguliers. Dans un premier temps, nous n'aurons pas besoin des conditions aux limites. Nous construirons le réseau aux différences en divisant le segment $0 \leqslant x \leqslant L$ en un certain nombre de parties égales. La longueur h de chacune d'elles est ce qu'on appelle le *pas du réseau* suivant les x. Nous désignerons par τ le pas par rapport au temps. Le réseau sera constitué par des points $x = ph$, $t = q\tau$ avec p, q entiers non négatifs. Le numéro p ne doit pas être trop grand pour que tous les points appartiennent aux $x \leqslant L$. Dans chaque couche temporelle ($t = q\tau$) le point le plus à gauche ($p = 0$) a pour coordonnée $x = 0$, et le point le plus à droite, $x = L$. La couche temporelle $q = 0$ est constituée par des points situés sur la base $t = 0$ de notre rectangle. Nous supposons connues les valeurs des coefficients k_i, m_{il} et des seconds membres f_i en tous les points du réseau aux différences choisi.

Après avoir construit la solution approchée du système sur un réseau pour certains τ, h, nous ferons tendre vers zéro les pas du réseau. L'important pour nous c'est de trouver pour les solutions aux différences approchées des évaluations qui, pour tous les pas suffisamment petits τ, h, soient indépendantes de ces pas.

Les valeurs des u_i ($i = 1, 2, \ldots$) en tous les points de la couche initiale ($q = 0$, $t = 0$) sont supposées données. Le schéma que nous allons construire permettra, d'après ces données initiales (à l'aide de conditions aux limites qui n'ont même pas été encore formulées), de calculer les valeurs approchées des fonctions cherchées dans la première couche temporelle $q = 1$ ($t = \tau$). Puis, considérant la couche $t = \tau$ comme couche initiale, nous calculerons d'après ce même schéma aux différences les valeurs de u_i dans la couche $q = 2$. Prenant à présent pour couche initiale $q = 2$, on calcule la couche $q = 3$, etc.

Pour décrire le schéma, il suffira de toute évidence qu'on démontre comment se calculent les quantités dans la couche $t = (q + 1)\tau$, connaissant les quantités dans la couche $t = q\tau$. Tant que nous n'aurons affaire qu'à deux couches ($t = q\tau$, $t = (q + 1)\tau$), les quantités dans la couche inférieure ($t = q\tau$) seront notées u_i, k_i,

m_{il}, f_i, en indiquant en sus la coordonnée $x = ph$ ou le numéro correspondant p. Les quantités relatives à la couche supérieure $(t = (q + 1)\tau)$ seront coiffées d'un chapeau $\hat{u}_i(x, (q + 1)\tau)$. Pour abréger l'écriture lors de la description du schéma, il nous sera commode de désigner par s_i la combinaison du second membre f_i et des termes $m_{il}u_l$ de la i-ème équation :

$$s_i = f_i - \sum_l m_{il}u_l.$$

Il est évident que

$$s_i^2 \leqslant \text{const}\left[f_i^2 + \sum_l u_l^2\right].$$

Si les quantités u_i sont connues en tous les points du réseau de la couche $t = q\tau$, les s_i seront connus en ces mêmes points.

Après avoir introduit cette notation, les équations différentielles considérées deviennent :

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} \pm k_i \frac{\partial u_i}{\partial x} = s_i.$$

Le schéma aux différences pour les équations où k_i est précédé du signe plus se construit différemment du cas du signe moins. Nous décrirons le schéma pour l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} + k\frac{\partial u}{\partial x} = s,$$

puis séparément pour l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k\frac{\partial u}{\partial x} = s$$

et nous déduirons pour les solutions de ces schémas les évaluations requises. Les évaluations pour le système apparaissent en réunissant les évaluations des solutions des diverses équations. Décrivant le schéma pour une seule équation, nous omettrons l'indice i affectant les fonctions inconnues u_i, les coefficients k_i et les seconds membres s_i. Cette simplification allège les calculs. Désignons les valeurs des fonctions de réseau $u(x)$, $\hat{u}(x)$ qui se rapportent aux couches $t = q\tau$, $t = (q + 1)\tau$ au point $x = ph$ par $u^{(p)}$, $\hat{u}^{(p)}$. Pour calculer $\hat{u}^{(p)}$ nous proposons le schéma aux différences

$$\frac{\hat{u}^{(p)} - u^{(p)}}{\tau} + k^{(p)}\frac{u^{(p)} - u^{(p-1)}}{h} = s^{(p)},$$

qui remplace approximativement l'équation différentielle

$$\frac{\partial u}{\partial t} + k\frac{\partial u}{\partial x} = s.$$

La valeur inconnue de $\hat{u}^{(p)}$ dans ce schéma est déterminée par la formule

$$\hat{u}^{(p)} = \left(1 - \frac{\tau k^{(p)}}{h}\right) u^{(p)} + \frac{\tau k^{(p)}}{h} u^{(p-1)} - \tau s^{(p)}.$$

Nous supposerons toujours que les pas τ, h vérifient la condition $\frac{\tau k}{h} < 1$. Connaissant toutes les valeurs de $u^{(0)}$, $u^{(1)}$, . . ., $u^{(L/h)}$ dans la couche inférieure, on peut déterminer $\hat{u}^{(1)}$, $\hat{u}^{(2)}$, . . ., $\hat{u}^{(L/h)}$. La valeur de $\hat{u}^{(0)}$ au point le plus à gauche de la couche supérieure n'est pas alors déterminée. Pour déterminer par la suite cette valeur, on devra avoir recours aux conditions aux limites.

Avant de passer aux évaluations, démontrons le lemme suivant.

Lemme. *Soit* $w = (1 - \alpha)\, y + \alpha z + \tau s$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, *et soit* $|\alpha - \beta| < A\tau$. *Alors*

$$w^2 \leqslant (1 - \alpha)\, y^2 + \beta z^2 + (1 + A)\, \tau\, (w^2 + z^2 + s^2).$$

La démonstration résulte de la chaîne suivante d'égalités et d'inégalités évidentes :

$$\begin{aligned}
w^2 &= [(1-\alpha)\, y + \alpha z]^2 + 2\tau s\, [(1-\alpha)\, y + \alpha z] + (\tau s)^2 \leqslant \\
&\leqslant [(1-\alpha)\, y + \alpha z]^2 + 2\tau s\, [(1-\alpha)\, y + \alpha z] + 2\,(\tau s)^2 = \\
&= [(1-\alpha)\, y + \alpha z]^2 + 2\tau s w \leqslant [(1-\alpha)\, y + \alpha z]^2 + \tau\,(s^2 + w^2) = \\
&= (1-\alpha)\, y^2 + \alpha z^2 - \alpha\,(1-\alpha)\,(y-z)^2 + \tau\,(s^2 + w^2) \leqslant \\
&\leqslant (1-\alpha)\, y^2 + \alpha z^2 + \tau\,(s^2 + w^2) = \\
&= (1-\alpha)\, y^2 + \beta z^2 + (\alpha - \beta)\, z^2 + \tau\,(s^2 + w^2) \leqslant \\
&\leqslant (1-\alpha)\, y^2 + \beta z^2 + \tau\,(1 + A)\,(w^2 + z^2 + s^2).
\end{aligned}$$

Avant d'appliquer ce lemme à notre équation aux différences, notons que

$$\frac{\tau k^{(p)}}{h} - \frac{\tau k^{(p-1)}}{h} = \tau\, \frac{k^{(p)} - k^{(p-1)}}{h} = \tau\, \frac{\partial k}{\partial x}\bigg|_{x = x^*},$$

$$(p-1)\, h < x^* < ph,$$

si bien que

$$\frac{\tau k^{(p)}}{h} - \frac{\tau k^{(p-1)}}{h} = O(\tau).$$

L'évaluation $O(\tau)$ est uniforme par rapport à tous les pas suffisamment petits τ, h. Posant $\hat{u}^{(p)} = w$, $u^{(p)} = y$, $u^{(p-1)} = z$,

$$\alpha = \frac{\tau k^{(p)}}{h}, \quad \beta = \frac{\tau k^{(p-1)}}{h}$$

et appliquant le lemme, nous sommes conduits à l'inégalité

$$|\hat{u}^{(p)}|^2 \leqslant \left[1 - \frac{\tau k^{(p)}}{h}\right] |u^{(p)}|^2 + \frac{\tau k^{(p-1)}}{h} |u^{(p-1)}|^2 +$$

$$+ \text{const}\, \tau \{|\hat{u}^{(p)}|^2 + |u^{(p-1)}|^2 + |s^{(p)}|^2\}.$$

Ecrivant de telles inégalités pour $p = 1, 2, \ldots, \frac{L}{h}$, nous en ferons la somme. Il vient

$$\sum_x{}' \hat{u}^2 + \sum_x{}' u^2 + \frac{\tau}{h} |k_{\text{gauche}} u^2_{\text{gauche}} - k_{\text{droite}} u^2_{\text{droite}}| \leqslant$$

$$\leqslant \tau\, \text{const} \left(\sum_x{}' \hat{u}^2 + \sum_x u^2 + \sum_x s^2\right).$$

Dans cette inégalité le signe de sommation primé à gauche, $\sum'$, signifie que la sommation est faite sur les p de 1 à L/h (le terme correspondant à la valeur le plus à gauche de l'indice, $p = 0$, est omis). Le signe non primé $\sum$ indique la sommation sur tous les p de 0 à L/h.

Nous affectons les sommes $\sum'_x$, $\sum_x$ du signe x afin de souligner que la sommation porte sur les valeurs de telle ou telle quantité, liées aux différentes coordonnées x des points du réseau. Nous avons également désigné les valeurs de $u^{(0)}$, $k^{(0)}$, $u^{(L/h)}$, $k^{(L/h)}$ au point le plus à gauche et au point le plus à droite du réseau par u_{gauche}, k_{gauche}, u_{droite}, k_{droite}. Nous pensons avoir ainsi mieux explicité les raisonnements ultérieurs.

Pour l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k \frac{\partial u}{\partial x} = s$$

nous proposons d'écrire le schéma aux différences comme suit :

$$\frac{\hat{u}^{(p)} - u^{(p)}}{\tau} - k^{(p)} \frac{u^{(p+1)} - u^{(p)}}{h} = s^{(p)}.$$

On obtient alors pour déduire $\hat{u}^{(p)}$ la formule

$$\hat{u}^{(p)} = \left(1 - \frac{\tau k^{(p)}}{h}\right) u^{(p)} + \frac{\tau k^{(p)}}{h} u^{(p+1)} - \tau s^{(p)},$$

qui permet de calculer $\hat{u}$ en tous les points, hormis le point le plus à droite correspondant à l'indice $p = L/h$. Supposant de nouveau les pas τ, h liés par l'inégalité $\tau k/h < 1$ et refaisant exactement le raisonnement du cas du schéma pour l'équation avec le signe +

devant k, on déduit l'inégalité

$$\sum_x{}' \hat{u}^2 \leqslant \sum_x{}' u^2 + \frac{\tau}{u}\left[-k_{\text{gauche}} u^2_{\text{gauche}} + k_{\text{droite}} u^2_{\text{droite}}\right] + \\ + \tau \,\text{const}\left(\sum_x{}' \hat{u}^2 + \sum_x u^2 + \sum_x s^2\right).$$

Le signe de sommation primé à droite $\sum_x{}'$ indique qu'il y a sommation sur tous les points $x = ph$, sauf le point le plus à droite ($p = L/h$, $x = L$).

Revenons à présent au système

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + k_i \frac{\partial u_i}{\partial x} = s_i = f_i - \sum_{l=1}^{n} m_{il} u_l \quad (i = 1, 2, \ldots, n_0),$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} - k_i \frac{\partial u_i}{\partial x} = s_i = f_i - \sum_{l=1}^{n} m_{il} u_l \quad (i = n_0 + 1, \ldots, n).$$

Rappelons que le premier groupe de ces équations ($i = 1, 2, \ldots, n_0$) est lié aux caractéristiques à pente positive $\frac{dx}{dt} = k_i > 0$, et le second groupe ($i = n_0 + 1, \ldots, n$) aux caractéristiques à pente négative $\frac{dx}{dt} = -k_i$. Ceci nous permettra par la suite d'utiliser pour la sommation sur i de 1 à n_0 la notation condensée $\sum_{\rightarrow}$. Nous avons placé sous le signe de sommation une flèche dirigée vers la droite. De même, nous remplacerons $\sum_{i=n_0+1}^{n}$ par la notation plus parlante $\sum_{\leftarrow}$. Le signe $\sum_{x,\rightarrow}$ désigne la sommation sur i de 1 à n_0 et la sommation sur tous les points aux différences de la couche $t = q\tau$ ou $t = (q+1)\tau$. Le signe $\sum_{x,\leftarrow}{}'$ rappelle la sommation sur i de $n_0 + 1$ à n et la sommation sur tous les points de la couche, sauf le point le plus à droite. La notation $\sum_{x,i}$ indiquera la sommation sur tous les points et sur tous les i de 1 à n. La flèche sous le signe de sommation est toujours dirigée dans le sens où, lorsque t croît, se déplacent les caractéristiques des invariants de Riemann u_i figurant dans la somme.

Ecrivons pour chacune des équations du système le schéma aux différences décrit. Soient les pas τ, h vérifiant l'inégalité $\frac{\tau}{h} \max k_i < 1$, et sommons sur i les inégalités pour les sommes des carrés des fonctions de réseau. Nous avons déjà vu dans le détail la déduction

de ces inégalités. Il vient en sommant

$$\sum'_{x,\rightarrow} \hat{u}_i^2 + \sum'_{x,\leftarrow} \hat{u}_i^2 \leqslant \sum'_{x,\rightarrow} u_i^2 + \sum'_{x,\leftarrow} u_i^2 +$$

$$+ \frac{\tau}{h}\Big[-\sum_{\rightarrow} k_i u_i^2 + \sum_{\leftarrow} k_i u_i^2\Big]_{\text{droite}} + \frac{\tau}{h}\Big[\sum_{\rightarrow} k_i u_i^2 - \sum_{\leftarrow} k_i u_i^2\Big]_{\text{gauche}} +$$

$$+ \text{const}\,\tau\Big(\sum'_{x,\rightarrow} \hat{u}_i^2 + \sum'_{x,\leftarrow} \hat{u}_i^2 + \sum_{x,i} s_i^2 + \sum_{x,i} u_i^2\Big).$$

Nous avons affecté ici des indices « droite » et « gauche » trois crochets dans lesquels les quantités concernent le point le plus à droite ($x = L$) et le point le plus à gauche ($x = 0$) du réseau. L'inégalité

$$s_i^2 \leqslant \text{const}\,(f_i^2 + \sum_l u_l^2)$$

nous débarrasse de la notation s_i, intermédiaire dans nos raisonnements. Mettant ce point à profit, nous écrirons par la suite l'inégalité pour les sommes des carrés sous la forme suivante :

$$\sum'_{x,\rightarrow} \hat{u}_i^2 + \sum'_{x,\leftarrow} \hat{u}_i^2 \leqslant \sum'_{x,\rightarrow} u_i^2 + \sum'_{x,\leftarrow} u_i^2 +$$

$$+ \frac{\tau}{h}\Big[-\sum_{\rightarrow} k_i u_i^2 + \sum_{\leftarrow} k_i u_i^2\Big]_{\text{droite}} + \frac{\tau}{h}\Big[\sum_{\rightarrow} k_i u_i^2 - \sum_{\leftarrow} k_i u_i^2\Big]_{\text{gauche}} +$$

$$+ \text{const}\,\tau\Big(\sum'_{x,\rightarrow} \hat{u}_i^2 + \sum'_{x,\leftarrow} \hat{u}_i^2 + \sum_{x,i} u_i^2 + \sum_{x,i} f_i^2\Big). \quad (1)$$

Les constructions que nous avons données permettent de définir les quantités u_i en tous les points du réseau aux différences de la couche $t = (q+1)\,\tau$, sauf les u_i aux points limites correspondant aux caractéristiques partant de la frontière. Pour déterminer ces inconnues nous devrons utiliser les conditions aux limites.

Les conditions aux limites

$$u_i = \sum_{\leftarrow} \alpha_{ij} u_j \quad (i = 1, 2, \ldots, n_0) \text{ (sur la frontière de gauche)},$$

$$u_i = \sum_{\rightarrow} \beta_{ij} u_j \quad (i = n_0 + 1, n_0 + 2, \ldots, n) \text{ (sur la frontière de droite)}$$

seront supposées dissipatives. Nous achèverons de déterminer à l'aide de ces conditions aux limites les $\hat{u}_i$ qui nous manquent aux points limites :

$$\hat{u}_i = \sum_{\leftarrow} \alpha_{ij} \hat{u}_j \quad (i = 1, 2, \ldots, n_0) \quad (x = 0),$$

$$\hat{u}_i = \sum_{\rightarrow} \beta_{ij} \hat{u}_j \quad (i = n_0 + 1, n_0 + 2, \ldots, n) \quad (x = L).$$

En vertu de la condition de dissipation (cf. § 13), nous aurons les inégalités suivantes

$$\Big[-\sum_{\rightarrow} k_i \hat{u}_i^2 + \sum_{\leftarrow} k_i \hat{u}_i^2\Big]_{\text{droite}} \leqslant 0,$$

$$\Big[\sum_{\rightarrow} k_i \hat{u}_i^2 - \sum_{\leftarrow} k_i \hat{u}_i^2\Big]_{\text{gauche}} \leqslant 0.$$

Passant successivement de $t = 0$ à $t = \tau$, puis à $t = 2\tau$, $t = 3\tau$, etc., on voit que les conditions aux limites, et donc aussi les conditions de dissipation, seront observées dans toutes les couches $t = q\tau$ ($q = 1, 2, \ldots$), sauf la couche initiale ($q = 0$).

Nous exigerons que les données initiales pour $t = 0$ vérifient les conditions aux limites.

Si cette exigence est satisfaite, les conditions de dissipation seront vérifiées pour la fonction de réseau *dans toutes* les couches

$$t = q\tau \ (q = 0, 1, 2, \ldots).$$

Aussi nous ne faisons que renforcer l'inégalité (1) qui lie les sommes des carrés des u_i dans deux couches temporelles successives si l'on rejette au second membre les termes non positifs

$$\frac{\tau}{h}\Big[-\sum_{\rightarrow} k_i u_i^2 + \sum_{\leftarrow} k_i u_i^2\Big]_{\text{droite}},$$

$$\frac{\tau}{h}\Big[\sum_{\rightarrow} k_i u_i^2 - \sum_{\leftarrow} k_i u_i^2\Big]_{\text{gauche}}.$$

Nous utiliserons encore les conditions de dissipation pour comparer la somme primée et la somme non primée

$$\sum_{x,\rightarrow}{}' u_i^2 + \sum_{x,\leftarrow}{}' u_i^2, \quad \sum_{x,i} u_i^2,$$

prises dans une même couche temporelle. Il est évident que

$$\sum_{x,\rightarrow}{}' u_i^2 + \sum_{x,\leftarrow}{}' u_i^2 \leqslant \sum_{x,i} u_i^2,$$

puisque ici la somme de gauche contient moins de termes que celle de droite. Par ailleurs, en vertu de la condition de dissipation,

$$\Big[\sum_{\rightarrow} k_i u_i^2\Big]_{\text{gauche}} - \Big[\sum_{\leftarrow} k_i u_i^2\Big]_{\text{gauche}} \leqslant 0,$$

$$\Big[\sum_{\rightarrow} u_i^2\Big]_{\text{gauche}} \leqslant \left[\frac{\max\limits_{i,x,t} k_i}{\min\limits_{i,x,t} k_i}\right]\Big[\sum_{\leftarrow} u_i^2\Big]_{\text{gauche}} \leqslant K\Big[\sum_{x,\leftarrow}{}' u_i^2\Big].$$

On vérifie de même que

$$\Big[\sum_{\leftarrow} u_i^2\Big]_{\text{droite}} \leqslant K\Big[\sum_{x,\rightarrow}{}' u_i^2\Big].$$

D'où

$$\sum_{x,\,i} u_i^2 = \Big[\sum_{\leftarrow} u_i^2\Big]_{\text{droite}} + \Big[\sum_{\rightarrow} u_i^2\Big]_{\text{gauche}} + \Big(\sum_{x,\leftarrow}{}' u_i^2 + {}'\sum_{x,\rightarrow} u_i^2\Big) \leqslant$$
$$\leqslant (1+K)\Big({}'\sum_{x,\rightarrow} u_i^2 + \sum_{x,\leftarrow}{}' u_i^2\Big).$$

Ainsi, nous avons démontré que dans toute couche temporelle

$${}'\sum_{x,\rightarrow} u_i^2 + \sum_{x,\leftarrow}{}' u_i^2 \leqslant \sum_{x,\,i} u_i^2 \leqslant (1+K)\Big({}'\sum_{x,\rightarrow} u_i^2 + \sum_{x,\leftarrow}{}' u_i^2\Big).$$

La seconde moitié de cette inégalité nous permet de nous débarrasser au second membre de l'évaluation (1) pour la somme primée des $\hat{u}_i^2$ de la somme non primée $\sum_{x,\,i} u_i^2$ en augmentant quelque peu la constante. Nous désignerons cette constante renforcée par la lettre M et nous recopierons l'inégalité pour les sommes de carrés comme suit :

$${}'\sum_{x,\rightarrow} \hat{u}_i^2 + \sum_{x,\leftarrow}{}' \hat{u}_i^2 \leqslant {}'\sum_{x,\rightarrow} u_i^2 + \sum_{x,\leftarrow}{}' u_i^2 +$$
$$+ M\tau\Big[\Big({}'\sum_{x,\rightarrow} \hat{u}_i^2 + \sum_{x,\leftarrow}{}' \hat{u}_i^2\Big) + \Big({}'\sum_{x,\rightarrow} u_i^2 + \sum_{x,\leftarrow}{}' u_i^2\Big) + \sum_{x,\,i} f_i^2\Big].$$

Posons

$$\Big({}'\sum_{x,\rightarrow} u_i^2 + \sum_{x,\leftarrow}{}' u_i^2\Big)_{t=q\tau} = U^{(q)}, \quad \max_{0\leqslant t\leqslant T} \sum_{x,\,i} f_i^2 = F$$

et supposons $M\tau < 1$. Alors

$$U^{(q+1)} \leqslant U^{(q)} + M\tau\,[U^{(q+1)} + U^{(q)} + F],$$
$$(1 - M\tau)\left[U^{(q+1)} + \frac{F}{2}\right] \leqslant (1 + M\tau)\left[U^{(q)} + \frac{F}{2}\right],$$
$$U^{(q)} + \frac{F}{2} \leqslant \left(\frac{1+M\tau}{1-M\tau}\right)^q \left[U^{(0)} + \frac{F}{2}\right],$$
$$U^{(q)} \leqslant U^{(0)}\left(\frac{1+M\tau}{1-M\tau}\right)^q + F\,\frac{\left(\frac{1+M\tau}{1-M\tau}\right)^q - 1}{2}.$$

Utilisons à présent le fait que

$$\Big[\sum_{x,\,i} u_i^2\Big]_{t=q\tau} \leqslant (1+K)\,U^{(q)}, \quad U^{(0)} \leqslant \Big[\sum_{x,\,i} u_i^2\Big]_{t=0}.$$

Ceci nous permet de déduire l'évaluation

$$\Big[\sum_{x,\,i} u_i^2\Big]_{t=q\tau} \leqslant (1+K)\left(\frac{1+M\tau}{1-M\tau}\right)^{t/\tau}\Big[\sum_{x,\,i} u_i^2\Big]_{t=0} +$$
$$+ (1+K)\,\frac{\left(\frac{1+M\tau}{1-M\tau}\right)^{t/\tau} - 1}{2} \max_{0\leqslant t\leqslant T}\Big[\sum_{x,\,i} f_i^2\Big].$$

Il est commode de multiplier les deux membres de cette inégalité par h et, utilisant le fait que la quantité $\left(\frac{1+M\tau}{1-M\tau}\right)^{t/\tau}$ est bornée pour les τ suffisamment petits (elle tend vers e^{2Mt} lorsque $\tau \to 0$, et nous avons $t \leqslant T$), on peut mettre le résultat sous la forme définitive:

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant T} \left(h \sum_{x,\, i} u_i^2\right) \leqslant Q\left[\left(h \sum_{x,\, i} u_i^2\right)_{t=0} + \max_{0 \leqslant t \leqslant T} \left(h \sum_{x,\, i} f_i^2\right)\right].$$

Notons que si les données initiales $u_i(x, 0)$ et les seconds membres $f_i(x, t)$ sont des fonctions continues, les sommes

$$\left(h \sum_{x,\, i} u_i^2\right)_{t=0}, \quad \left(h \sum_{x,\, i} f_i^2\right)$$

tendent lorsque $h \to 0$ vers les intégrales

$$\int_0^L \left[\sum_i u_i^2(x, 0)\right] dx, \quad \int_0^L \left[\sum_i f_i^2(x, t)\right] dx$$

si bien qu'elles sont bornées. La constante Q dépend des coefficients des équations et de leurs dérivées.

Nous avons démontré que si les données initiales pour $t = 0$ vérifient les conditions aux limites, la solution des équations aux différences, construites en tant qu'équations approchées pour le problème hyperbolique dissipatif avec des coefficients et des seconds membres suffisamment réguliers, vérifiera, lorsque le pas est suffisamment petit, l'inégalité:

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant T} \left(h \sum_{x,\, i} u_i^2\right) \leqslant \text{const.}$$

Telle est l'inégalité que nous voulions déduire.

§ 16. Compacité des solutions des équations aux différences

Suite de la déduction des évaluations des solutions des équations aux différences. Évaluation de rapports aux différences. Inégalités intégrales assurant l'égale continuité des fonctions dans un rectangle. Théorème d'Arzelà sur la compacité. ε-entropie.

Nous avons déduit au paragraphe précédent, lors de l'étude des solutions approchées des équations hyperboliques, une certaine évaluation de ces solutions, que nous avons promis d'utiliser par la suite lors de la démonstration du théorème d'existence. Nous devrons appliquer dans cette démonstration les évaluations non seulement des carrés des fonctions de réseau elles-mêmes, mais encore des inégalités analogues pour leurs rapports aux différences $\left(\frac{\Delta u_i}{\Delta x}, \frac{\Delta u_i}{\Delta t}, \frac{\Delta^2 u_i}{\Delta x \Delta t}, \text{etc.}\right)$ jusqu'à un ordre suffisamment élevé. L'idée de la déduc-

tion de ces évaluations est exactement la même que celle utilisée dans le procédé déjà décrit pour obtenir les évaluations des dérivées des solutions d'un système hyperbolique. Nous avons obtenu ces évaluations au § 14. A cet effet, nous avons élargi le système initial en lui associant des équations contenant en tant qu'inconnues les dérivées à évaluer. Ces nouvelles équations se déduisent par dérivation des équations initiales.

Lorsqu'on envisage les solutions des équations aux différences, un procédé analogue nous permet d'élargir le système aux différences en lui associant de nouvelles équations. A ces nouvelles équations vérifieront les rapports aux différences $\frac{\Delta u}{\Delta t}$, $\frac{\Delta^2 u}{\Delta t^2}$.

Par un tel élargissement du système, on peut à nouveau ramener l'évaluation des rapports aux différences au procédé déjà indiqué pour évaluer les solutions elles-mêmes. Ainsi, si l'on pose

$$\left.\frac{\Delta u}{\Delta t}\right|_{x,\,t} = \frac{u(x,\,t+\tau)-u(x,\,t)}{\tau},$$

$$\left.\frac{\Delta u}{\Delta x}\right|_{x,\,t} = \frac{u(x+h,\,t)-u(x,\,t)}{h},$$

l'équation aux différences

$$\frac{u(x,\,t+\tau)-u(x,\,t)}{\tau} - k(x,\,t)\,\frac{u(x+h,\,t)-u(x,\,t)}{h} + m(x,\,t)\,u(x,\,t) = f(x,\,t)$$

peut s'écrire sous la forme suivante ne différant presque pas de la forme différentielle

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} - k(x,\,t)\,\frac{\Delta u}{\Delta x} + mu = f.$$

Ecrivant de telles équations aux points $(x,\ t+\tau)$ et $(x,\ t)$, puis les retranchant l'une de l'autre et divisant par τ, on est amené à l'égalité

$$\frac{\Delta}{\Delta t}\left(\frac{\Delta u}{\Delta t}\right) - k(x,\,t+\tau)\,\frac{\Delta}{\Delta x}\left(\frac{\Delta u}{\Delta t}\right) - \frac{\Delta k}{\Delta t}\,\frac{\Delta u}{\Delta x} + \\ + m(x,\,t+\tau)\,\frac{\Delta u}{\Delta t} + \frac{\Delta m}{\Delta t}\,u = \frac{\Delta f}{\Delta t}.$$

Cette égalité est exactement la même que l'égalité différentielle

$$\frac{\partial u_t}{\partial t} - k(x,\,t)\,\frac{\partial u_t}{\partial x} - \frac{\partial k}{\partial t}\,u_x + m(x,\,t)\,u_t + \frac{\partial m}{\partial t}\,u = \frac{\partial f}{\partial t}.$$

A cela près qu'on a dû prendre les coefficients $k(x,\ t+\tau)$, $m(x,\ t+\tau)$ dans l'équation « dérivée » plus haut que dans l'équation initiale de τ. Il est clair qu'au moyen de telles « dérivées » on procède à l'élargissement du système d'équations aux différences exactement de la même manière que pour un système d'équations différentielles. On élargit de la même façon les conditions aux limites.

Lorsque les pas sont suffisamment petits, les coefficients des systèmes élargis différentiel et aux différences et les coefficients des conditions aux limites qui leur correspondent sont voisins. Cela signifie que si le système différentiel devient strictement dissipatif lorsqu'on passe aux nouvelles inconnues

$$v_i = \mu_i u_i, \quad w_i = \nu_i u_{it},$$

pour transformer en système dissipatif le système aux différences il suffira également de poser (pour τ, h suffisamment petits)

$$v_i = \mu_i u_i, \qquad w_i = \nu_i \frac{\Delta u_i}{\Delta t}.$$

Evaluant la somme des carrés des nouvelles inconnues, on déduit, comme dans le cas différentiel, que la régularité des coefficients et des seconds membres entraîne, sous la condition que les données initiales s'accordent suffisamment bien et qu'elles soient suffisamment régulières, l'évaluation

$$h \sum_{x,\, i} \left(\frac{\Delta u_i}{\Delta t}\right)^2 + h \sum_{x,\, i} \left(\frac{\Delta u_i}{\Delta x}\right)^2 \leqslant \text{const.}$$

Si l'on associe encore au système aux différences élargi les équations pour les rapports aux différences plus élevés $\frac{\Delta^2 u_i}{\Delta t^2}$, $\frac{\Delta^3 u_i}{\Delta t^3}$, on peut déduire de la régularité suffisante des coefficients, des seconds membres et des données initiales (sous la condition de concordance) des évaluations analogues pour les rapports aux différences d'ordre plus élevé.

Démontrant le théorème d'existence, nous nous servirons d'évaluations telles que :

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant T} \Delta x \sum_{x,\, i} u_i^2 \leqslant \text{const},$$

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant T} \Delta x \sum_{x,\, i} \left[\left(\frac{\Delta u_i}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta u_i}{\Delta t}\right)^2 \right] \leqslant \text{const},$$

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant T} \Delta x \sum_{x,\, i} \left[\left(\frac{\Delta^2 u_i}{\Delta x^2}\right)^2 + \left(\frac{\Delta^2 u_i}{\Delta x \Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta^2 u_i}{\Delta t^2}\right)^2 \right] \leqslant \text{const}.$$

Le pas h a été désigné ci-dessus par Δx.

Avant de passer à la déduction des théorèmes d'existence, il nous faudra étudier plusieurs propriétés pour nous importantes de fonctions satisfaisant à des inégalités intégrales.

Lemme 1. *Soit une fonction $v(x)$ continue, continûment dérivable par morceaux sur le segment $[0, L]$ et vérifiant les inégalités*

$$\int_0^L v^2(x)\,dx \leqslant A,$$

$$\int_0^L v_x^2(x)\,dx \leqslant B.$$

Alors cette fonction vérifie les inégalités

$$|v(x)| \leqslant (A/L)^{1/2} + (BL)^{1/2}, \tag{1}$$

$$|v(x)| \leqslant 2(AB)^{1/4} + (A/L)^{1/2}. \tag{2}$$

Pour le montrer, divisons le segment $[0, L]$ en N parties égales et considérons un point arbitraire x_0 du segment $[0, L]$. Ce point appartient à l'un des segments construits, $[x_1, x_2]$, de longueur L/N. Comme $\int_{x_1}^{x_2} v^2(x)\,dx \leqslant \int_0^L v^2(x)\,dx \leqslant A$, on a sur le segment $[x_1, x_2]$ un point x_3 tel que $|v(x_3)| \leqslant \sqrt{\frac{A}{L/N}}$. (L'affirmation contraire conduit à une contradiction avec l'inégalité intégrale qui vient d'être écrite.) A présent point n'est difficile d'évaluer $v(x)$ au point x_0 arbitrairement choisi, compte tenu de l'évaluation pour $\int_0^L v_x^2(x)\,dx$ et du fait que la distance entre x_0 et x_3 est non supérieure à L/N :

$$|v(x_0) - v(x_3)| = \left|\int_{x_3}^{x_0} v_x(x)\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\left|\int_{x_0}^{x_3} v_x^2\,dx\right|}\sqrt{\left|\int_{x_0}^{x_3} 1\cdot dx\right|} \leqslant \sqrt{B}\sqrt{\frac{L}{N}}.$$

On déduit de là que

$$|v(x_0)| \leqslant \sqrt{N\frac{A}{L}} + \sqrt{B\frac{L}{N}}. \tag{3}$$

Dans cette évaluation N est un nombre naturel arbitraire. Comme la différence des racines carrées de deux entiers naturels consécutifs est inférieure à l'unité

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < 1.$$

on peut prendre N tel que

$$L^{1/2}(B/A)^{1/4} < \sqrt{N} \leqslant L^{1/2}(B/A)^{1/4} + 1.$$

Ces inégalités et l'évaluation (3), compte tenu de l'arbitraire du point x_0, nous conduisent à l'évaluation (2). Si l'on pose dans l'inégalité (3) $N = 1$, on obtient l'évaluation (1). Le lemme est démontré.

Lemme 2. *Soit une fonction $u(x, t)$ continue, continûment dérivable par morceaux dans le rectangle $0 \leqslant x \leqslant L$, $0 \leqslant t \leqslant T$ et vérifiant les inégalités*

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant T} \int_0^L u^2(x, t)\, dx \leqslant A, \quad \max_{0 \leqslant t \leqslant T} \int_0^L (u_x^2 + u_t^2)|_{t=\text{const}}\, dx \leqslant B.$$

Alors cette fonction vérifie les inégalités

$$|u(x, t)| \leqslant (A/L)^{1/2} + (BL)^{1/2},$$

$$|u(x, t)| \leqslant 2(AB)^{1/4} + (A/L)^{1/2}, \tag{4}$$

$$|u(x_1, t_1) - u(x_2, t_2)| \leqslant 4B^{1/2}|t_1 - t_2|^{1/2} + B^{1/2}|x_1 - x_2|^{1/2} \tag{5}$$

quels que soient les deux points (x_1, t_1) et (x_2, t_2) du rectangle envisagé tels que $|t_1 - t_2| < L$.

Les deux premières inégalités résultent aussitôt du lemme précédent. Pour démontrer la dernière, considérons deux instants arbitraires $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant T$ $(t_2 - t_1 < L)$. On a évidemment

$$|u(x, t_2) - u(x, t_1)| = \left| \int_{t_1}^{t_2} u_t(x, t)\, dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\int_{t_1}^{t_2} u_t^2(x, t)\, dt} \sqrt{\int_{t_1}^{t_2} 1 \cdot dx} = (t_2 - t_1)^{1/2} \sqrt{\int_{t_1}^{t_2} u_t^2(x, t)\, dt}.$$

Posons $v(x) = u(x, t_2) - u(x, t_1)$. Alors,

$$\int_0^L v^2(x)\, dx \leqslant (t_2 - t_1) \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L u_t^2\, dx\, dt \leqslant (t_2 - t_1)^2 B.$$

En outre,

$$\int_0^L v_x^2\, dx \leqslant 2 \int_0^L \{[u_x(x, t_1)]^2 + [u_x(x, t_2)]^2\}\, dx \leqslant 2B.$$

Si l'on applique à $v(x)$ l'inégalité (2) du lemme précédent (le rôle de la constante B est tenu ici par $2B$, et le rôle de la constante A par la quantité $(t_2 - t_1)^2 B$), on obtient

$$|v(x)| \leqslant 2 \cdot 2^{1/4} B^{1/2} (t_2 - t_1)^{1/2} + \frac{B^{1/2}}{L^{1/2}} (t_2 - t_1) < 4B^{1/2} (t_2 - t_1)^{1/2},$$

étant donné que $t_2 - t_1 < L$. De sorte que

$$|u(x, t_2) - u(x, t_1)| \leqslant 4B^{1/2} |t_2 - t_1|^{1/2}.$$

Si l'on note par ailleurs que

$$|u(x_1, t) - u(x_2, t)| = \left| \int_{x_1}^{x_2} u_x(x, t)\, dx \right| \leqslant \sqrt{|x_1 - x_2|} \sqrt{\int_0^L u_x^2\, dx} \leqslant B^{1/2} |x_1 - x_2|^{1/2},$$

on obtient la dernière des inégalités dans l'affirmation du lemme 2.

Ces évaluations simples mais importantes jouent un rôle majeur dans notre démonstration de l'existence des solutions des équations hyperboliques, ce qui explique l'attention particulière qui leur a été accordée.

Si l'on a toute une famille de fonctions $\{u\}$ vérifiant les inégalités intégrales écrites, les inégalités (4) et (5) ont lieu pour n'importe quelle fonction de cette famille. L'inégalité (4) affirme que la famille $\{u\}$ est uniformément bornée. En vertu de l'inégalité (5), cette famille sera également continue *).

Le théorème d'Arzelá stipule : *toute famille de fonctions $\{u\}$ uniformément bornée et également continue dans un rectangle $0 \leqslant x \leqslant L$, $0 \leqslant t \leqslant T$ est compacte au sens de la convergence uniforme.*

En d'autres termes : on peut tirer de toute suite infinie de fonctions appartenant à une telle famille une sous-suite uniformément convergente.

Conséquence du théorème d'Arzelá et des égalités déduites : *Une famille de fonctions $\{u(x, t)\}$ données dans le rectangle $0 \leqslant x \leqslant L$, $0 \leqslant t \leqslant T$, vérifiant dans ce rectangle les inégalités*

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant T} \int_0^L u^2\, dx \leqslant A, \quad \max_{0 \leqslant t \leqslant T} \int_0^L (u_x^2 + u_t^2)\, dx \leqslant B$$

est compacte au sens de la convergence uniforme.

Nous allons donner la démonstration du théorème d'Arzelá. Nous nous bornerons au seul cas où l'égale continuité est donnée par l'inégalité

$$|u(x_1, t_1) - u(x_2, t_2)| \leqslant \alpha \sqrt{|x_1 - x_2|} + \beta \sqrt{|t_1 - t_2|}. \tag{6}$$

Soit en outre

$$|u(x, t)| < M. \tag{7}$$

*) Une famille $\{u(x, t)\}$ est dite *également continue* s'il existe pour tout $\varepsilon > 0$ un $\delta > 0$ tel que l'inégalité $|\Delta x| + |\Delta t| < \delta$ entraîne pour chaque fonction $u(x, t)$ de la famille l'inégalité $|\Delta u| < \varepsilon$.

Nous démontrerons que les fonctions vérifiant les inégalités (6) et (7) avec α, β, M arbitraires mais fixes forment un ensemble compact, c'est-à-dire que de toute suite infinie de telles fonctions on peut tirer une sous-suite qui converge uniformément vers une fonction continue. Il suffira pour cela de démontrer qu'on peut tirer de toute suite infinie de telles fonctions $\{u_1(x, t), \ldots, u_n(x, t), \ldots\}$ une sous-suite $\{u_{k_1}, u_{k_2}, u_{k_3}, \ldots\}$ de telle sorte que, pour tout p entier, on ait l'inégalité

$$|u_{k_r}(x, t) - u_{k_s}(x, t)| < \frac{1}{2^p}$$

pour $r, s \geqslant p$. En effet, la suite $\{u_{k_n}(x, t)\}$ vérifie le critère de Cauchy de convergence uniforme, si bien qu'elle converge uniformément vers une fonction continue $\bar{u}(x, t)$.

Passant à la limite $r \to \infty$ dans l'inégalité (6) écrite pour la fonction u_{k_r}, nous déduisons que la fonction limite $\bar{u}(x, t)$ vérifie la même inégalité :

$$|\bar{u}(x_1, t_1) - \bar{u}(x_2, t_2)| \leqslant \alpha \sqrt{|x_1 - x_2|} + \beta \sqrt{|t_1 - t_2|}.$$

A présent, nous ramènerons la question de la possibilité du choix d'une sous-suite infinie $\{u_{k_1}, u_{k_2}, \ldots, u_{k_n}, \ldots\}$ à une autre question, que nous résoudrons sans trop de difficultés. A savoir, nous montrerons que la possibilité du choix d'une telle sous-suite résulte du fait que, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un nombre fini $2^{H(\varepsilon)}$ de fonctions $\varphi_1(x, t)$, $\varphi_2(x, t)$, $\ldots$, $\varphi_{2^{H(\varepsilon)}}(x, t)$ telles que, pour toute fonction $u(x, t)$ de notre ensemble, on peut trouver une de ces φ_h dont la distance à $u(x, t)$ est au plus égale à ε :

$$|u(x, t) - \varphi_h(x, t)| \leqslant \varepsilon.$$

On dit que les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{2^{H(\varepsilon)}}$ forment un ε-*réseau fini*. Le nombre $H(\varepsilon)$, qui caractérise le nombre minimum de fonctions formant le réseau ε, est appelé l'ε-*entropie de l'ensemble* de fonctions $\{u(x, t)\}$.

Prenons $\varepsilon_1 = 1/2^2$. On trouve parmi les fonctions du réseau ε_1 au moins une fonction dont le voisinage ε_1 contient une sous-suite infinie $\{u_{k_1}, u_{k_2}, \ldots\}$ de la suite $\{u_1, u_2, \ldots\}$. Nous désignerons par φ cette fonction du réseau ε_1. Quelles que soient u_{k_l}, u_{k_m} de cette sous-suite, elles vérifient l'inégalité

$$|u_{k_l} - u_{k_m}| \leqslant |u_{k_l} - \varphi| + |\varphi - u_{k_m}| \leqslant \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} = \frac{1}{2}.$$

Posons à présent $\varepsilon_2 = \frac{1}{2^3}$ et tirons de la sous-suite $\{u_{k_1}, u_{k_2}, \ldots\}$ une sous-suite infinie $\{u_{l_1}, u_{l_2}, \ldots\}$ de fonctions situées dans le voisinage ε_2 de l'une des fonctions du réseau ε_2 de telle sorte que

$l_i \neq k_i$. Pour les fonctions de cette sous-suite

$$|u_{l_n} - u_{l_m}| < 2\varepsilon_2 = \frac{1}{2^2}.$$

Continuant ainsi, on voit que la suite formée par les premières fonctions $\{u_{k_1}, u_{l_1}, \ldots\}$ de nos sous-suites vérifie le critère de Cauchy.

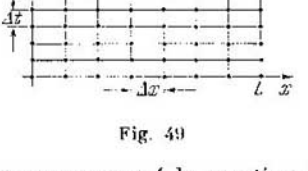

Fig. 49

Ainsi donc, nous avons ramené la question de la compacité de notre ensemble de fonctions à la question de la finitude de son ε-entropie.

Evaluons supérieurement l'ε-entropie de l'ensemble de fonctions $u(x, t)$ données dans le rectangle $0 \leqslant x \leqslant L$, $0 \leqslant t \leqslant T$ et vérifiant les inégalités

$$|u(x_1, t_1) - u(x_2, t_2)| < \alpha \sqrt{|x_1 - x_2|} + \beta \sqrt{|t_1 - t_2|}, \qquad (6)$$

$$|u(x, t)| < M. \qquad (7)$$

A cet effet, partageons le rectangle en petits rectangles de côtés

$$\Delta x = \frac{L}{\left[\frac{36\alpha^2 L}{\varepsilon^2}\right] + 1} \leqslant \frac{\varepsilon^2}{36\alpha^2},$$

$$\Delta t = \frac{T}{\left[\frac{36\beta^2 T}{\varepsilon^2}\right] + 1} \leqslant \frac{\varepsilon^2}{36\beta^2}.$$

Nous appellerons *nœuds* les sommets de ces petits rectangles (fig. 49).

Considérons les fonctions définies seulement aux nœuds, prenant en ces nœuds des valeurs égales à l'un des nombres

$$-\left(\left[\frac{3M}{\varepsilon}\right] + 1\right)\frac{\varepsilon}{3}, \; -\left[\frac{3M}{\varepsilon}\right]\frac{\varepsilon}{3}, \; \ldots, \; -\frac{\varepsilon}{3}, \; 0, \; \frac{\varepsilon}{3}, \; \ldots, \; \left[\frac{3M}{\varepsilon}\right]\frac{\varepsilon}{3}, \; \left(\left[\frac{3M}{\varepsilon}\right] + 1\right)\frac{\varepsilon}{3}$$

et variant d'un nœud à un nœud voisin au plus de $\varepsilon/3$. On peut interpoler linéairement chacune de ces fonctions sur toutes les arêtes horizontales entre les nœuds, puis, par interpolation linéaire sur t, définir partout dans les bandes entre les rangées horizontales voisines d'arêtes, c'est-à-dire partout dans le rectangle $0 \leqslant x \leqslant L$, $0 \leqslant t \leqslant T$.

Il est facile de vérifier que pour chaque point (x, t) de ce rectangle on peut trouver un nœud qui en est éloigné au plus de $\Delta x/2$ suivant les x et de $\Delta t/2$ suivant les t, la valeur de notre fonction en ce nœud différant de la valeur au point (x, t) de $\varepsilon/3$ au plus. J'affirme qu'on peut construire un ε-réseau seulement au moyen de cet ensemble de fonctions.

Prenons une fonction quelconque $u(x, t)$ vérifiant les inégalités (6) et (7), et considérons ses valeurs aux nœuds. Trouvons en chaque nœud le nombre le plus proche de $u(x, t)$ de la forme $p\varepsilon/3$ avec p entier. Il est évident que

$$-\left(\left[\frac{3M}{\varepsilon}\right]+1\right) \leqslant p \leqslant \left[\frac{3M}{\varepsilon}\right]+1.$$

Etant donné que les valeurs de $u(x, t)$ en deux nœuds voisins diffèrent au plus de $\varepsilon/3$:

$$|\Delta u| \leqslant \alpha \sqrt{\Delta x} + \beta \sqrt{\Delta t} < \alpha \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{36\alpha^2}} + \beta \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{36\beta^2}} = \frac{\varepsilon}{3},$$

les nombres p aux nœuds voisins varient au plus de 1, c'est-à-dire que la condition que nous avons posée est remplie. En prolongeant

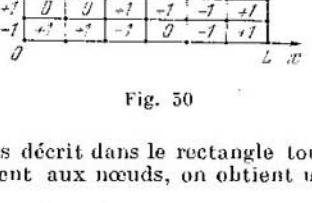

Fig. 50

comme nous l'avons décrit dans le rectangle tout entier cette fonction définie seulement aux nœuds, on obtient une certaine fonction $\varphi(x, t)$.

Soit (x_0, t_0) le nœud le plus proche suivant les x et suivant les t du point (x, t). Alors

$$|u(x, t) - \varphi(x, t)| \leqslant |u(x, t) - u(x_0, t_0)| + |u(x_0, t_0) - \varphi(x_0, t_0)| +$$
$$+ |\varphi(x_0, t_0) - \varphi(x, t)| \leqslant |u(x, t) - u(x_0, t_0)| + \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{3} \leqslant$$
$$\leqslant \alpha \sqrt{\frac{\Delta x}{2}} + \beta \sqrt{\frac{\Delta t}{2}} + \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{3} \leqslant \frac{\varepsilon}{6\sqrt{2}} + \frac{\varepsilon}{6\sqrt{2}} + \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon.$$

Nous avons montré que nos fonctions $\varphi(x, t)$, définies par la donnée des valeurs discrètes seulement aux nœuds, forment effectivement un ε-réseau. Reste à évaluer le nombre de ces fonctions.

Pour cela nous procéderons comme suit. Écrivons sur les arêtes de la rangée verticale à l'extrême gauche et sur toutes les arêtes horizontales les nombres ± 1, 0 à raison d'un seul sur chaque arête, comme nous l'avons indiqué sur la fig. 50. On fera correspondre de tels jeux à chacune de nos fonctions déterminées aux nœuds. Nous écrirons $+1$ sur une arête si la fonction croît sur cette arête, -1 si elle décroît, 0 si elle ne varie pas. Il est clair qu'à chaque fonction nodale correspond un tel jeu de nombres sur les arêtes, et cette fonction est entièrement déterminée par la valeur à l'angle en bas à gauche et par ce jeu.

Certes, on peut avoir des jeux à l'aide desquels sont déterminées des fonctions qui varient le long des arêtes verticales de plus de ε, c'est-à-dire que le nombre de fonctions nodales déterminées par de tels jeux et de telles valeurs à l'angle en bas à gauche est supérieur au nombre de fonctions nodales admissibles, si bien qu'en calculant leur nombre nous évaluons supérieurement le nombre de fonctions admissibles.

Le nombre d'arêtes affectées de chiffres est

$$\frac{T}{\Delta t}+\frac{L}{\Delta x}\left(\frac{T}{\Delta t}+1\right)<\left(\frac{T}{\Delta t}+1\right)\left(\frac{L}{\Delta x}+1\right)=$$

$$=\left(\left[\frac{36\alpha^2 L}{\varepsilon^2}\right]+2\right)\left(\left[\frac{36\beta^2 T}{\varepsilon^2}\right]+2\right)\leqslant 72^2\,\frac{\alpha^2\beta^2 LT}{\varepsilon^4}$$

pour les ε suffisamment petits.

Le nombre de différents jeux de nombres sur les arêtes n'est pas supérieur à

$$3^{72^2\cdot\frac{\alpha^2\beta^2 LT}{\varepsilon^4}}.$$

Le nombre de différentes valeurs qui peuvent être prises à l'angle inférieur de gauche est

$$2\left(\left[\frac{3M}{\varepsilon}\right]+1\right)+1<\frac{12M}{\varepsilon}.$$

De la sorte, le nombre de différentes fonctions nodales est inférieur à

$$\frac{12M}{\varepsilon}\cdot 3^{72^2\cdot\frac{\alpha^2\beta^2 LT}{\varepsilon^4}}.$$

Nous avons déjà noté que le nombre de fonctions de l'ε-réseau, égal à $2^{H(\varepsilon)}$, n'est pas supérieur au nombre de fonctions nodales. D'où

$$H(\varepsilon)\leqslant\frac{\text{const}}{\varepsilon^4}.$$

Ainsi donc, nous avons non seulement démontré que le nombre de fonctions de l'ε-réseau est fini, mais encore nous avons évalué leur nombre.

La notion d'ε-entropie, introduite par A. Kolmogorov, joue un rôle important en mathématiques modernes. Pour comprendre son sens, supposons qu'on veuille indiquer à ε près une fonction concrète quelconque $u(x, t)$. A cet effet, il suffit évidemment d'indiquer le numéro de la fonction la plus proche de l'ε-réseau.

Si l'on numérote ces fonctions au moyen des nombres du système de calcul binaire, la longueur de ces numéros sera précisément $H(\varepsilon)$. Par conséquent, si l'on veut envoyer un télégramme indiquant une certaine fonction concrète, ce télégramme devra contenir $H(\varepsilon)$ signes.

La notion d'ε-entropie n'interviendra plus dans ce cours, mais nous l'avons quand même examinée vu son importance majeure, moyennant une petite digression.

P r o b l è m e. Montrez qu'un ensemble infini de fonctions $\{u(x, t)\}$ telles que

$$|u(x, t)| < M,$$

$$|u(x_1, t_1) - u(x_2, t_2)| < N(|x_1 - x_2|^\gamma + |t_1 - t_2|^\gamma) \qquad (\gamma > 0),$$

admet dans un domaine borné un ε-réseau fini, étant donc compact au sens de la convergence uniforme. Evaluez son ε-entropie.

§ 17. Théorème d'existence de la solution du problème mixte

La démonstration du théorème d'existence de la solution d'un système hyperbolique commence par la description du prolongement à tout le rectangle des fonctions de réseau. Evaluations de ces prolongements ou « interpolations » en tant que conséquences des évaluations des fonctions de réseau. Vérification des conditions initiales et aux limites pour les fonctions limites. Démonstration de la dérivabilité des fonctions limites. Formulation du problème, passage à la limite dans les équations aux différences. Théorème d'existence. Inégalités déduites chemin faisant pour les solutions et pour leurs dérivées. Quelques remarques pour le théorème d'existence et d'unicité du problème mixte pour le système hyperbolique :

1) renoncement à la dissipation des conditions aux limites,

2) cas où les coefficients sont indépendants du temps,

3) théorème d'existence de la solution du problème de Cauchy dans le triangle caractéristique.

Le but poursuivi par ce paragraphe est de démontrer le théorème d'existence de la solution du problème mixte pour un système hyperbolique d'équations à deux variables indépendantes. L'idée fondamentale de cette démonstration est de déduire des solutions approchées aux différences et des évaluations pour ces solutions. Ces évaluations assurent la compacité des solutions approchées. Après quoi, on vérifie sans peine que les limites des suites convergentes de solutions approchées sont des solutions exactes.

Les évaluations pour les solutions approchées et le théorème de compacité ont déjà été étudiés. Le théorème d'existence s'obtient comme une simple réunion de ces faits déjà connus. Une difficulté, non fondamentale il est vrai, est que les théorèmes de compacité ont été étudiés pour des fonctions définies en tous les points d'un rectangle, alors que les solutions approchées sont construites seulement sur un réseau discret. Pour résoudre cette différence, nous commencerons la démonstration du théorème d'existence en étudiant

l'interpolation des fonctions de réseau. Une telle interpolation permettra de prolonger les fonctions de réseau à tous les points du rectangle et de leur appliquer ensuite le théorème de compacité.

Considérons le rectangle $0 \leqslant x \leqslant L$, $0 \leqslant t \leqslant T$ sur lequel est construit le réseau aux différences de pas τ (suivant le temps) et h (suivant l'espace). Nous supposerons que la base $[0, L]$ et la hauteur $[0, T]$ contiennent un nombre entier de pas (h ou τ respectivement). En chaque point du réseau aux différences est définie la valeur de la fonction de réseau. La valeur de cette fonction au point de coordonnées $t = i\tau$, $x = kh$ sera notée u_{ik}. Définissons la fonction continue $\widetilde{u}(x, t)$ dans chaque rectangle $i\tau \leqslant t \leqslant (i+1)\tau$, $kh \leqslant x \leqslant (k+1)h$ par la formule:

$$\widetilde{u}(x, t) = u_{ik}\left(i+1-\frac{t}{\tau}\right)\left(k+1-\frac{x}{h}\right) + u_{i,\,k+1}\left(i+1-\frac{t}{\tau}\right)\left(\frac{x}{h}-k\right) + u_{i+1,\,k}\left(\frac{t}{\tau}-i\right)\left(k+1-\frac{x}{h}\right) + u_{i+1,\,k+1}\left(\frac{t}{\tau}-i\right)\left(\frac{x}{h}-k\right).$$

La fonction $\widetilde{u}(x, t)$ est linéaire par morceaux suivant les x pour chaque t fixe, et linéaire par morceaux suivant les t pour chaque x.

Supposons que la fonction de réseau vérifie les inégalités

$$\max_i h \sum_k u_{ik}^2 \leqslant A,$$

$$\max_i h \sum_k \left(\frac{u_{i+1,\,k}-u_{ik}}{\tau}\right)^2 \leqslant B_1,$$

$$\max_i h \sum_k \left(\frac{u_{i,\,k+1}-u_{ik}}{h}\right)^2 \leqslant B_2.$$

Nous montrerons qu'on a alors pour l'interpolation de $\widetilde{u}(x, t)$ les évaluations analogues

$$\max_t \int_0^L \widetilde{u}^2(x, t)\,dx \leqslant A,$$

$$\max_t \int_0^L \widetilde{u}_t^2(x, t)\,dx \leqslant B_1,$$

$$\max_t \int_0^L \widetilde{u}_x^2(x, t)\,dx \leqslant B_2.$$

Nous ferons d'abord la démonstration pour la première inégalité. Pour $t = i\tau$ et pour $kh \leqslant x \leqslant (k+1)h$ on a pour $\widetilde{u}(x, i\tau)$ la

formule

$$\tilde{u}(x, i\tau) = u_{ih}\left(k+1-\frac{x}{h}\right) + u_{i,\,k+1}\left(\frac{x}{h}-k\right).$$

Calculons l'intégrale

$$\int_{kh}^{(k+1)h} \tilde{u}^2(x, i\tau)\,dx = \int_{kh}^{(k+1)h} \left[u_{ih}\left(k+1-\frac{x}{h}\right) + u_{i,\,k+1}\left(\frac{x}{h}-k\right)\right]^2 dx.$$

Faisons le changement de variables $\frac{x}{h}-k=\xi$

$$\int_{kh}^{(k+1)h} \tilde{u}^2(x, i\tau)\,dx = h\int_0^1 [u_{ih}(1-\xi) + u_{i,\,k+1}\xi]^2\,d\xi =$$

$$= \frac{h}{3}\left(u_{ih}^2 + u_{ih}u_{i,\,k+1} + u_{i,\,k+1}^2\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{h}{3}\left(u_{ih}^2 + \frac{u_{ih}^2+u_{i,\,k+1}^2}{2} + u_{i,\,k+1}^2\right) = h\frac{u_{ih}^2+u_{i,\,k+1}^2}{2}.$$

Démontrant cette inégalité et sommant sur tous les k, il vient

$$\int_0^l \tilde{u}^2(x, i\tau)\,dx \leqslant h\sum_k u_{ih}^2.$$

Soit à présent $i\tau < t < (i+1)\tau$. La fonction $\tilde{u}(x, t)$ est linéaire par rapport à t dans cet intervalle :

$$\tilde{u}(x, t) = \left(1-\frac{t-i\tau}{\tau}\right)\tilde{u}(x, i\tau) + \frac{t-i\tau}{\tau}\tilde{u}(x, (i+1)\tau),$$

$$\tilde{u}^2(x, t) \leqslant \left(1-\frac{t-i\tau}{\tau}\right)\tilde{u}^2(x, i\tau) + \frac{t-i\tau}{\tau}\tilde{u}^2(x, (i+1)\tau).$$

Il est évident qu'on peut écrire pour $i\tau < t < (i+1)\tau$, c'est-à-dire pour $0 < \frac{t-i\tau}{\tau} < 1$,

$$\int_0^l \tilde{u}^2(x, t)\,dx \leqslant \max\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\int_0^l \tilde{u}^2(x, i\tau)\,dx \\ \displaystyle\int_0^l \tilde{u}^2(x, (i+1)\tau\,dx\end{array}\right. \leqslant \max_t h\sum_k u_{ih}^2.$$

L'inégalité

$$\max_t \int_0^l \tilde{u}^2(x, t)\,dx \leqslant A$$

est démontrée.

Займемся теперь интегралом

$$\int_0^l \tilde{u}_t^2(x, t)\,dx.$$

В интервале $i\tau < t < (i+1)\tau$ производная $\tilde{u}_t$ не зависит от t и является кусочно-линейной функцией от x. А именно, при $kh < x < (k+1)h$

$$\tilde{u}_t(x, t) = \left(k+1-\frac{x}{h}\right)\frac{u_{i+1,k}-u_{i,k}}{\tau} + \left(\frac{x}{h}-k\right)\frac{u_{i+1,k+1}-u_{i,k+1}}{\tau}.$$

Вычисление интеграла $\int_{kh}^{(k+1)h} \tilde{u}_t^2(x, t)\,dx$ производится точно так же, как и вычисление интеграла $\int_{kh}^{(k+1)h} \tilde{u}^2(x, i\tau)\,dx$:

$$\int_{kh}^{(k+1)h} \tilde{u}_t^2(x, t)\,dx =$$

$$= h\int_0^1 \left[\frac{u_{i+1,k}-u_{ik}}{\tau}(1-\xi) + \frac{u_{i+1,k+1}-u_{i,k+1}}{\tau}\xi\right]^2 d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \frac{h}{2}\left[\left(\frac{u_{i+1,k}-u_{i,k}}{\tau}\right)^2 + \left(\frac{u_{i+1,k+1}-u_{i,k+1}}{\tau}\right)^2\right].$$

Суммируя эти неравенства по k, получаем:

$$\int_0^l \tilde{u}_t^2(x, t)\,dx \leqslant h\sum_k \left(\frac{u_{i+1,k}-u_{i,k}}{\tau}\right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \max_i h\sum_k \left(\frac{u_{i+1,k}-u_{i,k}}{\tau}\right)^2 \leqslant B_1.$$

Мы доказали тем самым, что

$$\max_t \int_0^l \tilde{u}_t^2(x, t)\,dx \leqslant B_1.$$

Обозначим теперь через $\tilde{u}_x(x, i\tau)$ производную, которая при $t = i\tau$ постоянна в интервале $kh < x < (k+1)h$:

$$\tilde{u}_x(x, i\tau) = \frac{u_{i,k+1}-u_{ik}}{h}.$$

Отсюда

$$\int_0^l \tilde{u}_x^2(x, i\tau)\,dx = h\sum_k \left(\frac{u_{i,k+1}-u_{ik}}{h}\right)^2.$$

Dans l'intervalle temporel $i\tau < t < (i+1)\tau$ la dérivée $\widehat{u}_x$ est linéaire suivant t :

$$\widehat{u}_x(x, t) = \left(1 - \frac{t - i\tau}{\tau}\right) \widehat{u}_x(x, i\tau) + \frac{t - i\tau}{\tau} \widehat{u}_x(x, (i+1)\tau).$$

D'où

$$\int_0^l \widehat{u}_x^2(x, t)\, dx \leqslant \left(1 - \frac{t - i\tau}{\tau}\right) \int_0^l \widehat{u}_x^2(x, i\tau)\, dx +$$

$$+ \frac{t - i\tau}{\tau} \int_0^l \widehat{u}_x^2(x, (i+1)\tau)\, dx \leqslant \max_i \int_0^l \widehat{u}_x^2(x, i\tau)\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \max_i h \sum_h \left(\frac{u_{i, h+1} - u_{i, h}}{h}\right)^2.$$

La dernière des trois inégalités annoncées

$$\max_t \int_0^l \widehat{u}_x^2(x, t)\, dx \leqslant B_2$$

est démontrée.

Supposons que l'on ait non pas une fonction de réseau u_{ih}, mais toute une famille (infinie) de telles fonctions. Supposons que chaque fonction de cette famille vérifie les inégalités

$$\max_i h \sum_h u_{ih}^2 \leqslant A,$$

$$\max_i h \sum_h \left(\frac{u_{i+1, h} - u_{i, h}}{\tau}\right)^2 \leqslant B_1,$$

$$\max_i h \sum_h \left(\frac{u_{i, h+1} - u_{ih}}{\tau}\right)^2 \leqslant B_2.$$

Alors, le prolongement $\widehat{u}(x, t)$ à tout le rectangle de chacune des fonctions de notre famille vérifiera les inégalités

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant T} \int_0^l \widehat{u}^2(x, t)\, dx \leqslant A,$$

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant T} \int_0^l (\widehat{u}_t^2 + \widehat{u}_x^2)\, dx \leqslant B_1 + B_2 = B.$$

Comme on l'a montré au paragraphe précédent, les fonctions $\{\widehat{u}\}$ forment une famille bornée et également continue. D'après le théorème d'Arzelà, cette famille est compacte par rapport à la convergence uniforme.

On sait que lorsque les différences temporelles $t_1 - t_2$ sont suffisamment petites,

$$|\tilde{u}(x_2, t_2) - \tilde{u}(x_1, t_1)| \leqslant \sqrt{B}\sqrt{|x_2 - x_1|} + 4\sqrt{B}\sqrt{|t_2 - t_1|},$$

$$|\tilde{u}(x, t)| \leqslant \sqrt{\frac{A}{L}} + 2\sqrt[4]{AB}.$$

Fixant x_1, t_1, x_2, t_2 et choisissant la suite de fonctions $\{\tilde{u}\}$ uniformément convergente vers la limite $u(x, t)$, on obtient évidemment pour cette fonction limite les mêmes inégalités avec les mêmes constantes

$$|u(x_2, t_2) - u(x_1, t_1)| \leqslant \sqrt{B}\sqrt{|x_2 - x_1|} + 4\sqrt{B}\sqrt{|t_2 - t_1|},$$

$$|u(x, t)| \leqslant \sqrt{\frac{A}{L}} + 2\sqrt[4]{AB}.$$

Supposons maintenant que chacune des fonctions de réseau u_{ih} prenne pour $t = 0$ des valeurs égales aux valeurs d'une certaine fonction continue fixe $\varphi(x)$:

$$u_{0k} = \varphi(kh).$$

Alors, la fonction correspondante interpolée $\tilde{u}(x, t)$ vérifie de toute évidence les inégalités

$$|\tilde{u}(x, 0) - \tilde{u}(kh)| = |\tilde{u}(x, 0) - \varphi(kh)| \leqslant \sqrt{B}\sqrt{|x - kh|},$$

$$|\tilde{u}(x, 0) - \varphi(x)| \leqslant \sqrt{B}\sqrt{|x - kh|} + |\varphi(x) - \varphi(kh)|.$$

Si l'on prend $k = \left[\frac{x}{h}\right]$ de telle sorte que la distance entre les points x et kh soit plus petite que h, et qu'on considère ensuite la suite convergente de fonctions $\{\tilde{u}\}$ interpolées suivant les fonctions de réseau correspondant aux pas de plus en plus petits, on obtient pour la fonction limite l'égalité $u(x, 0) = \varphi(x)$. Par conséquent, la fonction limite $u(x, t)$ prend pour $t = 0$ les valeurs initiales $\varphi(x)$.

On peut établir de façon analogue que si les familles de fonctions de réseau $\{u_{ik}^{(1)}\}$, $\{u_{ik}^{(2)}\}$, $\{u_{ik}^{(3)}\}$ étaient pour $k = 0$ (c'est-à-dire pour $x = 0$) liées par des relations de la forme

$$u_{i0}^{(1)} = \alpha_{12}(i\tau)\, u_{i0}^{(2)} + \alpha_{13}(i\tau)\, u_{i0}^{(3)}$$

avec des fonctions continues $\alpha_{12}(t)$, $\alpha_{13}(t)$, les fonctions limites $u^{(1)}$, $u^{(2)}$, $u^{(3)}$ doivent forcément vérifier la condition à la limite

$$u^{(1)}(0, t) = \alpha_{12}(t)\, u^{(2)}(0, t) + \alpha_{13}(t)\, u^{(3)}(0, t).$$

Bien entendu, on suppose réalisées pour chaque fonction de réseau $u_{ik}^{(p)}$ les mêmes évaluations assurant la compacité que celles supposées réalisées pour u_{ik} tout au long de ce paragraphe.

Le nombre de fonctions liées par une telle condition aux limites peut être évidemment quelconque. Il est naturel aussi que la frontière de gauche ne diffère en rien de la frontière de droite.

Si une famille de fonctions de réseau vérifie des données initiales continues et des conditions aux limites avec des coefficients continus, et si ces fonctions obéissent aux inégalités plus haut indiquées assurant leur compacité, les limites de suites convergentes de telles fonctions (préalablement interpolées) vérifient également les mêmes conditions initiales et aux limites.

Soient à présent données deux familles de fonctions de réseau $\{u_{ik}\}$ et $\{v_{lh}\}$ liées par les relations

$$v_{ih} = \frac{u_{l,\,h+1} - u_{lh}}{h}$$

et satisfaisant aux inégalités

$$\max_i h \sum_h u_{ih}^2 \leqslant A, \quad \max_i h \sum_h v_{ih}^2 \leqslant A,$$

$$\max_i h \sum_h \left(\frac{u_{i+1,\,h} - u_{ih}}{\tau}\right)^2 \leqslant B_1, \quad \max_i h \sum_h \left(\frac{v_{i+1,\,h} - v_{ih}}{\tau}\right)^2 \leqslant B_1,$$

$$\max_i h \sum_h \left(\frac{u_{i,\,h+1} - u_{ih}}{h}\right)^2 \leqslant B_2, \quad \max_i h \sum_h \left(\frac{v_{i,\,h+1} - v_{ih}}{h}\right)^2 \leqslant B_2.$$

Les familles de fonctions interpolées $\{\widetilde{u}\}$, $\{\widetilde{v}\}$ sont alors compactes. Prenant une sous-suite convergente de fonctions $\{\widetilde{u}\}$, puis tirant de celle-ci une sous-suite telle que les $\widetilde{v}$ correspondantes convergent aussi, on construit les fonctions $u(x, t)$ et $v(x, t)$ limites de ces sous-suites. Nous allons démontrer que

$$v(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$$

et établir simultanément l'existence de la dérivée au second membre de cette égalité.

D'évidence, on a les chaînes suivantes d'égalités $(x_2 > x_1)$:

$$\widetilde{u}(x_2, t) - \widetilde{u}(x_1, t) = \widetilde{u}\left(\left[\frac{x_2}{h}\right]h, \left[\frac{t}{\tau}\right]\tau\right) - \widetilde{u}\left(\left[\frac{x_1}{h}\right]h, \left[\frac{t}{\tau}\right]\tau\right) +$$

$$+ O(\sqrt{\tau} + \sqrt{h}) = \sum_{h=\left[\frac{x_1}{h}\right]}^{h=\left[\frac{x_2}{h}\right]-1} \frac{u_{i,\,h+1} - u_{ih}}{h} h + O(\sqrt{\tau} + \sqrt{h}) =$$

$$= \sum_{h=\left[\frac{x_1}{h}\right]}^{h=\left[\frac{x_2}{h}\right]-1} v_{ih} h + O(\sqrt{\tau} + \sqrt{h});$$

$$\sum_{k=\left[\frac{x_1}{h}\right]}^{k=\left[\frac{x_2}{h}\right]-1} v_{ik}h = \sum_{k=\left[\frac{x_1}{h}\right]}^{k=\left[\frac{x_2}{h}\right]-1} \int_{kh}^{(k+1)h} \breve{v}(x,\ i\tau)\,dx + O\left(|x_2-x_1|\sqrt{h}\right) =$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \breve{v}(x,\ i\tau)\,dx + O\left(|x_2-x_1|\sqrt{h}\right) + O\left(\sqrt{h}\right) =$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \breve{v}(x,\ t)\,dx + O\left(|x_2-x_1|\sqrt{h}\right) + O\left(\sqrt{h}\right) +$$

$$+ O\left(|x_2-x_1|\sqrt{|t-i\tau|}\right);$$

$$\breve{u}(x_2,\ t) - \breve{u}(x_1,\ t) = \int_{x_1}^{x_2} \breve{v}(x,\ t)\,dx + O\left(\sqrt{h}+\sqrt{\tau}\right).$$

Passant à la limite en faisant $h,\ \tau \to 0$, on obtient pour les fonctions limites $u(x,\ t)$, $v(x,\ t)$:

$$u(x_2,\ t) - u(x_1,\ t) = \int_{x_1}^{x_2} v(x,\ t)\,dx.$$

Il est clair que cette égalité peut être dérivée par rapport à la borne supérieure. Ce faisant, on obtient précisément la démonstration de notre assertion :

$$v(x,\ t) = \frac{\partial u(x,\ t)}{\partial x}.$$

Remarque. Les rapports aux différences à droite et à gauche

$$v_{ik} = \frac{u_{i,\,k+1} - u_{ik}}{h}, \quad \hat{v}_{ik} = \frac{u_{ik} - u_{i,\,k-1}}{h}$$

tendent, lorsque $h,\ \tau \to 0$, vers la même limite $\frac{\partial u}{\partial x}$, pourvu que les v_{ik} tendent vers cette limite (les conditions imposées aux rapports aux différences dans la démonstration précédente sont supposées remplies ici aussi).

La démonstration résulte de l'égalité pour les fonctions interpolées :

$$\breve{v}(x,\ t) - \hat{\breve{v}}(x,\ t) = \breve{v}(x,\ t) - \breve{v}(x-h,\ t) = O\left(\sqrt{h}\right).$$

Supposons en outre encore que les rapports

$$w_{ik} = \frac{u_{i+1,\,k} - u_{ik}}{\tau}$$

satisfont aux inégalités

$$\max_i h \sum_k w_{ih}^2 \leqslant A,$$

$$\max_i h \sum_k \left(\frac{w_{i+1,\,h} - w_{ih}}{\tau} \right)^2 \leqslant B_1,$$

$$\max_i h \sum_k \left(\frac{w_{i,\,h+1} - w_{ih}}{h} \right)^2 \leqslant B_2.$$

On peut alors prendre des sous-suites de fonctions de réseau simultanément convergentes $\{u_{ih}\}$, $\{v_{ih}\}$, $\{w_{ih}\}$ et affirmer qu'on a pour leurs limites $v = \frac{du}{dx}$, $w = \frac{du}{dt}$. L'égalité $w = \frac{du}{dt}$ se démontre de la même manière qu'on a justifié l'égalité $v = \frac{du}{dx}$. Nous ne répéterons pas ce raisonnement.

Nous avons maintenant fini l'étude des fonctions de réseau et de leurs limites, étude ardue mais en fait très élémentaire. Nous allons passer au théorème d'existence lui-même des solutions pour les systèmes hyperboliques.

Nous étudierons dans le rectangle $0 \leqslant x < l$, $0 \leqslant t \leqslant T$ le système d'équations

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + k_i(x,\, t) \frac{\partial u_i}{\partial x} + \sum_l m_{il} u_l = f_i \quad (i = 1,\, 2,\, \ldots,\, n_0),$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} - k_i(x,\, t) \frac{\partial u_i}{\partial x} + \sum_l m_{il} u_l = f_i \quad (i = n_0 + 1,\, \ldots,\, n)$$

de conditions aux limites

$$u_i = \sum_{j=n_0+1}^{n} \alpha_{ij} u_j \quad (i = 1,\, 2,\, \ldots,\, n_0) \text{ pour } x = 0,$$

$$u_i = \sum_{j=1}^{n_0} \beta_{ij} u_j \quad (i = n_0 + 1,\, \ldots,\, n) \text{ pour } x = l,$$

supposées dissipatives. Les données initiales $u_i(x,\, 0) = \varphi_i(x)$ sont supposées suffisamment régulières et accordées avec les conditions aux limites, en même temps que leurs dérivées jusqu'à un ordre suffisant. On suppose également que les coefficients des conditions aux limites $\alpha_{ij}(t)$, $\beta_{ij}(t)$ sont suffisamment réguliers.

Nous avons construit pour le problème décrit un schéma aux différences qui l'approche formellement, et nous avons obtenu pour

les solutions des équations aux différences les évaluations:

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T} \Delta x \sum_{x,\, i} u_i^2 \leqslant \text{const},$$

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T} \Delta x \sum_{x,\, i} \left[\left(\frac{\Delta u_i}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta u_i}{\Delta t}\right)^2 \right] \leqslant \text{const},$$

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T} \Delta x \sum \left[\left(\frac{\Delta^2 u_i}{\Delta x^2}\right)^2 + \left(\frac{\Delta^2 u_i}{\Delta x \Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta^2 u_i}{\Delta t^2}\right)^2 \right] \leqslant \text{const}.$$

Il résulte de ces évaluations, comme nous avons montré, la compacité

$$\{u_i\},\ \left\{\frac{\Delta u_i}{\Delta x}\right\},\ \left\{\frac{\Delta u_i}{\Delta t}\right\}.$$

(Il serait plus exact de parler de la compacité non pas de ces fonctions de réseau elles-mêmes, mais de leurs prolongements interpolatoires $\hat{u}_i$, $\check{v}_i$, $\check{w}_i$). En outre, nous avons montré que si $u_i \to U_i$, $\frac{\Delta u_i}{\Delta x} \to V_i$, $\frac{\Delta u_i}{\Delta t} \to W_i$, alors ces fonctions limites sont liées par les égalités

$$V_i = \frac{\partial U_i}{\partial x}, \qquad W_i = \frac{\partial U_i}{\partial t}.$$

Pour les fonctions de réseau, par construction étaient remplies les équations aux différences (aux points du réseau)

$$\frac{\Delta u_i}{\Delta t} \pm k_i \frac{\Delta u_i}{\Delta x} + \sum_l m_{il} u_l = f_i.$$

Il est vrai que les différences $\frac{\Delta u_i}{\Delta x}$ étaient prises à droite dans certaines équations, à gauche dans d'autres. Ceci n'affecte pas nos déductions, puisque nous avons déjà expliqué que l'interpolation des différences à droite et à gauche diffère de $O(\sqrt{h})$, et que lorsque $h \to 0$ ces différences tendent vers les mêmes limites.

Etant donné que les interpolations des fonctions de réseau u_i, $\frac{\Delta u_i}{\Delta x}$, $\frac{\Delta u_i}{\Delta t}$ (nous les noterons respectivement $\hat{u}_i$, $\check{v}_i$, $\check{w}_i$) au point (x, t) diffèrent des valeurs au point nodal le plus proche du réseau de $O(\sqrt{h} + \sqrt{\tau})$ au plus, et qu'aux points du réseau sont vérifiées les équations aux différences, on peut affirmer que

$$\check{w}_i \pm k_i \check{v}_i + \sum_l m_{il} \hat{u}_l - f_i = O(1) \text{ pour } h,\ \tau \to 0.$$

Dès lors doivent être vérifiées pour la limite de la suite convergente les égalités

$$W_i \pm k_i V_i + \sum_l m_{il} U_l - f_i = 0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} \pm k_i \frac{\partial U_i}{\partial x} + \sum_l m_{il} U_l = f_i.$$

Les études faites au début de ce paragraphe montrent que ces fonctions limites vérifient les données initiales et les conditions aux limites.

Enonçons une fois de plus le théorème démontré et toutes les conditions alors imposées.

I. *Le domaine où la solution est construite est le rectangle*

$$0 \leqslant x \leqslant L, \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

II. *Système d'équations:*

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + k_i \frac{\partial u_i}{\partial x} + \sum_l m_{il} u_l = f_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n_0).$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} - k_i \frac{\partial u_i}{\partial x} + \sum_l m_{il} u_l = f_i \quad (i = n_0 + 1, \ldots, n),$$

$$k_i (x, t) > 0.$$

Les coefficients et les seconds membres sont supposés suffisamment réguliers.

III. *Conditions aux limites à la frontière de gauche*

$$u_i = \sum_{j=n_0+1}^{n} \alpha_{ij} u_j \quad (i = 1, 2, \ldots, n_0),$$

à la frontière de droite

$$u_i = \sum_{j=1}^{n_0} \beta_{ij} u_j \quad (i = n_0 + 1, \ldots, n).$$

Ici $\alpha_{ij}(t)$, $\beta_{ij}(t)$ sont des fonctions suffisamment régulières du temps. Les conditions aux limites sont supposées dissipatives. Cela signifie que toute fonction vérifiant les conditions aux limites vérifie également les inégalités

$$-\sum_{i=1}^{n_0} k_i u_i^2 + \sum_{i=n_0+1}^{n} k_i u_i^2 \leqslant 0 \text{ — sur la frontière de droite,}$$

$$-\sum_{i=n_0+1}^{n} k_i u_i^2 + \sum_{i=1}^{n_0} k_i u_i^2 \leqslant 0 \text{ — sur la frontière de gauche.}$$

IV. *Les données initiales $u_i(x, 0) = \varphi_i(x)$ sont supposées suffisamment régulières et accordées avec les conditions aux limites en même temps que leurs dérivées d'ordre suffisamment élevé.*

V. *Moyennant les hypothèses* I — IV, *il existe une solution unique du problème posé dans le rectangle $0 \leqslant x \leqslant L$, $0 \leqslant t \leqslant T$ (l'unicité a été démontrée au* § 14).

Nous avons obtenu pour cette solution des évaluations avec des constantes s'exprimant au moyen des dimensions du rectangle, des coefficients des équations et des conditions aux limites, au moyen des données initiales et des dérivées d'ordre suffisamment élevé de ces fonctions.

Voici ces évaluations :

$$|u_i| \leqslant \text{const}, \quad \left|\frac{\partial u_i}{\partial t}\right| \leqslant \text{const}, \quad \left|\frac{\partial u_i}{\partial x}\right| \leqslant \text{const},$$

$$\left|\frac{\partial u_i}{\partial x}\Big|_{x_1,\, t_1} - \frac{\partial u_i}{\partial x}\Big|_{x_2,\, t_2}\right| \leqslant \text{const}\,(\sqrt{|t_1 - t_2|} + \sqrt{|x_1 - x_2|}),$$

$$\left|\frac{\partial u_i}{\partial t}\Big|_{x_1,\, t_1} - \frac{\partial u_i}{\partial t}\Big|_{x_2,\, t_2}\right| \leqslant \text{const}\,(\sqrt{|t_1 - t_2|} + \sqrt{|x_1 - x_2|}).$$

Faisons quelques remarques en ce qui concerne le théorème démontré et son énoncé.

Remarque 1. Dans l'énoncé du point III, on peut renoncer à l'exigence de dissipation des conditions aux limites. Dans le cas où les conditions aux limites ont la même forme qu'au point III, une transformation des inconnues $u_i(x, t)$ permet de réaliser les conditions de dissipation. Cette transformation entraîne seulement un certain changement des constantes dans les évaluations définitives. Si les coefficients des conditions aux limites et des équations ne dépendent pas du temps t, la transformation des fonctions inconnues peut être aussi rendue indépendante du temps.

Remarque 2. Si un système à coefficients et aux conditions aux limites indépendants de t, ayant ses seconds membres nuls, $f_i = 0$, est donné dans le domaine $0 \leqslant t < \infty$, $0 \leqslant x \leqslant L$, la solution du problème posé existe pour tous les $t > 0$ et satisfait à des évaluations de la forme

$$|u_i(x, t)| \leqslant Ce^{Kt}, \quad \left|\frac{\partial u_i}{\partial t}\right| \leqslant Ce^{Kt}, \quad \left|\frac{\partial u_i}{\partial x}\right| \leqslant Ce^{Kt},$$

$$\left|\frac{\partial u_i}{\partial x}\Big|_{x_1,\, t_1} - \frac{\partial u_i}{\partial x}\Big|_{x_2,\, t_2}\right| \leqslant D(t_1, t_2)\,(\sqrt{|t_2 - t_1|} + \sqrt{|x_2 - x_1|}),$$

$$\left|\frac{\partial u_i}{\partial t}\Big|_{x_1,\, t_1} - \frac{\partial u_i}{\partial t}\Big|_{x_2,\, t_2}\right| \leqslant D(t_1, t_2)\,(\sqrt{|t_2 - t_1|} + \sqrt{|x_2 - x_1|}).$$

La dépendance exponentielle des constantes par rapport au temps résulte de l'évaluation de la croissance des « intégrales d'énergie » aux différences, évaluation obtenue à la fin du § 15. (La constante M dans cette évaluation ne dépend pas de la hauteur du rectangle suivant les t, les coefficients ayant été supposés indépendants de t.)

L'assertion faite dans cette remarque nous servira plus tard au chap. IV lors de la construction de la théorie de la méthode de Fourier et de la transformation de Laplace.

Remarque 3. Nous avons démontré l'unicité de la solution du problème de Cauchy pour un système hyperbolique. Ce problème

n'exige que des données initiales. Il n'a pas besoin de conditions aux limites. La solution est univoquement déterminée dans le triangle caractéristique s'appuyant sur le segment de l'axe des x où sont données les conditions initiales. Ce triangle est découpé par la caractéristique $\frac{dx}{dt} = k_i(x, t)$, avec le plus grand k_i, passant par la frontière de gauche du segment, et par la caractéristique $\frac{dx}{dt} = k_i(x, t)$, avec le plus petit $k_i(x, t)$, passant par sa frontière de droite. Les coefficients $k_i(x, t)$ du système

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + k_i(x, t)\frac{\partial u_i}{\partial x} + \sum_k m_{ik}u_k = f_i$$

ne sont pas supposés ici strictement positifs ou négatifs. Ils peuvent même changer de signe.

Nous allons voir maintenant comment on peut déduire de notre théorème d'existence pour le problème aux limites le théorème d'existence de la solution du problème de Cauchy dans le triangle caractéristique. Primo, nous montrerons qu'on peut se borner au cas des pentes strictement positives des caractéristiques $k_i(x, t)$. En effet, la transformation des variables indépendantes

$$x' = x - at, \quad t' = t$$

ramène le système à la forme

$$\frac{\partial u_i}{\partial t'} + (a + k_i)\frac{\partial u_i}{\partial x'} + \sum_k m_{ik}u_k = f_i.$$

Il est clair qu'en prenant a positif suffisamment grand on aura une pente positive pour les caractéristiques

$$\frac{dx'}{dt'} = a + k_i.$$

Considérons un système de pente positive des caractéristiques dans un certain rectangle suffisamment grand contenant le triangle caractéristique (fig. 51). Si le système n'est pas défini partout dans ce rectangle, nous le définissons en prolongeant les coefficients et les seconds membres de façon arbitraire mais suffisamment régulière. Nous prolongeons également les données initiales sur toute la base de ce rectangle. Etant donné que le système a été supposé à k_i positifs, ses conditions aux limites doivent être données seulement sur la frontière de gauche. Prenons-les à nouveau arbitraires suffisamment régulières et accordées avec les données initiales. (On peut se donner pour conditions aux limites les valeurs de toutes les fonctions inconnues u_i sur la frontière de gauche.)

En vertu du théorème démontré, la solution de ce problème élargi existe. Notamment, elle existera aussi dans le triangle caractéristique. En vertu du théorème d'unicité, la solution dans ce triangle ne dépend pas de notre arbitraire dans le prolongement des

équations, des conditions initiales et aux limites.

Dans notre démonstration, nous n'avons pas formulé rigoureusement les hypothèses concernant les coefficients et les données initiales (desquelles hypothèses résulterait la possibilité de leur prolongement régulier) et nous n'avons pas donné la description exacte

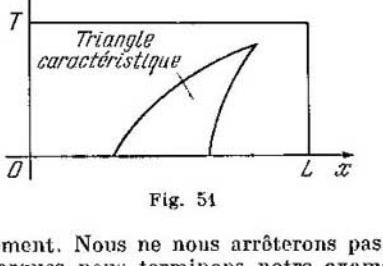

Fig. 51

d'un tel prolongement. Nous ne nous arrêterons pas sur ces subtilités. Par ces remarques nous terminons notre examen du théorème d'existence.

Dans le cas de deux variables indépendantes que nous avons traité, il existe des procédés plus élémentaires pour démontrer le théorème d'existence que le procédé que nous avons choisi. Notre choix de la méthode des intégrales d'énergie et des conditions de compacité les plus simples a été conditionné par le fait que l'idée de cette méthode peut être transposée pour les systèmes hyperboliques symétriques au cas d'un plus grand nombre de variables spatiales. Les conditions de compacité des fonctions les plus commodes, et donc les plus utilisées, portent le nom de « théorème d'injection » de S. Sobolev.

§ 18. Equation des ondes. Formule de Kirchhoff

Problème de Cauchy et théorème d'unicité pour l'équation des ondes. Formule pour la solution du problème de Cauchy dans le cas d'une seule variable spatiale. Déduction de la formule de Kirchhoff pour la solution dans le cas de trois variables spatiales. Démonstration de cette formule. Méthode de la descente et déduction de la formule de Poisson pour la solution de l'équation des ondes à deux dimensions. Résumé des formules pour les espaces à une, deux et trois dimensions. Lacune dans le domaine de dépendance dans le cas tridimensionnel. Fronts avant et arrière brusques dus à une perturbation dans un domaine borné. Autre situation dans les cas d'une et de deux dimensions. Diffusion d'ondes. Onde sonore à symétrie sphérique. Régularité nécessaire des données initiales. Potentiels retardés.

Nous n'étudierons pas dans notre cours les théorèmes d'existence généraux des équations hyperboliques à deux ou à trois variables spatiales. Nous nous bornerons à construire les formules explicites pour la solution d'une équation hyperbolique du second ordre à

coefficients constants. A cette équation, dite ordinairement équation des ondes, se ramènent maints problèmes physiques. L'équation des ondes s'écrit dans le cas d'une, deux ou trois variables spatiales comme suit :

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = c_0^2 \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right),$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = c_0^2 \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right).$$

Nous commencerons l'étude de l'équation des ondes par le théorème d'unicité, dont la démonstration et la formulation seront données seulement pour le cas de deux variables spatiales x, y.

La répétition de cette démonstration en modifiant de façon convenable l'énoncé pour une ou trois variables spatiales peut servir d'exercice utile et simple.

Le *problème de Cauchy pour l'équation des ondes* se pose comme suit. Dans un certain domaine D du plan $t = 0$ on prend les données initiales sous la forme

$$\Phi|_{t=0} = \Phi_0(x, y),$$
$$\Phi_t|_{t=0} = \Phi_1(x, y).$$

Nous voulons savoir quel est le domaine de l'espace x, y, t où ces données déterminent une solution unique. L'équation de la surface caractéristique $\varphi(x, y, t) = \text{const}$ pour l'équation des ondes

$$\varphi_t^2 - c_0^2(\varphi_x^2 + \varphi_y^2) = 0$$

a exactement la même forme que l'équation des caractéristiques pour le système décrivant la propagation du son. Ceci étant, nous pouvons nous attendre avec raison à ce que la frontière du domaine d'unicité soit pour l'équation des ondes la même que pour ce système. Nous allons étayer ce qui vient d'être dit par une démonstration. Nous décrirons le domaine d'unicité comme l'ensemble de tous les points (x_0, y_0, t_0), $t_0 \geqslant 0$, pour lesquels le cône caractéristique

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - c_0^2(t - t_0)^2 = 0$$

coupe le plan $t = 0$ suivant la circonférence

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = c_0^2 t_0^2,$$

tout entière contenue, avec le cercle qu'elle délimite

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leqslant c_0^2 t_0^2,$$

dans le domaine D. Il suffira de vérifier que si, pour $t = 0$, on a dans le cercle

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leqslant c_0^2 t_0^2$$

$\Phi_0(x, y) = 0$, $\Phi_1(x, y) = 0$, alors $\Phi \equiv 0$ dans le cône

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leqslant c_0^2 (t - t_0)^2,$$
$$0 \leqslant t \leqslant t_0,$$

ayant ce cercle pour base. Pour le démontrer, posons

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = p, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} = -u, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -v.$$

Il est évident que ces fonctions p, u, v vérifient les équations

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0,$$
$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial y} = 0,$$
$$\frac{\partial p}{\partial t} + c_0^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0,$$

lesquelles coïncident avec les équations de la propagation du son ($\rho_0 = 1$). La condition $\Phi|_{t=0} = 0$ entraîne

$$u|_{t=0} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}\Big|_{t=0} = 0; \quad v|_{t=0} = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}\Big|_{t=0} = 0.$$

Quant à la condition $\Phi_t|_{t=0} = 0$, elle se transcrit $p|_{t=0} = 0$.

Nous pouvons à présent utiliser le théorème d'unicité pour le système d'équations de l'acoustique et affirmer qu'on a partout dans le cône $u = V = p = 0$ ou, ce qui revient au même, $\Phi_x = \Phi_y = \Phi_t = 0$, c'est-à-dire que $\Phi = \text{const}$. Etant donné que $\Phi = 0$ pour $t = 0$, on a $\Phi \equiv 0$ partout dans ce cône. La démonstration du théorème d'unicité pour l'équation des ondes est terminée.

Avant de passer à la déduction des formules pour la solution de l'équation des ondes dans l'espace à trois dimensions, nous allons considérer un problème aux limites particulier pour l'équation des ondes à une dimension.

Soit $\Phi(x, t)$ une fonction deux fois continûment dérivable pour $x \geqslant 0$, $t \geqslant 0$, vérifiant dans ce quadrant l'équation

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2},$$

les conditions initiales

$$\Phi(x, 0) = \varphi(x),$$
$$\Phi_t(x, 0) = \psi(x)$$

et la condition à la limite $\Phi(0, t) = 0$. Nous allons essayer de trouver une formule explicite pour $\Phi(x, t)$. A cet effet, nous allons

prolonger la fonction $\Phi(x, t)$ dans le domaine $x < 0$, $t \geqslant 0$ de façon impaire :

$$\Phi(-x, t) = -\Phi(x, t).$$

La fonction ainsi construite est de toute évidence, en vertu de la condition à la limite, continue avec ses dérivées premières. Comme en vertu de l'équation $\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}(0, t) = \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}(0, t) \equiv 0$, la fonction $\Phi(x, t)$ est deux fois continûment dérivable pour $t \geqslant 0$.

Dès lors, on sait que (§ 5) la solution du problème de Cauchy est donnée par la formule de d'Alembert

$$\Phi(x, t) = \frac{\varphi(x - c_0 t) + \varphi(x + c_0 t)}{2} + \frac{1}{2c_0}\int_{x-c_0t}^{x+c_0t} \psi(\xi)\, d\xi.$$

Ici φ et ψ sont les fonctions obtenues en prolongeant de façon impaire sur tout l'axe des x les fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ données sur le demi-axe positif.

Nous envisagerons par la suite les valeurs de la solution pour $0 \leqslant x < c_0 t$. Recopions la formule dans ce cas en notant que

$$\varphi(x - c_0 t) = -\varphi(c_0 t - x),$$

$$\int_{x-c_0t}^{x+c_0t} \psi(\xi)\, d\xi = \int_{x-c_0t}^{c_0t-x} \psi(\xi)\, d\xi + \int_{c_0t-x}^{c_0t+x} \psi(\xi)\, d\xi = \int_{c_0t-x}^{c_0t+x} \psi(\xi)\, d\xi.$$

On obtient finalement la formule

$$\Phi(x, t) = \frac{\varphi(x + c_0 t) - \varphi(c_0 t - x)}{2} + \frac{1}{2c_0}\int_{c_0t-x}^{c_0t+x} \psi(\xi)\, d\xi, \qquad (1)$$

qui nous servira bientôt.

Venons-en à la déduction de la formule pour la solution de l'équation des ondes dans le cas à trois dimensions

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = c_0^2\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right)$$

de conditions initiales

$$\Phi(x, y, z, 0) = \Phi_0(x, y, z),$$
$$\Phi_t(x, y, z, 0) = \Phi_1(x, y, z).$$

Nous supposerons la solution suffisamment régulière et nous essayerons de trouver une formule exprimant au moyen des données initiales la moyenne de la fonction Φ sur une sphère de rayon r de centre au point (x_0, y_0, z_0)

$$\overline{\Phi}(r, t) = \frac{1}{4\pi r^2}\int\int_{S_r} \Phi(x, y, z, t)\, ds_r.$$

Ici S_r est ladite sphère, le point (x_0, y_0, z_0) étant fixe jusqu'à la déduction complète de la formule.

Si l'on passe de l'intégration sur la sphère de rayon r à l'intégration sur la sphère unité S_1, on peut écrire une autre expression pour $\overline{\Phi}(r, t)$

$$\overline{\Phi}(r, t) = \frac{1}{4\pi} \int\int_{S_1} \Phi(x_0 + \alpha r, y_0 + \beta r, z_0 + \gamma r, t)\, d\omega.$$

Ici $d\omega = \frac{1}{r^2} ds_r$ est l'élément d'aire de la sphère unité ou l'angle solide sous lequel du point (x_0, y_0, z_0) est vu l'élément d'aire ds; α, β, γ sont les coordonnées d'un point sur la sphère unité.

Introduisant les coordonnées sphériques

$$\alpha = \sin\theta \cos\varphi, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi,$$

$$\beta = \sin\theta \sin\varphi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,$$

$$\gamma = \cos\theta,$$

et notant que l'élément d'aire $d\omega = \sin\theta\, d\varphi\, d\theta$, on obtient encore une forme d'écriture de $\overline{\Phi}(r, t)$:

$$\overline{\Phi}(r, t) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \Phi(x_0 + r\sin\theta\cos\varphi, y_0 + r\sin\theta\sin\varphi, z_0 + r\cos\theta, t) \sin\theta\, d\varphi\, d\theta.$$

Nous aurons dans la suite à nous servir de ces trois formes d'écriture pour $\overline{\Phi}(r, t)$.

Nous déduirons la formule représentant $\overline{\Phi}(r, t)$ d'après les données initiales $\Phi(x, y, z, 0) = \Phi_0(x, y, z)$, $\Phi_t(x, y, z, 0) = \Phi_1(x, y, z)$, en écrivant l'équation différentielle vérifiée par $\overline{\Phi}(r, t)$. Bien entendu, cette équation est aussi une équation aux dérivées partielles, mais nous arriverons à ramener sa résolution à l'utilisation de la variante déduite de la formule de d'Alembert.

Intégrons l'équation des ondes

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = c_0^2 \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} \right)$$

pour $\Phi(x, y, z, t)$ dans la boule D_r $[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \leqslant r^2]$. Ecrivons l'intégrale du premier membre de l'équation sous forme d'intégrale double sur la sphère S_ρ de rayon ρ, $ds_\rho = \rho^2\, d\rho\, d\omega$ et d'intégrale simple sur le rayon ρ, et appliquons

au second membre la formule de Gauss-Ostrogradsky

$$\int_0^r \left(\iint_{S_\rho} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \rho^2 \, d\omega \right) d\rho = c_0^2 \iint_{S_r} \left(\alpha \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \beta \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \gamma \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) ds_r =$$

$$= c_0^2 \iint_{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1} \left[\frac{\partial}{\partial r} \Phi (x_0 + \alpha r, \; y_0 + \beta r, \; z_0 + \gamma r, \; t) \right] r^2 \, d\omega =$$

$$= c_0^2 r^2 \iint_{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1} \Phi_r (x_0 + \alpha r, \; y_0 + \beta r, \; z_0 + \gamma r, \; t) \, d\omega =$$

$$= c_0^2 r^2 \frac{\partial}{\partial r} \iint_{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1} \Phi (x_0 + \alpha r, \; y_0 + \beta r, \; z_0 + \gamma r, \; t) \, d\omega =$$

$$= c_0^2 r^2 \cdot 4\pi \frac{\partial \overline{\Phi} (r, t)}{\partial r}.$$

Notons encore que

$$\int_0^r \left(\iint_{S_\rho} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \rho^2 \, d\omega \right) d\rho =$$

$$= \int_0^r \rho^2 \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} \iint_{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1} \Phi (x_0 + \alpha\rho, \; y_0 + \beta\rho, \; z_0 + \gamma\rho, \; t) \, d\omega \right] d\rho =$$

$$= \int_0^r \rho^2 \cdot 4\pi \frac{\partial^2 \overline{\Phi} (\rho, t)}{\partial t^2} \, d\rho.$$

Dérivant par rapport à r les deux membres de l'égalité

$$\int_0^r \rho^2 \cdot 4\pi \frac{\partial^2 \overline{\Phi} (\rho, t)}{\partial t^2} \, d\rho = c_0^2 r^2 \cdot 4\pi \frac{\partial \overline{\Phi} (r, t)}{\partial r},$$

nous sommes conduits, après simplification par $4\pi r^2$, à l'équation

$$\frac{\partial^2 \overline{\Phi}}{\partial t^2} = \frac{c_0^2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial r} \right).$$

Cette équation décrit, entre autres, la propagation d'ondes à symétrie sphérique. En effet, si $\Phi (x, y, z, t)$ dépend seulement de $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$ et de t, alors elle coïncide avec sa moyenne sphérique.

L'équation pour $\overline{\Phi}$ peut être ramenée par la substitution simple $\overline{\Phi} = \overline{\overline{\Phi}}/r$ à la forme standard de l'équation des ondes à une dimension. En effet,

$$\frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \overline{\overline{\Phi}}}{\partial r} - \frac{\overline{\overline{\Phi}}}{r^2}, \quad \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial r} = r \frac{\partial^2 \overline{\overline{\Phi}}}{\partial r^2} + \frac{\partial \overline{\overline{\Phi}}}{\partial r} - \frac{\partial \overline{\overline{\Phi}}}{\partial r} = r \frac{\partial^2 \overline{\overline{\Phi}}}{\partial r^2},$$

d'où

$$\frac{\partial^2 \overline{\overline{\Phi}}}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 \overline{\overline{\Phi}}}{\partial r^2}.$$

La fonction $\overline{\overline{\Phi}}(r, t)$ définie pour $r \geqslant 0$ vérifie pour $r = 0$ la condition à la limite

$$\overline{\overline{\Phi}}(0, t) = 0 \cdot \overline{\Phi}(0, t) = 0.$$

Il est facile aussi d'écrire les données initiales pour $\overline{\overline{\Phi}}(r, t)$:

$$\overline{\overline{\Phi}}(r, 0) = r\overline{\Phi}(r, 0) = \frac{1}{4\pi r} \iint_{S_r} \Phi(x, y, z, 0)\, ds_r =$$

$$= \frac{1}{4\pi r} \iint_{S_r} \Phi_0(x, y, z)\, ds_r$$

et de même

$$\overline{\overline{\Phi}}_t(r, 0) = \frac{1}{4\pi r} \iint_{S_r} \Phi_1(x, y, z)\, ds_r.$$

De sorte que nous sommes conduits au problème déjà étudié pour l'équation des ondes à une dimension sur la demi-droite $r \geqslant 0$, et nous pouvons écrire la formule pour sa solution. Il est vrai qu'il faudrait encore vérifier que $\overline{\overline{\Phi}}(r, t)$ est deux fois continûment dérivable partout dans le quadrant fermé, y compris $r = 0$. Ceci n'est pas difficile à faire, mais ce n'est pas indispensable. On devra de toute façon vérifier la formule déduite pour démontrer le théorème d'existence de la solution du problème de Cauchy. Nous montrerons plus loin que la fonction Φ définie par la formule déduite ici vérifie l'équation des ondes et les conditions initiales.

Ainsi donc, pour les $r < c_0 t$, on a en vertu de la formule (1)

$$\overline{\overline{\Phi}}(r, t) = \frac{\varphi(r + c_0 t) - \varphi(c_0 t - r)}{2} + \frac{1}{2c_0} \int_{c_0 t - r}^{c_0 t + r} \psi(\xi)\, d\xi,$$

où

$$\varphi(\xi) = \overline{\overline{\Phi}}(\xi, 0) = \frac{1}{4\pi\xi} \iint_{S_\xi} \Phi_0(x, y, z)\, dS_\xi,$$

$$\psi(\xi) = \overline{\overline{\Phi}}_t(\xi, 0) = \frac{1}{4\pi\xi} \iint_{S_\xi} \Phi_1(x, y, z)\, dS_\xi.$$

Il ne reste plus à présent qu'à noter que

$$\Phi(x_0, y_0, z_0, t) = \overline{\Phi}(0, t) = \lim_{r \to 0} \frac{\overline{\overline{\Phi}}(r, t)}{r} = \frac{\partial \overline{\overline{\Phi}}}{\partial r}(0, t),$$

et à calculer cette dérivée :

$$\frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial r}(0, t) = \varphi'(c_0 t) + \frac{1}{c_0}\psi(c_0 t).$$

Substituant aux fonctions φ et ψ leurs expressions d'après les données initiales, on est conduit à la formule définitive pour la solution $\Phi(x, y, z, t)$ du problème de Cauchy :

$$\Phi(x_0, y_0, z_0, t) = \frac{d}{dr}\left[\frac{1}{4\pi r}\iint_{S_r(x_0, y_0, z_0)} \Phi_0(x, y, z)\, ds_r\right]_{r=c_0 t} +$$

$$+ \left[\frac{1}{4\pi r c_0}\iint_{S_r(x_0, y_0, z_0)} \Phi_1(x, y, z)\, ds_r\right]_{r=c_0 t} =$$

$$= \frac{1}{4\pi c_0}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{c_0 t}\iint_{S_{c_0 t}(x_0, y_0, z_0)} \Phi_0\, ds\right) + \frac{1}{c_0 t}\iint_{S_{c_0 t}(x_0, y_0, z_0)} \Phi_1\, ds\right].$$

Cette formule porte le nom de *formule de Kirchhoff*. Nous avons indiqué explicitement ici les coordonnées x_0, y_0, z_0 du centre de la sphère S_r.

Etant donné que (x_0, y_0, z_0) est un point arbitraire parmi les points pour lesquels la sphère $S_{c_0 t}$ est tout entière (avec la boule qu'elle délimite) contenue dans le domaine où sont données les conditions initiales, nous avons précisément obtenu la formule qui représente la solution partout dans le domaine où le théorème d'unicité peut être démontré. Il est vrai que dans notre déduction nous avons supposé l'existence du problème posé.

Nous allons vérifier maintenant que la formule déduite donne effectivement la solution de l'équation, et que cette solution vérifie bien les conditions initiales posées. On aura démontré par là l'existence de la solution et achevé de justifier la formule.

Démontrons d'abord le lemme suivant.

Soit $U(x, y, z)$ une fonction deux fois continûment dérivable. Alors la fonction

$$V(t) = \frac{1}{4\pi c_0^2 t}\iint_{S_{c_0 t}(x_0, y_0, z_0)} U(x, y, z)\, ds$$

jouit des propriétés suivantes:

$$V(0) = 0, \left.\frac{dV}{dt}\right|_{t=0} = U_0 = U(0, 0, 0), \quad \left.\frac{d^2 V}{dt^2}\right|_{t=0} = 0.$$

Rappelons que

$$\iint_{S_{c_0 t}(x_0, y_0, z_0)} U(x, y, z)\, ds =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} U(x_0 + c_0 t \sin\theta\cos\varphi,\ y_0 + c_0 t \sin\theta \sin\varphi,\ z_0 +$$

$$+ c_0 t\cos\theta)\, c_0^2 t^2 \sin^2\theta\, d\theta\, d\varphi.$$

Pour le démontrer, écrivons le développement de Taylor de $U(x, y, z)$:

$$U = U_0 + U_{0x}(x-x_0) + U_{0y}(y-y_0) + U_{0z}(z-z_0) + U_{0xx}\frac{(x-x_0)^2}{2} + \ldots$$

$$\ldots + U_{0yz}(y-y_0)(z-z_0) + o\left[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2\right].$$

Intégrant ce développement sur la sphère $S_{c_0 t}(x_0, y_0, z_0)$ et notant que les intégrales des termes linéaires sont nulles, il vient :

$$\int_{S_{c_0 t}(x_0, y_0, z_0)} U(x, y, z)\, ds = 4\pi c_0^2 t^2 U_0 + At^4 + o(t^4),$$

$$V(t) = \frac{1}{4\pi c_0^2 t} \int_{S_{c_0 t}(x_0, y_0, z_0)} U(x, y, z)\, ds = U_0 t + Bt^3 + o(t^3).$$

De cette formule résultent toutes nos assertions.

Appliquant à la formule représentant la solution

$$\Phi(x_0, y_0, z_0, t) = \frac{1}{4\pi c_0}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{c_0 t}\int_{S_{c_0 t}(x_0, y_0, z_0)} \Phi_0\, ds\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{c_0 t}\int_{S_{c_0 t}(x_0, y_0, z_0)} \Phi_1\, ds\right]$$

le résultat du lemme, on voit que

$$\Phi(x_0, y_0, z_0, 0) = \Phi_0(x_0, y_0, z_0),$$

$$\frac{d}{dt}\Phi(x_0, y_0, z_0, t)\big|_{t=0} = \Phi_1(x_0, y_0, z_0).$$

Ces formules démontrent que les données initiales sont réalisées.

Nous avons utilisé jusqu'à présent une formule écrite de telle façon qu'elle donnait la valeur de la solution en un point fixe à divers instants t. Pour qu'elle puisse s'appliquer à différents points, il faut remplacer la dérivée $\frac{d}{dt}$ au second membre par $\frac{\partial}{\partial t}$ pour souligner que la dérivation par rapport au temps est faite en un point fixe de l'espace. Dès lors, nous écrirons la formule de la solution sous la forme suivante :

$$\Phi(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi c_0}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c_0 t}\int_{S_{c_0 t}(x_0, y_0, z_0)} \Phi_0\, ds\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{c_0 t}\int_{S_{c_0 t}(x_0, y_0, z_0)} \Phi_1\, ds\right].$$

Avant de démontrer que $\Phi(x, y, z, t)$ vérifie l'équation, notons que si $u(x, y, z, t)$ est une fonction suffisamment régulière et que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_0^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = 0,$$

on a aussi

$$\frac{\partial^2\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)}{\partial t^2} - c_0^2\left[\frac{\partial^2\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)}{\partial z^2}\right] =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_0^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\right] = 0.$$

Grâce à cela, il suffira de montrer que l'intégrale de la forme

$$u(x, y, z, t) = \frac{1}{c_0 t} \int\limits_{S_{c_0 t(x_0, y_0, z_0)}} U(\xi, \eta, \zeta)\, ds$$

est solution de l'équation des ondes. Ecrivons cette égalité plus en détail :

$$u(x, y, z, t) = \frac{1}{c_0 t} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} U(x + c_0 t \sin\theta\cos\varphi,\ y + c_0 t \sin\theta\sin\varphi,\ z +$$

$$+ c_0 t\cos\theta)\, c_0^2 t^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi =$$

$$= c_0 t \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} U(x + c_0 t\sin\theta\cos\varphi,\ y + c_0 t\sin\theta\sin\varphi,$$

$$z + c_0 t\cos\theta)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

et dérivons-la.

Commençons par calculer $\frac{\partial u}{\partial t}$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u}{t} + c_0 t \frac{\partial}{\partial t}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} U(x + c_0 t\sin\theta\cos\varphi,\ y + c_0 t\sin\theta\sin\varphi,\ z +$$

$$+ c_0 t\cos\theta)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi = \frac{u}{t} + c_0 t \cdot c_0 \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} [U_\xi \sin\theta\cos\varphi +$$

$$+ U_\eta \sin\theta\sin\varphi + U_\zeta\cos\theta]\sin\theta\, d\theta\, d\varphi = \frac{u}{t} +$$

$$+ \frac{1}{t}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} [U_\xi \sin\theta\cos\varphi + U_\eta\sin\theta\sin\varphi + U_\zeta\cos\theta]\, c_0^2 t^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi.$$

Notons à présent que $c_0^2 t^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$ est l'élément d'aire de la sphère de rayon $c_0 t$. Notons encore que les arguments des dérivées U_ξ, U_η, U_ζ sont situés sur cette sphère (ces arguments sont $x + c_0 t\sin\theta\cos\varphi$, $y + c_0 t\sin\theta\sin\varphi$, $z + c_0 t\cos\theta$). Dans le même temps, $\sin\theta\cos\varphi$, $\sin\theta\sin\varphi$, $\cos\theta$ sont les composantes du vecteur unité de la normale extérieure à cette sphère.

Ces remarques nous permettent d'écrire le résultat sous les formes suivantes :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u}{t} + \frac{1}{t} \iint\limits_{S_{c_0 t(x,\,y,\,z)}} \frac{\partial U}{\partial n}\, ds =$$

$$= \frac{u}{t} + \frac{1}{t} \iiint\limits_{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2 \leqslant c_0^2 t^2} (U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} + U_{\zeta\zeta})\, d\xi\, d\eta\, d\zeta = \frac{u}{t} + \frac{I}{t}$$

(l'intégrale a été désignée par I). Dérivons à nouveau :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{t}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{u}{t^2} + \frac{1}{t}\frac{\partial I}{\partial t} - \frac{I}{t^2} =$$

$$= \frac{1}{t}\left(\frac{u}{t} + \frac{I}{t}\right) - \frac{u}{t^2} - \frac{I}{t^2} + \frac{1}{t}\frac{\partial I}{\partial t} = \frac{1}{t}\frac{\partial I}{\partial t}.$$

Comme

$$I = \iiint\limits_{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2 \leqslant c_0^2 t^2} [U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} + U_{\zeta\zeta}]\, d\xi\, d\eta\, d\zeta =$$

$$= \int\limits_0^{c_0 t} \left[\int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\pi} (U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} + U_{\zeta\zeta}) \sin\theta\, d\theta\, d\varphi r^2 \right] dr,$$

on a

$$\frac{\partial I}{\partial t} = c_0 \iint\limits_{S_{c_0 t(x,\,y,\,z)}} (U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} + U_{\zeta\zeta})\, ds.$$

(En effet, la dérivée par rapport à t de l'intégrale dans la boule de rayon variable est égale au produit de l'intégrale sur la sphère par la dérivée du rayon par rapport à t.) Ainsi, nous avons établi que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{c_0}{t} \iint\limits_{S_{c_0 t(x,\,y,\,z)}} (U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} + U_{\zeta\zeta})\, ds. \qquad (2)$$

Par ailleurs, en dérivant directement la formule

$$u(x, y, z, t) =$$

$$= \frac{1}{c_0 t} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\pi} U(x + c_0 t \sin\theta\cos\varphi,\ y + c_0 t \sin\theta \sin\varphi,$$

$$z + c_0 t \cos\theta)\, c_0^2 t^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

on est conduit à l'égalité

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = \frac{1}{c_0 t} \iint\limits_{S_{c_0 t(x,\,y,\,z)}} (U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} + U_{\zeta\zeta})\, ds. \qquad (3)$$

Rapprochant (2) de (3), on voit que

$$u_{tt} = c_0^2 (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}),$$

ce qu'il fallait précisément démontrer. Par là, la formule de Kirchhoff

$$\Phi(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi c_0} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{c_0 t} \int\limits_{S_{c_0 t(x, y, z)}} \Phi_0 \, ds \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{c_0 t} \int\limits_{S_{c_0 t(x, y, z)}} \Phi_1 \, ds \right]$$

est justifiée. Pour obtenir les formules analogues pour l'équation bidimensionnelle

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = c_0^2 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right),$$

notons que, de toute évidence, celle-ci est vérifiée par la solution indépendante de z de l'équation à trois dimensions

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = c_0^2 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right).$$

Pour obtenir de telles solutions, il suffit d'envisager les données initiales indépendantes de z. Alors, les intégrales sur la surface de la sphère $(\xi - x)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2 = c_0^2 t^2$ peuvent s'écrire comme des intégrales dans le cercle

$$(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 \leqslant c_0^2 t^2.$$

Nous allons montrer comment on procède. Supposons que $U = U(x, y)$ ne dépende pas de z. Alors,

$$\int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\pi} U(x + c_0 t \sin\theta \cos\varphi, \; y + c_0 t \sin\theta \sin\varphi) \, c_0^2 t^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\pi/2} U(x + c_0 t \sin\theta \cos\varphi, \; y + c_0 t \sin\theta \sin\varphi) \, c_0^2 t^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi +$$

$$+ \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{\pi/2}^{\pi} U(x + c_0 t \sin\theta \cos\varphi, \; y + c_0 t \sin\theta \sin\varphi) \, c_0^2 t^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi =$$

$$= 2 \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\pi/2} U(x + c_0 t \sin\theta \cos\varphi, \; y + c_0 t \sin\theta \sin\varphi) \, c_0^2 t^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi.$$

Notre séparation de l'intégrale en deux parties égales a le sens suivant. Toute droite parallèle à l'axe des z coupe la sphère $S_{c_0 t}(x, y, z)$ en deux points situés respectivement sur les demi-sphères supérieure

et inférieure. Notre partition de l'intégrale signifie justement sa division en parties correspondant à ces demi-sphères. Posons $\rho = c_0 t \sin\theta$, $d\rho = c_0 t \cos\theta\, d\theta$. Notons encore que, pour $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$,

$$\cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \sqrt{1-\frac{\rho^2}{c_0^2 t^2}} = \frac{1}{c_0 t}\sqrt{c_0^2 t^2 - \rho^2}.$$

On peut à présent écrire

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} U(x+c_0 t\sin\theta\cos\varphi,\ y+c_0 t\sin\theta\sin\varphi)\, c_0^2 t^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi =$$

$$= 2\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} U(x+\rho\cos\varphi,\ y+\rho\sin\varphi)\,\frac{c_0 t\sin\theta\, c_0 t\cos\theta}{\cos\theta}\, d\theta\, d\varphi =$$

$$= 2\int_0^{2\pi}\int_0^{c_0 t} U(x+\rho\cos\varphi,\ y+\rho\sin\varphi)\,\frac{c_0 t\rho\, d\rho\, d\varphi}{\sqrt{c_0^2 t^2-\rho^2}} =$$

$$= 2c_0 t\int_0^{2\pi}\int_0^{c_0 t}\frac{U(x+\rho\cos\varphi,\ y+\rho\sin\varphi,\ \rho)}{\sqrt{c_0^2 t^2-\rho^2}}\, d\rho\, d\varphi.$$

Substituant les valeurs ainsi transformées de l'intégrale sur la surface de la sphère dans la formule de Kirchhoff, il vient :

$$\Phi(x,\ y,\ t) = \frac{1}{2\pi c_0}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_0^{2\pi}\int_0^{c_0 t}\frac{\Phi_0(x+\rho\cos\varphi,\ y+\rho\sin\varphi)}{\sqrt{c_0^2 t^2-\rho^2}}\,\rho\, d\rho\, d\varphi\right) + \right.$$

$$\left. + \int_0^{2\pi}\int_0^{c_0 t}\frac{\Phi_1(x+\rho\cos\varphi,\ y+\rho\sin\varphi)}{\sqrt{c_0^2 t^2-\rho^2}}\,\rho\, d\rho\, d\varphi\right].$$

Cette formule, qui donne la solution de l'équation des ondes dans le cas bidimensionnel, est dite *formule de Poisson*. On n'a pas à justifier cette formule en vérifiant qu'elle satisfait à l'équation et aux données initiales, vu qu'elle résulte de la formule de Kirchhoff déjà démontrée.

Nous allons tirer maintenant des conclusions qualitatives des formules obtenues pour la solution de l'équation des ondes dans tous les trois cas, et montrer comment ces formules s'appliquent à la résolution des équations des ondes sonores.

Ecrivons à titre de documentation le résumé des formules.

1. Formule de d'Alembert (espace à une dimension)

$$\Phi(x,\ t) = \frac{\Phi_0(x+c_0 t)+\Phi_0(x-c_0 t)}{2} + \frac{1}{2c_0}\int_{x-c_0 t}^{x+c_0 t}\Phi_1(\xi)\, d\xi.$$

2. Formule de Poisson (espace à deux dimensions)

$$u(x, y, t) = \frac{1}{2\pi c_0}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_0^{2\pi}\int_0^{c_0 t}\frac{\Phi_0(x+\rho\cos\varphi,\ y+\rho\sin\varphi)}{\sqrt{c_0^2t^2-\rho^2}}\rho\,d\rho\,d\varphi\right)+\right.$$

$$\left.+\int_0^{2\pi}\int_0^{c_0 t}\frac{\Phi_1(x+\rho\cos\varphi,\ y+\rho\sin\varphi)}{\sqrt{c_0^2t^2-\rho^2}}\rho\,d\rho\,d\varphi\right].$$

3. Formule de Kirchhoff (espace à trois dimensions)

$$u(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi c_0}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c_0 t}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\Phi_0(x+c_0 t\sin\theta\cos\varphi,\ y+\right.\right.$$

$$\left.+c_0 t\sin\theta\sin\varphi,\ z+c_0 t\cos\theta)\,c_0^2t^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi\right)+\frac{1}{c_0 t}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\Phi_1(x+$$

$$\left.+c_0 t\sin\theta\cos\varphi,\ y+c_0 t\sin\theta\sin\varphi,\ z+c_0 t\cos\theta)\,c_0^2t^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi\right].$$

Dans les formules apportées Φ_0 désigne la valeur initiale (à l'instant $t = 0$) de Φ, Φ_1 la valeur initiale de la dérivée Φ_t.

Un fait majeur résulte aussitôt de ces formules. Dans les cas à une et à deux dimensions la solution en un point s'exprime d'après les données initiales sur toute la base du triangle (ou du cône) caractéristique, alors que dans le cas à trois dimensions la valeur de la solution ne s'exprime que d'après les données initiales sur la frontière du domaine de dépendance (les intégrales sont prises seulement sur la surface de la sphère de rayon $c_0 t$ et de centre au point (x, y, z), et non dans toute la boule délimitée par cette sphère). On dit qu'on a une lacune dans le cas à trois dimensions. On doit à I. Pétrovski des travaux délicats consacrés à l'étude des équations hyperboliques considérés au point de vue des lacunes dans les domaines de dépendance.

La présence d'une lacune dans le domaine de dépendance pour l'équation des ondes à trois dimensions conduit à l'existence de fronts avant et arrière brusques pour la perturbation décrite par cette équation, lorsque la perturbation initiale (pour $t = 0$) était localisée dans une région finie de l'espace. Dans le cas à deux dimensions seul le front avant est brusque. Le fait est que le problème à deux dimensions peut être considéré comme un problème à trois dimensions, pour lequel la perturbation initiale est donnée dans un domaine cylindrique long parallèle à l'axe des z. Par exemple, les équations à deux dimensions décrivent la propagation et l'interaction des ondes dues à l'explosion simultanée de charges disposées parallèlement (à une certaine distance des charges, de telles ondes peuvent être assimilées à des ondes sonores). Peut servir d'exemple

de problème à trois dimensions le problème de la propagation et de l'interaction des ondes formées par l'explosion de plusieurs charges ponctuelles. Si l'on a une seule charge, l'introduction de coordonnées sphériques ramène l'équation du processus au cas unidimensionnel, alors que la solution ne dépend que de r et de t. Nous envisagerons bientôt un tel cas pour les équations d'ondes sonores, mais pour l'instant nous montrerons comment résoudre le problème de Cauchy pour ces équations dans le cas général.

Le système d'équations de l'acoustique s'écrit:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 c_0^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0.$$

Si l'on élimine de ces équations les vitesses, on obtient pour la pression p l'équation des ondes

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c_0^2 \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}\right).$$

Supposons connue pour $t = 0$ la distribution

$$p(x, y, z, 0) = p_0(x, y, z);$$

$$u_0(x, y, z),\ v_0(x, y, z),\ w_0(x, y, z).$$

Calculons $p_{t=0}$ à l'aide de la dernière des équations de notre système:

$$p_t|_{t=0} = -\rho_0 c_0^2 \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial z}\right).$$

On peut à présent appliquer la formule de Kirchhoff et trouver $p(x, y, z, t)$ partout dans le domaine défini par le théorème d'unicité. Après quoi, la distribution des vitesses peut être déterminée en intégrant sur t (les coordonnées x, y, z étant fixées) les dérivées de la pression:

$$u(x, y, z, t) = u(x, y, z, 0) - \frac{1}{\rho_0}\int_0^t \frac{\partial p(x, y, z, \tau)}{\partial x}\, d\tau,$$

$$v(x, y, z, t) = v(x, y, z, 0) - \frac{1}{\rho_0}\int_0^t \frac{\partial p(x, y, z, \tau)}{\partial y}\, d\tau,$$

$$w(x, y, z, t) = w(x, y, z, 0) - \frac{1}{\rho_0}\int_0^t \frac{\partial p(x, y, z, \tau)}{\partial z}\, d\tau.$$

Nous avons montré que la formule de Kirchhoff permet de construire la solution du problème de Cauchy pour les équations de la propagation des ondes sonores. Dans le cas de la symétrie sphérique la pression p doit être considérée comme fonction du seul rayon $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, et le vecteur vitesse comme étant dirigé suivant le rayon vecteur:

$$u = u_r \frac{x}{r},$$

$$v = u_r \frac{y}{r},$$

$$w = u_r \frac{z}{r}.$$

Les équations pour p, u_r s'écrivent:

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial r} = 0,$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\rho_0 c_0^2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_r) = 0.$$

Nous nous bornerons à apporter ces équations sans les déduire du système tridimensionnel précédemment écrit. Nous omettrons par la suite l'indice r qui affecte la composante radiale u_r de la vitesse et écrirons notre système comme suit:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial r} = 0,$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\rho_0 c_0^2}{r^2} \frac{\partial (r^2 u)}{\partial r} = 0.$$

Dérivant la seconde de ces équations par rapport à t et substituant dans le résultat l'expression de $\frac{\partial u}{\partial t}$ tirée de la première, nous sommes conduits à l'équation des ondes pour la pression

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{c_0^2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial p}{\partial r} \right) = 0,$$

dont la solution générale a la forme

$$p = \frac{f(r - c_0 t) + g(r + c_0 t)}{r}.$$

La fonction f correspond à une onde qui diverge du centre, et g à une onde qui converge vers ce centre.

Comme nous l'avons déjà indiqué, il résulte de la formule de Kirchhoff que si la perturbation initiale n'était donnée que dans un domaine fini $r < h$, alors la zone où p est non nulle *) aura un front

*) Nous désignons par p la différence entre la pression perturbée et la pression à l'état de repos.

arrière aussi bien qu'un front avant, et dans notre cas elle est comprise dans le voisinage h du « cône » $r - c_0 t = 0$, c'est-à-dire dans le domaine $-h < r - c_0 t < h$. Aussi est-il naturel de supposer que, pour les t suffisamment grands (en fait pour $t > h/c_0$), la solution sera décrite par la formule

$$p = \frac{f(r - c_0 t)}{r}$$

la fonction $f(r - c_0 t)$ n'étant non nulle que pour $-h < r - c_0 t < h$.

Problème. Démontrez cette proposition correctement en déterminant f, g des conditions initiales ($p(r, 0) = p_0(r)$, $p_t(r, 0) = p_1(r)$):

$$\left.\begin{aligned} f(r) + g(r) &= r p_0(r), \\ -c_0 f'(r) + c_0 g'(r) &= r p_1(r) \end{aligned}\right\}$$

et de la condition de régularité de la solution au centre (pour $r = 0$).

L'équation $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial r} = 0$ montre que dans les zones $r - c_0 t > h$, $r - c_0 t < -h$, où la pression est constante, la vitesse u est indépendante du temps, si bien qu'elle peut s'écrire sous la forme $u(r)$. Il résulte de la deuxième équation du système sonore

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\rho_0 c_0^2}{r^2} \cdot \frac{\partial (r^2 u)}{\partial r} = 0$$

que dans ces zones $r^2 u = \text{const} = m$ (m est constante). D'après le sens physique, $\rho_0 r^2 u$ est la quantité de gaz s'écoulant dans l'unité de temps à travers la section $r = \text{const}$. Le flux étant nul à travers la section $r = 0$ (on n'a ni source de gaz ni puits au centre), $m = r^2 u = 0$ dans le domaine $t > h/c_0$, $r - c_0 t < -h$. En ce qui concerne le domaine $r - c_0 t > h$, l'égalité $u = 0$ résulte du théorème d'unicité. En effet, à partir de la zone $t = 0$, $r < h$ la perturbation n'a pas le temps de se propager jusqu'aux points de ce domaine, et partout en dehors de cette zone nous avions pris pour données initiales $p = 0$, $u = 0$, auxquelles correspond la solution nulle. En vertu du théorème d'unicité, on n'a pas d'autres solutions.

$$p = \frac{f(r - c_0 t)}{r},$$

on a

$$\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{f'(r - c_0 t)}{\rho_0 r} - \frac{f(r - c_0 t)}{\rho_0 r^2},$$

d'où en intégrant sur t l'égalité $\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial r}=0$, il vient

$$u(r, t)=\int\limits_{\frac{r-h}{c_0}}^{t}\left[-\frac{f'(r-c_0\tau)}{\rho_0 r}+\frac{f(r-c_0\tau)}{\rho_0 r^2}\right]d\tau=\frac{f(r-c_0t)}{\rho_0 c_0 r}-$$

$$-\frac{1}{\rho_0 c_0 r^2}\int\limits_{h}^{r-c_0t} f(\xi)\,d\xi.$$

Intégrant, nous avons pris en considération que pour $r-c_0t=h$

$$u=0,\ p=\frac{f(r-c_0t)}{r}=0.$$

Nous savons encore que $u=0$, $p=0$ pour $r-c_0t=-h$. D'où

$$0=\frac{0}{\rho_0 c_0 r}-\frac{1}{\rho_0 c_0 r^2}\int\limits_{h}^{-h} f(\xi)\,d\xi,$$

c'est-à-dire que $\int\limits_{-h}^{h} f(\xi)\,d\xi=0$.

On voit que $f(\xi)$ et, par conséquent, la pression p doivent obligatoirement prendre des valeurs positives et négatives. Nous avons

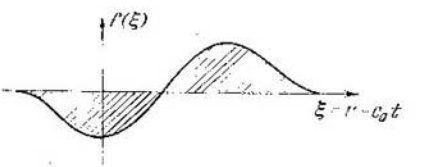

Fig. 52

montré qu'une onde sphérique de compression doit forcément être accompagnée par une onde de dépression. Supposons que le graphique de $f(\xi)$ ait la forme représentée sur la fig. 52. Nous avons montré que les aires des demi-ondes supérieure et inférieure sont égales. Pour ce qui est du graphique de la pression $p=\frac{f(r-c_0t)}{r}$ (pour un certain t fixe) la demi-onde avant doit avoir une aire moindre que la demi-onde arrière (étant donné que pour la demi-onde arrière $\frac{1}{r}$ est plus grand).

Mentionnons encore le fait évident, découlant de la formule

$$p(r, t)=\frac{f(r-c_0t)}{r},$$

que l'amplitude de l'onde de compression décroît en raison inverse de la distance par elle parcourue.

La formule $p(r, t) = \frac{g(r+c_0t)}{r}$ décrivant l'onde convergente vérifiant l'équation des ondes permet de construire l'exemple suivant ayant une grande importance théorique. Posons

$$g(r+c_0t) = \begin{cases} 0, & \text{si } r < 1 - c_0t, \\ (r+c_0t-1)^{5/2}, & \text{si } r \geqslant 1 - c_0t. \end{cases}$$

La solution correspondante régulière pour $t < \frac{1}{c_0}$ devient, à l'instant $t = \frac{1}{c_0}$,

$$p\left(r, \frac{1}{c_0}\right) = \frac{r^{5/2}}{r} = r^{3/2} = (x^2+y^2+z^2)^{3/4},$$

c'est-à-dire une fonction sans dérivées secondes Φ_{xx}, Φ_{yy}, Φ_{zz} au point $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

On s'assure sans peine en étudiant la formule de Kirchhoff que pour que la solution soit deux fois continûment dérivable *il suffit que la fonction initiale* Φ_0 *soit trois fois continûment dérivable, et que* Φ_1 *soit deux fois continûment dérivable.* Dans notre exemple Φ_0 n'a que deux dérivées continues, et Φ_1 une seule.

L'étude de formules analogues pour l'espace à n dimensions a établi qu'il suffit d'exiger des données initiales pour l'équation

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = c_0^2\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_n^2}\right)$$

la continuité de toutes les dérivées jusqu'à l'ordre $\left[\frac{n}{2}\right] + 2$. (Pour le cas $n = 1$ nous avons déjà noté que le nombre de dérivées continues dans les données initiales doit être égal à 2.) Des exemples analogues à l'exemple envisagé montrent que ces conditions ne peuvent être affaiblies.

Une remarque est encore à faire sur la terminologie établie. On appelle d'ordinaire potentiels retardés les expressions de la forme

$$\frac{1}{c_0t}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \Phi_0(x + c_0t\sin\theta\cos\varphi,\ y + c_0t\sin\theta\sin\varphi,\ z + c_0t\cos\theta)\, c_0^2t^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi = \iint_{r=c_0t} \frac{\Phi_0(x+\alpha r, y+\beta r, z+\gamma r)}{r}\, ds.$$

La justification d'une telle appellation est qu'une telle intégrale coïncide avec le potentiel newtonien de charges distribuées sur une sphère de rayon r avec la densité superficielle Φ_0 (§ 1). Pour déterminer la solution à l'instant t_0, les « potentiels » doivent être calcu-

lés d'après les valeurs de la solution et de sa dérivée par rapport à t, à l'instant initial $t = 0$ sur la sphère de rayon $c_0 t_0$. C'est à cause de ce retard temporel de la « densité de charge » utilisée que le « potentiel » est appelé retardé.

Ici le potentiel retardé est dû à des distributions superficielles de « charges ». Dans la littérature ce terme est plus fréquemment utilisé pour l'intégrale de volume

$$u(x, y, z, t) =$$

$$= \frac{1}{4\pi c_0} \iiint\limits_{\substack{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+\\ +(z-\zeta)^2 \leqslant c_0^2 t_0^2}} \frac{f\left(\xi, \eta, \zeta, t - \frac{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}{c_0}\right)}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}} d\xi\, d\eta\, d\zeta,$$

qui donne la solution de l'équation des ondes inhomogène

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_0^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = f(x, y, z, t).$$

§ 19. Solutions généralisées

Solution généralisée pour les équations de l'acoustique. Lien de la définition de la solution généralisée avec les lois de conservation. Notion de solution généralisée pour l'équation hyperbolique la plus simple $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$. Solution généralisée en tant que limite de solutions régulières. Définition de S. Sobolev. Equivalence de cette définition et de la définition classique pour les solutions régulières. Définition plus précise. Théorème d'unicité. Théorème d'existence.

Pour conclure notre aperçu des faits fondamentaux de la théorie des équations hyperboliques, nous nous arrêterons succinctement sur la notion très importante de « solution généralisée ». Le présent paragraphe est consacré à ce fait.

Dans un premier temps, nous envisagerons le système d'équations décrivant la propagation des ondes sonores:

$$\frac{\partial \rho_0 u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial \frac{p}{c_0^2}}{\partial t} + \frac{\partial \rho_0 u}{\partial x} = 0.$$

L'identité

$$\varphi\left(\frac{\partial \rho_0 u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x}\right) + \psi\left(\frac{\partial \frac{p}{c_0^2}}{dt} + \frac{\partial \rho_0 u}{\partial x}\right) +$$

$$+ \rho_0 u\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) + p\left(\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) =$$

$$= \frac{\partial\left(\rho_0 u \varphi + \frac{p}{c_0^2}\psi\right)}{\partial t} + \frac{\partial\left(p\varphi + \rho_0 u \psi\right)}{\partial x}$$

conduit à la notion de solution généralisée. Supposant les fonctions φ, ψ régulières et à support borné (c'est-à-dire non nulles seulement dans un certain domaine borné du plan x, t) nous aurons sur les solutions du système initial :

$$\iint\limits_{t\geqslant 0}\left[\rho_0 u\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)+p\left(\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial\psi}{\partial t}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\right]dx\,dt+$$

$$+\int\limits_{t=0}\left(\rho_0 u\varphi+\frac{p}{c_0^2}\psi\right)dx=0.$$

Avec S. Sobolev, *on appelle solution généralisée des p et u telles que l'identité ci-dessus est vérifiée quelles que soient les fonctions φ, ψ régulières et à support borné.*

Il faut encore spécifier dans cette définition quelle doit être la classe à laquelle appartiennent les fonctions p, u (mesurables, de carrés intégrables, etc.), mais nous ne nous arrêterons pas là-dessus.

Nous allons tâcher de donner à l'identité intégrale sur laquelle repose notre définition de la solution généralisée une interprétation imagée.

Nous supposerons $\psi = 0$, et nous considérerons l'identité

$$\iint\limits_{t\geqslant 0}\left[\rho_0 u\frac{\partial\varphi}{\partial t}+p\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right]dx\,dt+\int\limits_{t=0}\rho_0 u\varphi\,dx=0.$$

Envisageons une fonction particulière $\varphi(x, t)$ construite comme suit. Soit $\varphi(x, t) = 1$ dans un certain contour fermé régulier γ du

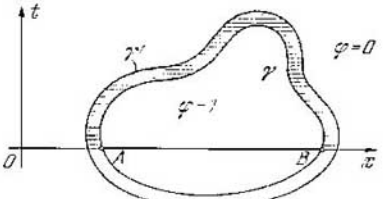

Fig. 53

plan x, t, et $\varphi(x, t) = 0$ en dehors d'un autre contour γ' contenant γ (fig. 53). Nous supposerons que les contours γ et γ' délimitent une bande fermée où $\varphi(x, t)$ décroît régulièrement de 1 à 0. Si l'on suppose cette bande très étroite, l'intégrale double dans le demi-plan supérieur (qui se réduit, de toute évidence, à l'intégrale dans la partie supérieure, hachurée, de la bande γ, γ') peut être approximativement calculée au moyen de la considération simple qui suit.

Dans la bande étroite on peut supposer que le gradient de $\varphi(x, t)$ est dirigé suivant la normale à γ et que $\rho_0 u$, p sont presque constantes le long du segment de normale découpé par γ, γ'.

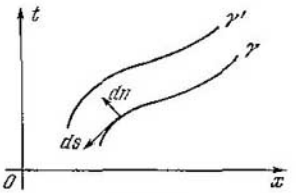

Fig. 54

L'intégration dans la bande peut se faire (fig. 54) en intégrant suivant la normale à γ (différentielle dn) et le long de γ (différentielle ds) :

$$\int_{\gamma}^{\gamma'} \left(\rho_0 u \frac{\partial \varphi}{\partial t} + p \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) dn = \int_{\gamma}^{\gamma'} (\rho_0 u n_t + p n_x) \frac{\partial \varphi}{\partial n} dn \approx$$

$$\approx (\rho_0 u n_t + p n_x) \int_{\gamma}^{\gamma'} \frac{\partial \varphi}{\partial n} dn = (\rho_0 u n_t + p n_x)(-1) = -p s_t + \rho_0 u s_x$$

(n_t, n_x sont les composantes de la normale unité à γ, et s_t, s_x les composantes de la tangente unité à γ) ;

$$\int_{\text{suivant } \gamma} \left[\int_{\gamma}^{\gamma'} \left(\rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} + p \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) dn\right] ds \approx \int_{\text{suivant } \gamma} (\rho_0 u s_x - p s_t)\, ds =$$

$$= \int_{\text{suivant } \gamma} \rho_0 u\, dx - p\, dt.$$

Ceci étant, l'égalité

$$\iint_{t \geqslant 0} \left[\rho_0 u \frac{\partial \varphi}{\partial t} + p \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right] dx\, dt + \int_{t=0} \rho_0 u \varphi\, dx = 0$$

peut s'écrire à peu près sous la forme d'égalité intégrale

$$\oint \rho_0 u\, dx - p\, dt = 0$$

le long de la partie supérieure ($t \geqslant 0$) du contour γ et du segment AB de l'axe des x refermant cette partie.

L'égalité

$$\oint \rho_0 u\, dx - p\, dt = 0$$

constitue la loi de conservation de la quantité de mouvement $\left(\int \rho_0 u\, dx \text{ est la quantité de mouvement, } \int p\, dt \text{ l'impulsion de la force}\right)$.

On adopte parfois précisément pour définition de la solution généralisée l'observation des lois intégrales de conservation sous forme de telles intégrales de contour

$$\oint \rho_0 u\, dx - p\, dt = 0,$$

$$\oint \frac{p}{c_0^2}\, dx - \rho_0 u\, dt = 0.$$

La seconde d'entre elles représente la loi de conservation de la masse, étant donné que p est en fait l'écart δp de la pression par rapport à l'état de repos, et qu'on a l'égalité $\delta p = c_0^2 \delta\rho$. On peut à nouveau la déduire de l'égalité

$$\iint\limits_{t\geqslant 0} \left[\rho_0 u \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + p\left(\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\right] dx\, dt + \\ + \int\limits_{t=0} \left(\rho_0 u\varphi + \frac{p}{c_0^2}\psi\right) dx = 0, \qquad (1)$$

si l'on prend $\varphi = 0$, et si ψ coïncide avec la fonction φ choisie lors de la déduction de la loi de conservation de la quantité de mouvement.

La forme des lois de conservation

$$\oint \rho_0 u\, dx - p\, dt = 0,$$

$$\oint \frac{p}{c_0^2}\, dx - \rho_0 u\, dt = 0$$

n'est pas très commode pour construire la théorie mathématique. Le fait est que les intégrales dans ces égalités sont prises sur des contours de mesure bidimensionnelle nulle. Or, la variation d'une fonction de l'espace L_2 sur un ensemble de mesure nulle ne change pas cette fonction en tant qu'élément de L_2. Si bien que pour les fonctions de L_2 (dans le plan) la valeur des intégrales sur un contour n'est pas, en toute rigueur, déterminée.

L'identité intégrale (1) proposée par S. Sobolev contient les lois de conservation sous une forme plus commode pour une manipulation mathématique plus rigoureuse, étant donné que les fonctions inconnues y sont intégrées dans un domaine à deux dimensions. (L'intégrale $\int\limits_{t=0} \left(\rho_0 u\varphi + \frac{p}{c_0^2}\psi\right) dx$ ne contient que les valeurs de u, p données en tant que conditions initiales.)

D'ordinaire, les équations de la mécanique des milieux continus sont déduites sous forme de lois de conservation intégrales (il est vrai, en général sous forme d'intégrales de contour), et seulement après on en déduit les lois différentielles. Ceci peut s'interpréter comme suit : la notion de solution généralisée est une notion première, celle de solution régulière, dite encore classique, étant une notion secondaire.

Notons encore que pour les équations non linéaires de la dynamique des gaz les solutions discontinues — ondes de choc — peuvent

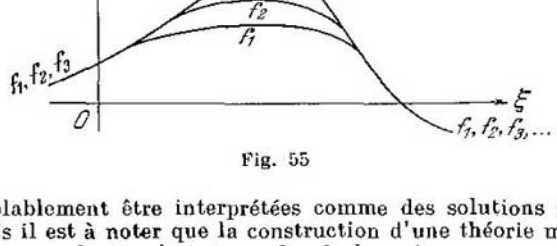

Fig. 55

vraisemblablement être interprétées comme des solutions généralisées. Mais il est à noter que la construction d'une théorie mathématique correspondante n'est pas achevée à ce jour.

Sur l'exemple de l'équation hyperbolique la plus simple $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ nous allons maintenant montrer le sens riche de la notion de solution généralisée en démontrant les théorèmes d'existence et d'unicité.

On sait que la solution générale de cette équation s'écrit :

$$u = f(x - t)$$

avec une fonction assez arbitraire $f(\xi)$. On exige d'elle un minimum de régularité, à savoir qu'elle soit dérivable, car pour vérifier que cette fonction donne la solution on doit substituer ses dérivées dans les équations.

Par ailleurs, cette formule montre que si l'on envisage une suite de solutions régulières de la forme

$$u_n = f_n(x - t)$$

avec des fonctions $f_n(\xi)$ ayant pour graphiques ceux représentés sur la fig. 55, on note le fait que ces solutions convergent vers $u = f(x - t)$ de fonction f non forcément partout dérivable. La fonction limite de la suite $f_1, f_2, f_3, \ldots$, indiquée sur la fig. 55, a été représentée sur la fig. 56. Au point $\xi = \xi_0$ la fonction $f(\xi)$ n'a pas de dérivée. On peut évidemment construire des exemples plus com-

pliqués où la dérivabilité est violée en plus d'un point. On peut même construire un exemple de suite de solutions ayant une fonction limite discontinue. (Bien entendu, le passage à la limite ne s'opère pas

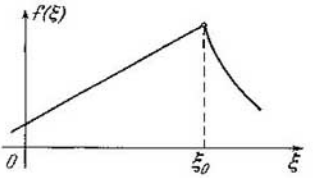

Fig. 56

alors au sens de la convergence uniforme.) Un tel exemple est représenté sur la fig. 57. Les exemples apportés montrent qu'il est raisonnable de compléter l'ensemble des solutions avec des f régulières

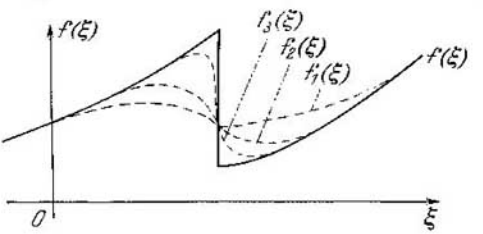

Fig. 57

par l'ensemble de fonctions $u = f(x - t)$ avec des f qui peuvent être déduites dans un sens déterminé des f régulières par passage à la limite.

Il est naturel de faire un tel passage à la limite au sens de la convergence en norme de la forme

$$\| u \| = \sqrt{\max_t \int u^2(x, t)\, dx}.$$

La raison pour le choix d'une telle norme est donnée par les considérations suivantes liées aux évaluations des solutions au moyen de l'intégrale d'énergie. Considérons pour l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

la bande caractéristique découpée dans le demi-plan x, t ($t > 0$) par les caractéristiques $x - t = \text{const}$ passant par le segment $[0, 1]$ de

l'axe des x. Nous nous donnerons les conditions initiales sur ce segment.

La droite $t = \text{const}$ coupe cette bande suivant le segment $t \leqslant x \leqslant t + 1$ (fig. 58). L'intégrale d'énergie pour cette équation a la forme

$$\oint u^2\,dx - u^2\,dt = 0.$$

Lorsqu'on intègre le long des caractéristiques on a $\int u^2\,(dx - dt) = 0$, de sorte que

$$\int_t^{t+1} u^2(x, t)\,dx = \int_0^1 u^2(x, 0)\,dx = \int_0^1 u_0^2(x)\,dx,$$

c'est-à-dire que l'intégrale de u^2 sur toute section $t = \text{const}$ de la bande caractéristique est la même quel que soit t. Ceci étant, si l'on prend la suite de solutions $u_n(x, t)$ de l'équation

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} + \frac{\partial u_n}{\partial x} = 0$$

avec les conditions initiales

$$u_n(x, 0) = u_{n0}(x),$$

on obtient alors, en vertu de la linéarité de l'équation,

$$\max_t \int_t^{t+1} [u_n(x, t) - u_m(x, t)]^2\,dx = \int_0^1 [u_{n0}(x) - u_{m0}(x)]^2\,dx,$$

$$\| u_n - u_m \| = \sqrt{\max_t \int_t^{t+1} [u_n(x, t) - u_m(x, t)]^2\,dx} =$$

$$= \sqrt{\int_0^1 [u_{n0}(x) - u_{m0}(x)]^2\,dx}.$$

Si la suite $\{u_{n0}\}$ converge en moyenne sur le segment $[0, 1]$, la suite de solutions convergera au sens de la norme introduite. Cette assertion justifie la définition suivante de la solution généralisée.

Une fonction $u(x, t)$ est dite solution généralisée s'il existe une suite $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ de solutions régulières de la même équation

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} + \frac{\partial u_n}{\partial x} = 0$$

telles que

$$\| u_n - u \| \to 0 \text{ lorsque } n \to \infty.$$

En d'autres termes, nous dirons que $u(x, t)$ est une solution généralisée si on peut l'approcher avec n'importe quelle précision par des solutions régulières.

La notion de solution généralisée décrite a ceci d'incommode qu'elle est difficile à vérifier. En effet, pour vérifier que $u(x, t)$ est

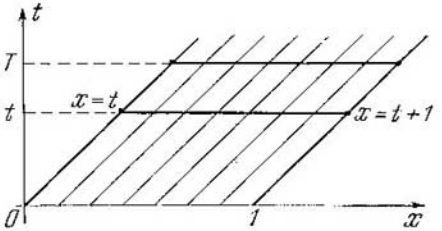

Fig. 58

solution généralisée, on doit construire une suite infinie de fonctions régulières $u(x, t)$ approchant $u(x, t)$, et on doit s'efforcer de choisir les $u_n(x, t)$ de telle façon qu'elles soient des solutions exactes de notre équation. Ceci est évidemment difficile à faire, surtout s'il ne s'agit pas de l'équation simple $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ envisagée ici pour modèle.

S. Sobolev a donné une autre définition des solutions généralisées, universellement adoptée actuellement. L'idée fondamentale de cette définition consiste à remplacer les équations différentielles directement par des lois de conservation intégrales, à partir desquelles se déduisent habituellement les équations de la physique mathématique. Nous prendrons pour modèle l'équation $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$, et tâcherons de comprendre l'essence des choses sur cet exemple. Nous avons déjà envisagé des exemples simples doués de sens physique au début de ce paragraphe.

Notons pour commencer que, pour toute fonction $\varphi(x, t)$ et tout domaine G,

$$\iint_G \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\right) \varphi(x, t)\, dx\, dt = 0$$

si $u(x, t)$ est solution régulière de l'équation $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$. Pour ce qui suit, il sera commode de supposer que le domaine G a sa frontière continue par morceaux.

Supposons que $u(x, t)$ ait dans un certain domaine G des dérivées premières continues et que l'on ait pour toute fonction $\varphi(x, t)$

suffisamment régulière, par exemple deux fois dérivable, l'égalité

$$\iint_G \left(\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}\right)\varphi(x, t)\,dx\,dt=0.$$

Alors (on le démontrera), partout dans G

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}=0.$$

Supposons le contraire. Soit $\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}\neq 0$ en un certain point intérieur (x_0, t_0) de G. Pour fixer les idées, supposons que

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{\substack{x=x_0\\ t=t_0}}=\delta>0$$

La continuité des dérivées u_t, u_x entraîne l'existence d'un ε tel que, lorsque $(x-x_0)^2+(t-t_0)^2\leqslant\varepsilon$, on a $\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}>\frac{\delta}{2}$.

Définissons à présent $\varphi(x, t)$ par la formule

$$\varphi(x, t)=\begin{cases}\left[1-\dfrac{(x-x_0)^2+(t-t_0)^2}{\varepsilon}\right]^p, & \text{pour } (x-x_0)^2+(t-t_0)^2\leqslant\varepsilon,\\ 0, & \text{pour } (x-x_0)^2+(t-t_0)^2>\varepsilon\end{cases}$$

En choisissant p suffisamment grand, on peut faire de telle sorte que φ soit autant de fois continûment dérivable qu'on le voudra. (Pour $p=3$, $\varphi(x, t)$ a deux dérivées continues.)

Il est évident que pour une telle fonction $\varphi(x, t)$

$$\iint_G \left(\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}\right)\varphi(x, t)\,dx\,dt>\int_0^{\sqrt{\varepsilon}}\left(1-\frac{r^2}{\varepsilon}\right)^p\frac{\delta}{2}\cdot 2\pi r\,dr>0.$$

Nous avons été amenés à une contradiction.

Ainsi, l'assertion

$$\iint_G \left(\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}\right)\varphi(x, t)\,dx\,dt=0$$

pour toute fonction φ suffisamment régulière et l'assertion

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}=0$$

pour une fonction continûment dérivable $u(x, t)$ sont équivalentes.

A présent, utilisant l'identité

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}\right)\varphi(x, t)+\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}+\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)u=\frac{\partial \varphi u}{\partial t}+\frac{\partial \varphi u}{\partial x},$$

nous affirmons que l'égalité $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ est équivalente, pour une fonction u continûment dérivable, à l'égalité

$$\iint_G u \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) dx\, dt = \oint_{\text{sur la frontière de } G} \varphi u\, dx - \varphi u\, dt \qquad (2)$$

pour n'importe quelle φ suffisamment régulière. Il résulte de la démonstration que nous avons faite que tous les φ peuvent être considérées comme nulles sur toute la frontière (ou sur une partie de la frontière) de G si l'on veut s'assurer que l'égalité $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ est observée seulement à l'intérieur de G. Alors la partie correspondante de l'intégrale de contour disparaît.

Pour les u régulières les égalités (2) équivalent à la définition de la solution. Pour vérifier qu'elles sont satisfaites, on n'a pas cependant à dériver $u(x, t)$. Ceci nous a permis d'appeler les fonctions vérifiant les égalités (2) solutions généralisées de l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Avant de donner une définition rigoureuse, nous allons décrire la structure de G dans le cas qui nous intéresse. Ce domaine est la moitié supérieure ($t \geqslant 0$) de la bande $0 < x - t < 1$ délimitée par les caractéristiques $x - t = 0$, $x - t = 1$ de l'équation $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$. Ces caractéristiques frontières passent par les extrémités $x = 0$, $x = 1$ du segment $0 \leqslant x \leqslant 1$ de l'axe des x, sur lequel on prend les données initiales. Les fonctions $\varphi(x, t)$, suffisamment régulières dans la bande (jusqu'à même la frontière), seront supposées nulles sur les caractéristiques frontières et, en outre, pour tous les t suffisamment grands dans la bande.

Soit $\varphi(x, t) \equiv 0$ pour $t \geqslant T$ (T peut être différent pour chaque $\varphi(x, t)$). Prenons G sous forme du parallélogramme $0 \leqslant x - t \leqslant 1$, $0 \leqslant t \leqslant T$ (cf. fig. 58). Sur son contour $\varphi(x, t)$ n'est non nulle que sur la base $t = 0$, $0 \leqslant x \leqslant 1$. Aussi doit-on avoir pour les solutions généralisées l'égalité

$$\iint u \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) dx\, dt + \int_0^1 \varphi(x, 0)\, u(x, 0)\, dx = 0.$$

Dans l'intégrale double l'intégration est faite dans toute la demi-bande, ce qui ne suscite aucune difficulté, étant donné que $\varphi = 0$ pour $t > T$.

Définition des solutions généralisées. *Une fonction $u(x, t)$ *) de deux variables ayant une norme bornée*

$$\| u \| = \sqrt{\max_t \int_t^{t+1} u^2(x, t)\, dx},$$

est appelée solution générale de l'équation $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ *dans la demi-bande* $0 \leqslant x - t \leqslant 1$, $t \geqslant 0$, *avec les données initiales* $u(x, 0) = u_0(x)$, *si l'on a pour toute fonction* φ *appartenant à la classe décrite plus haut l'égalité*

$$\iint\limits_{\substack{0 \leqslant x-t \leqslant 1 \\ t \geqslant 0}} u \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dx\, dt + \int_0^1 \varphi(x, 0)\, u_0(x)\, dx = 0.$$

Montrons que de cette définition résulte l'unicité de la solution généralisée. Pour cela, il suffit évidemment de s'assurer que l'égalité $u_0(x) = 0$ entraîne l'égalité $u(x, t) = 0$. Prenons un T arbitraire et montrons que $u(x, t) = 0$ pour $0 \leqslant t \leqslant T$ presque partout.

Supposons le contraire. La borne $\| u \|$ étant finie, il en est de même de l'intégrale

$$\iint\limits_{\substack{0 \leqslant x-t \leqslant 1 \\ T \geqslant t \geqslant 0}} u^2(x, t)\, dx\, dt,$$

c'est-à-dire que $u(x, t)$ appartient à l'espace des fonctions de carré intégrable dans le parallélogramme $0 \leqslant x - t \leqslant 1$, $T \geqslant t \geqslant 0$. Chacune de ces fonctions peut être approchée d'aussi près qu'on le voudra en moyenne quadratique par des polynômes $u_n(x, t)$:

$$\iint\limits_{\substack{0 \leqslant x-t \leqslant 1 \\ T \geqslant t \geqslant 0}} [u_n(x, t) - u(x, t)]^2\, dx\, dt \to 0 \quad \text{pour} \quad n \to \infty.$$

Construisons à présent dans notre parallélogramme les fonctions $\varphi_n(x, t)$ en tant que solutions des équations

$$\frac{\partial \varphi_n}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_n}{\partial x} = (x-t)^2 (1-x+t)^2 (T-t)^2\, u_n(x, t),$$

vérifiant pour $t = T$ à la condition $\varphi_n = 0$. On peut s'assurer directement par dérivation que de telles solutions sont données par la formule

$$\varphi_n(x, t) = -\int_t^T (x-t)^2 (1-x+t)^2 (T-\tau)^2\, u_n(x-t+\tau, \tau)\, d\tau$$

et qu'elles sont continûment dérivables.

*) La fonction $u(x, t)$ est supposée mesurable.

Cette dernière propriété n'est pas violée si on les prolonge par l'égalité $\varphi_n(x, t) = 0$ pour $t > T$. On voit aussi que $\varphi_n = 0$ pour $x - t = 0$ et pour $x - t = 1$. Il résulte de la définition des solutions généralisées que

$$\iint\limits_{\substack{0 \leqslant x-t \leqslant 1 \\ t \geqslant 0}} u \left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_n}{\partial x} \right) dx\, dt = 0,$$

c'est-à-dire que

$$\iint\limits_{\substack{0 \leqslant x-t \leqslant 1 \\ T \geqslant t \geqslant 0}} (x-t)^2 (1-x+t)^2 (T-t)^2 u_n(x, t)\, u(x, t)\, dx\, dt = 0.$$

Passant dans cette égalité à la limite $n \to \infty$, nous sommes conduits à la relation

$$\iint\limits_{\substack{0 \leqslant x-t \leqslant 1 \\ T \geqslant t \geqslant 0}} (x-t)^2 (1-x+t)^2 (T-t)^2 u^2(x, t)\, dx\, dt = 0,$$

qui démontre le théorème d'unicité.

Démontrons à présent le théorème d'existence. Supposons que pour $u_0(x)$ l'intégrale $\int\limits_0^1 u_0^2(x)\, dx$ soit finie. Nous allons montrer que $u(x, t) = u_0(x - t)$ est solution généralisée de l'équation $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ avec les données initiales $u_0(x)$ pour $t = 0$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, c'est-à-dire que, pour toute fonction $\varphi(x, t)$ vérifiant toutes les restrictions imposées à de telles fonctions, on a l'égalité

$$\iint\limits_{0 \leqslant x-t \leqslant 1} u_0(x-t) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dx\, dt + \int\limits_0^1 \varphi(x, 0)\, u_0(x)\, dx = 0.$$

Pour le démontrer, rappelons-nous que toute fonction de carré intégrable sur $[0, 1]$ peut être approchée d'aussi près qu'on le voudra (en moyenne) par un polynôme. Soit $u_n(x)$ un polynôme tel que

$$\int\limits_0^1 [u_n(x) - u_0(x)]^2\, dx < \frac{1}{n}.$$

Il est évident que $u_n(x-t)$ est une solution régulière de l'équation $\frac{\partial u_n}{\partial t} + \frac{\partial u_n}{\partial x} = 0$, si bien qu'elle vérifie l'identité

$$\iint\limits_{\substack{0 \leqslant x-t \leqslant 1 \\ t \geqslant 0}} u_n(x-t) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dx\, dt + \int\limits_0^1 \varphi(x, 0)\, u_n(x)\, dx = 0$$

quelle que soit φ admissible. Nous nous servirons par la suite du fait que, pour chaque φ, il existe T tel que $\varphi(x, t) = 0$ pour $t \geqslant T$, et que par conséquent

$$\iint\limits_{\substack{0\leqslant x-t\leqslant 1\\ T\geqslant t\geqslant 0}} u_n(x-t)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)dx\,dt+\int_0^1\varphi(x,0)\,u_n(x)\,dx=0.$$

Utilisons à présent le fait que

$$1)\ \left|\int_0^1\varphi(x,0)\,u_n(x)\,dx-\int_0^1\varphi(x,0)\,u_0(x)\,dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sqrt{\int_0^1\varphi^2(x,0)\,dx}\cdot\sqrt{\int_0^1(u_n-u_0)^2\,dx}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\int_0^1\varphi^2(x,0)\,dx},$$

$$2)\ \left|\iint\limits_{\substack{0\leqslant x-t\leqslant 1\\ T\geqslant t\geqslant 0}} u_n(x-t)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)dx\,dt-\right.$$

$$\left.-\iint\limits_{\substack{0\leqslant x-t\leqslant 1\\ T\geqslant t\geqslant 0}} u_0(x-t)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)dx\,dt\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sqrt{\iint\limits_{\substack{0\leqslant x-t\leqslant 1\\ T\geqslant t\geqslant 0}}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2dx\,dt}\cdot\sqrt{T\cdot\int_0^1(u_n-u_0)^2\,dx}=O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

$$3)\ \iint\limits_{\substack{0\leqslant x-t\leqslant 1\\ t\geqslant T}} u_n(x-t)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)dx\,dt+\int_0^1 u_n(x)\,\varphi(x,0)\,dx=0,$$

et établissons l'égalité

$$\iint\limits_{\substack{0\leqslant x-t\leqslant 1\\ t\geqslant 0}} u_0(x-t)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)dx\,dt+\int_0^1 u_0(x)\,\varphi(x,0)\,dx=0,$$

qui démontre que $u = u_0(x - t)$ est solution généralisée.

Le théorème d'existence de la solution généralisée du problème de Cauchy pour l'équation $\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}=0$ est démontré.

Problème. Démontrez que la solution généralisée dépend de façon continue de la fonction initiale $u_0(x)$.

CHAPITRE III

ÉQUATIONS DE LAPLACE

§ 20. Propriétés des fonctions harmoniques

Invariance de l'équation de Laplace et de l'intégrale de Dirichlet dans les transformations conformes du plan. Nouvelle déduction de la formule de Poisson pour la solution du problème de Dirichlet dans le cercle, laquelle déduction utilise cette invariance. Deux théorèmes sur la moyenne arithmétique pour les fonctions harmoniques. Conséquence: évaluation d'une fonction harmonique au centre d'un cercle au moyen de l'intégrale de son carré. La convergence en moyenne d'une suite de fonctions harmoniques entraîne la convergence uniforme dans un certain sous-espace. La solution du problème de Dirichlet dans un cercle est indéfiniment dérivable en tous les points intérieurs. Evaluation de ses dérivées au centre du cercle. Théorème de Harnack sur la convergence uniforme et sur l'harmonicité de la limite. Convergence des dérivées aux points intérieurs. Inégalité de Harnack pour les fonctions harmoniques non négatives. Théorème de Liouville. Principe du maximum renforcé. Théorème de la majorante discontinue. Singularités levables.

Dans ce paragraphe, nous commencerons l'étude poussée des solutions de l'équation elliptique la plus simple qu'est l'équation de Laplace $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. Nous l'avons déjà rencontrée au début de ce cours.

Arrêtons-nous d'abord sur l'invariance de l'équation de Laplace par rapport à certaines transformations du plan des variables indépendantes x, y. Ces transformations sont des transformations conformes arbitraires non dégénérées

$$x = x(\xi, \eta),$$

$$y = y(\xi, \eta).$$

La condition de conformité s'écrit (on le sait de la théorie des fonctions d'une variable complexe) sous la forme des équations de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\partial y}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = -\frac{\partial y}{\partial \xi}.$$

La transformation étant non dégénérée, on a

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Il nous sera commode d'utiliser non pas les conditions de Cauchy-Riemann elles-mêmes, mais les trois groupes d'égalités qui en découlent facilement :

I. $$\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 = \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix},$$

II. $$\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \eta} = 0,$$

III. $$\frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} = 0.$$

Quelle que soit la fonction suffisamment régulière $u(x, y)$, on peut déduire pour elle les égalités suivantes :

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi},$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta},$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\left[\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2\right] +$$

$$+ 2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\left[\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \eta}\right] + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\left[\left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2\right] =$$

$$= \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix}.$$

La dernière d'entre elles montre que les assertions $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ sont équivalentes.

Intégrons l'égalité

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)^2=\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta}\\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta}\end{vmatrix}$$

dans un certain domaine γ du plan ξ, η:

$$\iint\limits_{\gamma}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)^2\right]d\xi\,d\eta=\iint\limits_{\gamma}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta}\\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta}\end{vmatrix}d\xi\,d\eta.$$

Si par la transformation $x=x(\xi, \eta)$, $y=y(\xi, \eta)$ le domaine γ se transforme en un domaine g, on sait qu'alors

$$\iint\limits_{\gamma}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta}\\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta}\end{vmatrix}d\xi\,d\eta=\iint\limits_{g}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy.$$

Nous avons démontré l'égalité

$$\iint\limits_{\gamma}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)^2\right]d\xi\,d\eta=\iint\limits_{g}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy$$

qui prouve l'invariance de l'intégrale $\iint\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy$ par rapport aux transformations conformes. Cette intégrale est dite *intégrale de Dirichlet*. Elle est appelée à jouer un rôle important dans la théorie du problème de Dirichlet. Soulignons que la fonction $u(x, y)$ participant à l'égalité démontrée n'est pas forcément harmonique.

Montrons à présent comment l'invariance de l'équation de Laplace par rapport aux transformations conformes peut servir à la déduction heuristique de la formule de Poisson déjà connue. Rappelons que cette formule, qui a été déduite et justifiée au début de ce cours, donne la solution du problème de Dirichlet pour le cercle dans le cas où les conditions aux limites sont données continues. *On appelle problème de Dirichlet le problème de la recherche d'une fonction harmonique dans un domaine d'après ses valeurs sur la frontière de ce domaine.*

Soit donnée sur la frontière d'un cercle de rayon R de centre à l'origine, c'est-à-dire aux points $x=R\cos\theta$, $y=R\sin\theta$, une fonction continue $F(\theta)$. La solution du problème de Dirichlet dans le cercle avec la condition aux limites

$$u(R\cos\theta,\ R\sin\theta)=F(\theta)$$

sera notée $u(x, y)$. On sait que cette solution existe et qu'elle est unique. Désignons par u_0 la valeur $u(0, 0)$ qu'elle prend au centre

du cercle. Nous supposerons maintenant la fonction $u(x, y)$ suffisamment régulière dans le cercle. Nous justifierons par la suite ce fait à partir de la formule de Poisson.

Les solutions de l'équation de Laplace sont encore des solutions si l'on soumet les variables indépendantes à une transformation conforme arbitraire ou, en particulier, à une transformation orthogonale. Par conséquent,

$$u(x, y, \alpha) = u(x \cos \alpha - y \sin \alpha, x \sin \alpha + y \cos \alpha)$$

sera aussi une fonction harmonique dans le cercle, prenant sur sa frontière les valeurs $F(\theta + \alpha)$. De toute évidence, la valeur au centre ne change pas dans une rotation :

$$u(0, 0, \alpha) = u_0.$$

Construisons à présent la fonction

$$\tilde{u}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x, y, \alpha)\, d\alpha.$$

En vertu de la régularité supposée de $u(x, y)$, l'intégrale peut être dérivée par rapport aux paramètres x, y. De sorte que

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] d\alpha = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 0\, d\alpha = 0.$$

La fonction $\tilde{u}$ est donc aussi harmonique. Ses valeurs aux limites

$$\tilde{u}(R \cos \theta, R \sin \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\theta + \alpha)\, d\alpha = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\alpha)\, d\alpha$$

ne dépendent pas de θ, c'est-à-dire qu'elles sont constantes. Une constante est solution de l'équation de Laplace avec des valeurs aux limites constantes. En vertu de l'unicité, on n'a pas d'autres solutions prenant sur la circonférence extérieure la valeur $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\alpha)\, d\alpha$.

De sorte que

$$\tilde{u}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\alpha)\, d\alpha, \quad \tilde{u}(0, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\alpha)\, d\alpha ;$$

par ailleurs,

$$\tilde{u}(0, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(0, 0, \alpha)\, d\alpha = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_0\, d\alpha = u_0.$$

Ainsi donc, nous avons établi que la solution régulière $u(x, y)$ prenant sur la circonférence les valeurs $F(\theta)$ doit être calculée au centre au moyen de la formule

$$u(0, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\alpha)\, d\alpha = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\theta)\, d\theta.$$

A présent, on peut passer au calcul de la valeur de la solution en n'importe quel point du cercle.

Soit donnée sur la circonférence $x = R\cos\omega$, $y = R\sin\omega$ une fonction continue $f(\omega)$. Nous voulons utiliser $f(\omega)$ comme valeurs aux limites du problème de Dirichlet. Nous allons calculer maintenant la solution $u(x, y)$ au point $x = \rho$, $y = 0$, $R > \rho \geqslant 0$. Posant $z = x + iy$, $\zeta = \xi + i\eta$, faisons en outre la transformation homographique conforme

$$\zeta = R^2 \frac{z - \rho}{R^2 - \rho z},$$

transformant le point $z = \rho$ en $\zeta = 0$, l'axe réel en lui-même, la circonférence $|z| = R$ en elle-même.

Les deux premières propositions sont évidentes, et la dernière résulte de l'égalité

$$\left| R^2 \frac{Re^{i\omega} - \rho}{R^2 - \rho Re^{i\omega}} \right| = \left| R \frac{Re^{i\omega} - \rho}{R - \rho e^{i\omega}} \right| = \left| Re^{-i\omega} \frac{Re^{i\omega} - \rho}{Re^{-i\omega} - \rho} \right| =$$

$$= |R|\,|e^{-i\omega}| \left| \frac{Re^{i\omega} - \rho}{Re^{-i\omega} - \rho} \right| = R \cdot 1 \cdot 1 = R.$$

Le point $z = Re^{i\omega}$ se transforme dans la représentation envisagée en $\zeta = Re^{i\theta}$, les angles θ, ω étant liés par l'égalité

$$Re^{i\theta} = R^2 \frac{Re^{i\omega} - \rho}{R^2 - \rho Re^{i\omega}},$$

$$e^{i\theta} = \frac{Re^{i\omega} - \rho}{R - \rho e^{i\omega}}.$$

Dérivant cette égalité, on trouve

$$ie^{i\theta}\, d\theta = ie^{i\omega} \frac{R^2 - \rho^2}{(R - \rho e^{i\omega})^2}\, d\omega.$$

Substituant à $e^{i\theta}$ son expression en fonction de ω, il vient :

$$d\theta = \frac{R - \rho e^{i\omega}}{Re^{i\omega} - \rho} e^{i\omega} \frac{R^2 - \rho^2}{(R - \rho e^{i\omega})^2}\, d\omega = \frac{(R^2 - \rho^2)\, d\omega}{R^2 - 2R\rho\cos\omega + \rho^2}.$$

La fonction harmonique $u(x, y)$ devient par cette transformation la fonction harmonique $v(\xi, \eta) = u[x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)]$ avec

la valeur au centre $v(0, 0) = u(\rho, 0)$ et les valeurs aux limites $v(R\cos\theta, R\sin\theta) = F(\theta) = f[\omega(\theta)]$.

On sait que

$$u(\rho, 0) = v(0, 0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(\theta)\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\omega)\,\frac{d\theta}{d\omega}\,d\omega.$$

Remplaçant $\frac{d\theta}{d\omega}$ par l'expression obtenue pour elle, nous sommes conduits à l'égalité

$$u(\rho, 0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\omega)\,\frac{R^2-\rho^2}{R^2-2\rho R\cos\omega+\rho^2}\,d\omega.$$

Pour calculer à présent la valeur $u(\rho\cos\alpha, \rho\sin\alpha)$ en un point arbitraire intérieur de notre cercle $0 \leqslant \rho \leqslant R$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$, il suffit, par une rotation de l'angle α dans le sens des aiguilles d'une horloge, d'amener le vecteur $(\rho\cos\alpha, \rho\sin\alpha)$ en coïncidance avec l'axe réel. La fonction $f(\omega)$ devient alors $f(\omega+\alpha)$. Ces considérations nous conduisent à la formule de Poisson déjà connue

$$u(\rho\cos\alpha, \rho\sin\alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\omega+\alpha)\,\frac{R^2-\rho^2}{R^2-2R\rho\cos\omega+\rho^2}\,d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\,\frac{R^2-\rho^2}{R^2-2R\rho\cos(\varphi-\alpha)+\rho^2}\,d\varphi.$$

Nous savons que cette formule donne la solution du problème de Dirichlet dans le cercle, $f(\varphi)$ étant une fonction continue quelconque. Nous en avons donné une nouvelle déduction à titre exclusif d'illustration. Rappelons encore la variante suivante de transcription de la formule de Poisson, qui nous sera parfois utile :

$$u(x, y) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\,d\varphi + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(\varphi)\,Re^{i\varphi}\,d\varphi}{Re^{i\varphi}-(x+iy)} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(\varphi)\,Re^{-i\varphi}\,d\varphi}{Re^{-i\varphi}-(x-iy)}.$$

Nous allons établir maintenant plusieurs propriétés importantes des fonctions harmoniques.

Deux formes du théorème de la moyenne arithmétique.

Si la fonction $u(x, y)$ est continue dans le cercle K $\{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 \leqslant R^2\}$ et harmonique dans ce cercle, on a:

$$1^\circ \quad u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x_0 + R\cos\varphi,\ y_0 + R\sin\varphi)\, d\varphi,$$

$$2^\circ \quad u(x_0, y_0) = \frac{\iint_K u(x, y)\, dx\, dy}{\iint_K dx\, dy} = \frac{\iint_K u(x, y)\, dx\, dy}{\pi R^2}.$$

Pour démontrer la première proposition, il suffit de recopier la formule de Poisson pour le cercle de centre au point (x_0, y_0): $u(x_0+\rho\cos\alpha,\ y_0+\rho\sin\alpha) =$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x_0 + R\cos\varphi,\ y_0 + R\sin\varphi)\, \frac{R^2-\rho^2}{R^2+2R\rho\cos(\varphi-\alpha)+\rho^2}\, d\varphi$$

et de poser $\rho = 0$. Nous nous sommes déjà servis récemment de cette forme du théorème de la moyenne arithmétique lors de la déduction de la formule de Poisson en partant de l'invariance conforme de l'équation de Laplace.

La seconde forme du théorème de la moyenne arithmétique se déduit facilement de la première. En effet, quel que soit r $(0 \leqslant r \leqslant R)$,

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x_0 + r\cos\varphi,\ y_0 + r\sin\varphi)\, d\varphi.$$

Multiplions les deux membres de cette égalité par $r\,dr$ et intégrons de 0 à R:

$$u(x_0, y_0) \int_0^R r\, dr = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^R u(x_0 + r\cos\varphi,\ y_0 + r\sin\varphi)\, r\, dr\, d\varphi.$$

D'où

$$u(x_0, y_0) = \frac{\iint_K u(x, y)\, dx\, dy}{\frac{R^2}{2} \cdot 2\pi}.$$

Conséquence 1. *Dans les mêmes hypothèses*

$$|u(x_0, y_0)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi} R} \sqrt{\iint_K u^2(x, y)\, dx\, dy}.$$

La démonstration résulte de la seconde forme du théorème qui vient d'être démontré:

$$|u(x_0, y_0)| = \frac{1}{\pi R^2} \left| \iint_K u(x, y)\, dx\, dy \right| \leqslant \frac{1}{\pi R^2} \iint_K |u(x, y)|\, dx\, dy$$

et de l'inégalité de Cauchy-Bouniakovsky :

$$\iint\limits_K |u(x, y)|\,dx\,dy \leqslant \sqrt{\iint\limits_K u^2(x, y)\,dx\,dy}\,\sqrt{\iint\limits_K 1^2\,dx\,dy} = \\ = \sqrt{\pi R^2}\,\sqrt{\iint\limits_K u^2(x, y)\,dx\,dy}.$$

Nous désignerons par G_δ l'ensemble des points d'un domaine G dont la distance à la frontière est supérieure à $\delta > 0$.

Conséquence 2. *Une suite de fonctions harmoniques* $\{u_n(x, y)\}$ *continues dans* $\overline{G}$, *convergeant en moyenne dans* G, *converge uniformément dans chaque sous-domaine intérieur* G_δ.

Cette proposition résulte de ce que

$$\max_{(x, y)\in G_\delta} |u_n(x, y) - u_m(x, y)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\delta}\sqrt{\iint\limits_G (u_n - u_m)^2\,dx\,dy},$$

étant donné que tout cercle de rayon δ de centre dans G_δ appartient complètement à G (la différence $u_n - u_m$ est aussi harmonique).

Une fonction harmonique dans un cercle peut être dérivée autant de fois qu'on le voudra si elle est continue et bornée dans tout le cercle. Pour le démontrer, notons que

$$\frac{\partial^n}{\partial x^m\,\partial y^{n-m}}\left[\frac{Re^{i\varphi}}{Re^{i\varphi} - (x + iy)}\right] = \frac{n!\,Re^{i\varphi}\,i^{n-m}}{|Re^{i\varphi} - (x + iy)|^{n+1}}$$

et que $|Re^{i\varphi} - (x + iy)| \geqslant R - \sqrt{x^2 + y^2}$. Cette dernière inégalité devient évidente si l'on envisage dans le plan complexe un triangle de sommets : $Re^{i\varphi}$, $x + iy$ et l'origine des coordonnées.

D'où

$$\left|\frac{\partial^n}{\partial x^m\,\partial y^{n-m}}\,\frac{Re^{i\varphi}}{Re^{i\varphi} - (x + iy)}\right| \leqslant \frac{n!\,R}{(R - \sqrt{x^2 + y^2})^{n+1}}.$$

De même

$$\left|\frac{\partial^n}{\partial x^m\,\partial y^{n-m}}\,\frac{Re^{-i\varphi}}{Re^{-i\varphi} - (x - iy)}\right| \leqslant \frac{n!\,R}{(R - \sqrt{x^2 + y^2})^{n+1}}.$$

L'existence, la finitude et la continuité de toutes ces dérivées rendent légitime la dérivation formelle dans le cercle $x^2 + y^2 \leqslant r^2 < R^2$ de la formule de Poisson

$$u(x, y) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\varphi)\,d\varphi + \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{f(\varphi)\,Re^{i\varphi}\,d\varphi}{Re^{i\varphi} - (x + iy)} + \\ + \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{f(\varphi)\,Re^{-i\varphi}\,d\varphi}{Re^{-i\varphi} - (x - iy)}$$

par rapport aux paramètres x, y un nombre arbitraire fini de fois. [La continuité des dérivées n-ièmes résulte de la finitude des $(n+1)$-ièmes dérivées.] On obtient pour les dérivées l'évaluation $(n > 0)$:

$$\left|\frac{\partial^n u(x, y)}{\partial x^m \partial y^{n-m}}\right| \leqslant \frac{2n!\,RM}{(R-\sqrt{x^2+y^2})^{n+1}}.$$

Nous avons désigné par M $\max|f(\varphi)| = \max|u(R\cos\varphi, k\sin\varphi)|$. Au centre du cercle, c'est-à-dire pour $x = y = 0$,

$$\left|\left[\frac{\partial^n u(x, y)}{\partial x^m \partial y^{n-m}}\right]_{\substack{x=0\\y=0}}\right| \leqslant \frac{2n!\,M}{R^n}.$$

Il est clair qu'une telle évaluation peut aussi s'écrire pour un cercle de centre en un point arbitraire :

$$\left|\left[\frac{\partial^n u(x, y)}{\partial x^m \partial y^{n-m}}\right]_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}\right| \leqslant \frac{2n!}{R^n} \max_{\varphi} |u(x_0 + R\cos\varphi, y_0 + R\sin\varphi)|.$$

Premier théorème de Harnack. *Une suite de fonctions harmoniques continues dans $\overline{G}$, uniformément convergente sur la frontière Γ de G, est aussi uniformément convergente dans G, et sa limite est une fonction harmonique. Pour tout sous-domaine intérieur la convergence est uniforme non seulement pour les fonctions elles-mêmes, mais aussi pour leurs dérivées de n'importe quel ordre fixe.*

La convergence uniforme de la suite $\{u_k(x, y)\}$ dans G résulte de sa convergence uniforme sur la frontière. On le vérifie en appliquant le principe du maximum aux fonctions harmoniques $u_k(x, y) - u_l(x, y)$.

Démontrons à présent la convergence uniforme des dérivées d'un ordre quelconque fixe

$$\frac{\partial^n u_k(x, y)}{\partial x^m \partial y^{n-m}}$$

dans G_δ. Ayant construit autour d'un point arbitraire (x_0, y_0) un cercle de rayon δ tout entier contenu dans G, appliquons à la fonction harmonique $u_k(x, y) - u_l(x, y)$ l'évaluation

$$\left|\left[\frac{\partial^n (u_k - u_l)}{\partial x^m \partial y^{n-m}}\right]_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}\right| \leqslant \frac{2n!}{\delta^n} \max_{\substack{(x-x_0)^2+\\+(y-y_0)^2=\delta^2}} |u_k(x, y) - u_l(x, y)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2n!}{\delta^n} \max_{\Gamma} |u_k(x, y) - u_l(x, y)|.$$

De l'arbitraire du point $(x_0, y_0) \in G_\delta$ on déduit que, partout dans G_δ,

$$\left|\frac{\partial^n (u_k - u_l)}{\partial x^m \partial y^{n-m}}\right| \leqslant \frac{2n!}{\delta^n} \max_{\Gamma} |u_k(x, y) - u_l(x, y)|.$$

Cette inégalité démontre précisément la convergence uniforme des dérivées dans G_δ. Il en résulte, d'après un théorème d'analyse bien connu, que les dérivées

$$\frac{\partial^n u}{\partial x^m \partial y^{n-m}} = \lim_{k\to\infty} \frac{\partial^n u_k}{\partial x^m \partial y^{n-m}}$$

existent dans tout le domaine G. Passant à la limite $k \to \infty$ dans l'équation $\frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_k}{\partial y^2} = 0$, on déduit que la fonction limite $u(x, y)$ est harmonique dans G. Le théorème de Harnack est démontré.

Conséquence. *Une suite de fonctions $u_k(x, y)$ harmoniques dans un domaine G et continues dans sa fermeture $\overline{G}$, convergeant en moyenne dans ce domaine, converge dans tout sous-domaine G_δ uniformément avec ses dérivées de tout ordre fixe. Cette suite a pour limite une fonction harmonique $u(x, y)$, et les suites des dérivées ont pour limites les dérivées correspondantes de u.*

Cette proposition résulte du théorème de Harnack et de la seconde conséquence du théorème de la moyenne arithmétique.

Nous allons déduire de la formule de Poisson l'élégante inégalité de Harnack pour les fonctions harmoniques non négatives.

Inégalité de Harnack. *Soit $u(x, y) \geqslant 0$ une fonction harmonique (et continue jusqu'à la frontière) dans le cercle $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leqslant R^2$. Alors elle vérifie l'inégalité* $(0 \leqslant \rho < R)$

$$\frac{R-\rho}{R+\rho} u(x_0, y_0) \leqslant u(x_0 + \rho\cos\alpha, y_0 + \rho\sin\alpha) \leqslant \frac{R+\rho}{R-\rho} u(x_0, y_0).$$

Pour le démontrer, servons-nous de l'inégalité

$$\frac{R-\rho}{R+\rho} = \frac{R^2-\rho^2}{(R+\rho)^2} \leqslant \frac{R^2-\rho^2}{R^2+\rho^2-2R\rho\cos\omega} \leqslant \frac{R^2-\rho^2}{(R-\rho)^2} = \frac{R+\rho}{R-\rho}$$

et de la formule de Poisson

$$u(x_0 + \rho\cos\alpha, y_0 + \rho\sin\alpha) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x_0 + R\cos\varphi, y_0 + R\sin\varphi) \frac{R^2-\rho^2}{R^2+\rho^2-2R\rho\cos(\varphi-\alpha)} d\varphi.$$

Utilisant encore la non-négativité de $u(x_0 + R\cos\varphi, y_0 + R\sin\varphi) = f(\varphi)$, on obtient

$$\frac{R-\rho}{R+\rho} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi)\, d\varphi \leqslant u(x_0 + \rho\cos\alpha, y_0 + \rho\sin\alpha) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{R+\rho}{R-\rho} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi)\, d\varphi.$$

En vertu du théorème de la moyenne arithmétique,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\,d\varphi = u(x_0,\ y_0).$$

L'inégalité de Harnack est démontrée.

Nous allons démontrer maintenant un théorème remarquable sur les fonctions harmoniques définies en tous les points du plan $(x,\ y)$.

Théorème de Liouville. *Une fonction $u(x,\ y)$ harmonique dans tout le plan ne peut être bornée supérieurement ou inférieurement si elle ne se réduit pas à une constante.*

Démonstration. Si $u(x,\ y)$ est bornée supérieurement, $-u(x,\ y)$ est bornée inférieurement. Ceci étant, il suffit d'envisager le cas d'une fonction harmonique $u(x,\ y)$ partout supérieure à un certain nombre M. Qui plus est, on peut prendre $M = 0$. En effet, $u(x,\ y) - M \geqslant 0$. et la différence $u - M$ est harmonique. Ainsi, supposant qu'il existe une fonction $u(x,\ y)$ non négative harmonique dans tout le plan, nous démontrerons que cette fonction est constante.

Servons-nous de l'inégalité de Harnack $(0 < \rho < R)$:

$$\frac{R-\rho}{R+\rho}\,u(0,\ 0) \leqslant u(\rho\cos\alpha,\ \rho\sin\alpha) \leqslant \frac{R+\rho}{R-\rho}\,u(0,\ 0).$$

Si $u(x,\ y)$ est harmonique dans tout le plan $(u \geqslant 0)$, fixant $\rho > 0$ arbitraire et faisant croître R indéfiniment, on obtient

$$u(0,\ 0) \leqslant u(\rho\cos\alpha,\ \rho\sin\alpha) \leqslant u(0,\ 0),$$

$$u(\rho\cos\alpha,\ \rho\sin\alpha) \equiv u(0,\ 0).$$

Le théorème de Liouville est démontré.

Renforcement du principe du maximum. *Si une fonction harmonique $u(x,\ y)$ dans G prend sa plus grande ou sa plus petite valeur en un point intérieur $(x_0,\ y_0)$, on a $u(x,\ y) =$ = const.*

Démonstration. Il suffit d'envisager le cas $u(x,\ y) \geqslant \geqslant u(x_0,\ y_0) = 0$. Tous les autres cas se ramènent à ce cas comme dans le théorème précédent. Soit un cercle de rayon R de centre au point $(x_0,\ y_0)$ tout entier contenu dans G. Pour tout point intérieur $(x,\ y)$ de ce cercle $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2 < R^2$, on a en vertu de l'inégalité de Harnack

$$0 = \frac{R-\rho}{R+\rho}\,u(x_0,\ y_0) \leqslant u(x,\ y) \leqslant \frac{R+\rho}{R-\rho}\,u(x_0,\ y_0) = 0.$$

Ainsi, $u(x,\ y) = 0$ dans le cercle. Soit à présent $(x^*,\ y^*)$, un autre point intérieur quelconque de G. Joignons ce point au point $(x_0,\ y_0)$ par une ligne brisée tout entière contenue dans G. Supposons que chaque point de cette ligne soit distant de la frontière de plus de

$\delta > 0$. Prenons $R < \delta$ et construisons sur la ligne brisée une suite finie de points (x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n) $(x_n = x^*, y_n = y^*)$ telle que $(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2 \leqslant R^2/4$. Si l'on construit un cercle de centre en (x_k, y_k) de rayon R, le point (x_{k+1}, y_{k+1}) sera un point intérieur de ce cercle. Si l'on a pu établir que $u(x_k, y_k) = 0$ pour la fonction harmonique non négative $u(x, y)$, on aura d'après ce qui vient d'être démontré $u(x_{k+1}, y_{k+1}) = 0$. Par conséquent, il résulte de $u(x_0, y_0) = 0$ que $u(x^*, y^*) = 0$. Le principe du maximum renforcé est démontré.

Théorème de la majorante discontinue. *Considérons un domaine borné G de frontière Γ et indiquons dans $\overline{G} = G + \Gamma$ un nombre fini de points (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_N, y_N). Certains de ces points peuvent se trouver dans G, d'autres sur sa frontière Γ. Soient $u(x, y)$, $v(x, y)$ deux fonctions continues et harmoniques dans $G + \Gamma$, sauf, peut-être, aux points (x_i, y_i). En ces points $u(x, y)$, $v(x, y)$ peuvent être discontinues ou n'être pas définies. Mais nous supposons qu'elles sont finies*:

$$|u(x, y)| \leqslant M, \quad |v(x, y)| \leqslant M$$

dans $G + \Gamma$ [sauf, bien entendu, aux points (x_i, y_i)].

Si $u(x, y)|_\Gamma \leqslant v(x, y)|_\Gamma$ *en tous les points de la frontière, sauf, peut-être, aux points (x_i, y_i) situés sur la frontière, on aura aussi partout dans $G + \Gamma$ $u(x, y) \leqslant v(x, y)$.* [A nouveau à l'exception peut-être des points (x_i, y_i) intérieurs.]

Pour le démontrer, considérons la fonction

$$w_\delta(x, y) = u(x, y) - v(x, y) - \sum_i \frac{2M}{\ln \frac{d}{\delta}} \ln \frac{d}{\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}}.$$

Ici d est le diamètre de G, de sorte que

$$\ln \frac{d}{\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}} \geqslant 0,$$

où $\delta > 0$ est un petit nombre fixe.

Considérons le domaine G_δ déduit de G en lui enlevant des petits cercles de rayon δ de centres en tous les points (x_i, y_i). La frontière de G_δ est formée par des morceaux de la frontière Γ de G et des arcs de circonférences limitant ces cercles. Il est évident que dans G_δ et sur sa frontière la fonction $w_\delta(x, y)$ est continue, harmonique et non positive. La dernière assertion résulte du principe du maximum et de l'inégalité

$$w_\delta(x, y) = u(x, y) - v(x, y) - \sum_i \frac{2M}{\ln \frac{d}{\delta}} \ln \frac{d}{\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}} \leqslant 0,$$

vérifiée sur la frontière de G_δ.

Fixant le point (x, y) et faisant tendre dans l'inégalité $w_\delta(x, y) \leqslant 0$ le paramètre δ vers zéro, on s'assure que $u(x, y) - v(x, y) \leqslant 0$. Le théorème de la majorante discontinue est démontré.

On peut déduire de ce théorème le théorème d'unicité de la solution du problème de Dirichlet dans un domaine borné à fonction aux limites continue par morceaux, ayant un nombre fini de points de discontinuité.

Une autre conséquence du théorème de la majorante discontinue est le

Théorème de la singularité levable. *Soit $u(x, y)$ une fonction harmonique bornée au voisinage d'un point (x_0, y_0), sauf peut-être en ce point lui-même. On peut alors déterminer la valeur $u(x_0, y_0)$ de telle sorte que $u(x, y)$ soit harmonique dans tout le voisinage considéré de (x_0, y_0), ce point compris.*

Démonstration. Supposons le cercle $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leqslant R^2$ tout entier contenu dans ce voisinage. Soit $u^*(x, y)$ une fonction harmonique partout dans le cercle, prenant sur le cercle $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ les mêmes valeurs que $u(x, y)$. La fonction u^* peut être construite à l'aide de l'intégrale de Poisson. Il est clair que si $|u(x, y)| \leqslant M$, on a aussi $|u^*(x, y)| \leqslant M$. Aussi peut-on appliquer le lemme sur la majorante discontinue et, utilisant ce lemme, affirmer que

$$u^*(x, y) \leqslant u(x, y) \leqslant u^*(x, y)$$

partout sauf au point (x_0, y_0). Par conséquent, $u(x, y) = u^*(x, y)$. Ceci permet d'affirmer qu'en posant $u(x_0, y_0) = u^*(x_0, y_0)$ on transforme $u(x, y)$ en fonction continue et harmonique dans tout le voisinage.

Sur ce, nous terminons notre aperçu des propriétés fondamentales des fonctions harmoniques dans des domaines de forme générale, pour reprendre au paragraphe suivant l'étude des fonctions harmoniques dans un cercle.

§ 21. Principe variationnel de Dirichlet

Formule pour calculer l'intégrale de Dirichlet d'une fonction harmonique dans un cercle d'après les coefficients de Fourier des valeurs aux limites. Exemple de fonction harmonique continue dans un cercle et ayant une intégrale de Dirichlet infinie. Inégalité pour les intégrales de Dirichlet de deux fonctions prenant sur la frontière d'un cercle les mêmes valeurs, l'une de ces fonctions étant harmonique. Exemple d'Hadamard d'une fonction continue sur la frontière d'un cercle et ne pouvant être prolongée à l'intérieur avec une intégrale de Dirichlet finie. Méthode variationnelle de résolution du problème de Dirichlet. Quelques remarques historiques. Exemple de problème variationnel irrésoluble. Unicité de la fonction extrémale. Principe de Dirichlet pour le cercle et pour les domaines les plus simples qui s'en déduisent par des transformations conformes.

Nous nous proposons de démontrer dans les paragraphes qui suivent qu'on peut résoudre le problème de Dirichlet pour l'équation de Laplace dans des domaines appartenant à une classe très

large. La démonstration est basée sur la méthode variationnelle et met en œuvre plusieurs propriétés importantes autant qu'intéressantes de l'intégrale de Dirichlet.

Nous allons étudier l'intégrale de Dirichlet pour les fonctions harmoniques dans un cercle et démontrer la propriété extrémale de cette intégrale.

Pour la simplicité, considérons un cercle de rayon R de centre à l'origine et rappelons qu'on appelle intégrale de Dirichlet l'expression

$$D_r(u) = \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant r^2} (u_x^2 + u_y^2)\,dx\,dy = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^r \left(u_\rho^2 + \frac{1}{\rho^2}u_\alpha^2\right)\rho\,d\rho\,d\alpha,$$

$$x = \rho\cos\alpha, \quad y = \rho\sin\alpha.$$

Si $u(x, y)$ est harmonique dans un cercle de rayon R, dans un cercle de rayon $r < R$ les dérivées u_x et u_y sont continues. Par conséquent, $D_r(u)$ est l'intégrale d'une fonction continue. Mais pour $r = R$ cette intégrale peut être impropre. Alors, par $D_R(u)$ on entend $\lim\limits_{r\to R} D_r(u)$.

Comme nous l'avons montré dans les préliminaires (§ 2), une fonction $u(x, y)$ continue dans le cercle $x^2 + y^2 \leqslant R^2$ et harmonique dans ce cercle peut être représentée par une série de la forme

$$u(\rho\cos\alpha,\ \rho\sin\alpha) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{R}\right)^n (a_n\cos n\alpha + b_n\sin n\alpha),$$

les coefficients a_n et b_n étant les coefficients de Fourier de la fonction aux limites $f(\varphi) = u(R\cos\varphi,\ R\sin\varphi)$:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\varphi)\cos n\varphi\,d\varphi, \qquad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\varphi)\sin n\varphi\,d\varphi, \qquad n = 1,\ 2,\ \ldots$$

Nous allons nous servir de la série écrite pour calculer l'intégrale de Dirichlet. Il est évident qu'on peut dériver terme à terme la série $u(\rho\cos\alpha,\ \rho\sin\alpha)$ par rapport à ρ et α dans un cercle $0 < \rho \leqslant r$, étant donné que les séries formellement dérivées

$$u_\rho = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\rho^{n-1}}{R^n}(a_n\cos n\alpha + b_n\sin n\alpha),$$

$$u_\alpha = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{R}\right)^n n(-a_n\sin n\alpha + b_n\cos n\alpha)$$

convergent uniformément dans ce cercle. Par conséquent,

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\rho^{n-1}}{R^n} (a_n \cos n\alpha + b_n \sin n\alpha),$$

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{\rho^n}{R^n} (-a_n \sin n\alpha + b_n \cos n\alpha).$$

Ceci permet de calculer l'intégrale de Dirichlet $D_r(u)$ sous forme explicite.

Commençons par calculer

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\right)^2 \rho \, d\alpha, \quad \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right)^2 \frac{1}{\rho} d\alpha.$$

Les expressions sous les signes d'intégration se représentent par les séries doubles

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\right)^2 \rho = \sum_{m,\, n=1}^{\infty} mn \frac{\rho^{m+n-1}}{R^{m+n}} \times$$

$$\times (a_n \cos n\alpha + b_n \sin n\alpha)(a_m \cos m\alpha + b_m \sin m\alpha),$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right)^2 \frac{1}{\rho} = \sum_{m,\, n=1}^{\infty} mn \frac{\rho^{m+n-1}}{R^{m+n}} \times$$

$$\times (-a_n \sin n\alpha + b_n \cos n\alpha)(-a_m \sin m\alpha + b_m \cos m\alpha).$$

Notons à présent que

$$\int_0^{2\pi} (a_n \cos n\alpha + b_n \sin n\alpha)(a_m \cos m\alpha + b_m \sin m\alpha) \, d\alpha =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{si } m \neq n, \\ (a_n^2 + b_n^2)\pi, & \text{si } m = n \neq 0, \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} (-a_n \sin n\alpha + b_n \cos n\alpha)(-a_m \sin m\alpha + b_m \cos m\alpha) \, d\alpha =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{si } m \neq n, \\ (a_n^2 + b_n^2)\pi, & \text{si } m = n \neq 0. \end{cases}$$

Ceci permet de conclure que

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\right)^2 \rho \, d\alpha = \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right)^2 \frac{1}{\rho} d\alpha = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (a_n^2 + b_n^2) \frac{\rho^{2n-1}}{R^{2n}}.$$

D'où

$$D_r(u) = \int_0^r \left\{ \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\right)^2 \rho + \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right)^2 \frac{1}{\rho} \right] d\alpha \right\} d\rho =$$

$$= 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (a_n^2 + b_n^2) \int_0^r \frac{\rho^{2n-1}}{R^{2n}} d\rho = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n (a_n^2 + b_n^2) \left(\frac{r}{R}\right)^{2n}.$$

Il résulte de la définition de l'intégrale $D_R(u)$ que

$$D_R(u) = \lim_{r \to R} D_r(u) = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n (a_n^2 + b_n^2). \tag{1}$$

Si la série du dernier membre diverge, cela signifie que

$$D_R(u) = \infty.$$

Hadamard a construit un *exemple de fonction continue* $f(\varphi)$ *telle que la solution du problème de Dirichlet dans le cercle* $0 < \rho \leqslant R$ *pour l'équation de Laplace* $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ *avec la condition aux limites* $u(R \cos \varphi, R \sin \varphi) = f(\varphi)$ *a une intégrale de Dirichlet infinie.* La fonction d'Hadamard est donnée par la série uniformément convergente :

$$f(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n!\,\varphi)}{n^2}.$$

(La somme d'une série uniformément convergente de fonctions continues est continue.) La solution $u(x, y)$ du problème de Dirichlet avec les valeurs aux limites $f(\varphi)$ a pour intégrale de Dirichlet :

$$D_R(u) = \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^4} = \infty.$$

Cet exemple nous servira par la suite lors de l'étude d'une méthode variationnelle très importante et intéressante pour résoudre le problème de Dirichlet. Maintenant, nous démontrerons à l'aide de la série (1) le théorème suivant remarquable.

Théorème. *Soit* $g(\rho, \varphi)$ *une fonction quelconque continue dans le cercle* $0 \leqslant \rho \leqslant R$, *régulière par morceaux et ayant une intégrale de Dirichlet finie*

$$D_R(g) = \int_0^{2\pi} \int_0^R \left(g_\rho^2 + \frac{1}{\rho^2} g_\varphi \right) \rho \, d\rho \, d\varphi.$$

Sur la frontière du cercle $g(\rho, \varphi)$ *prend les valeurs aux limites*

$$f(\varphi) = g(R, \varphi).$$

Construisons une fonction harmonique $u(\rho, \alpha)$ *avec les mêmes valeurs aux limites* $u(R, \varphi) = f(\varphi)$. *Nous allons démontrer que l'intégrale de Dirichlet est finie et non supérieure à* $D_R(g)$:

$$D_R(u) \leqslant D_R(g).$$

On peut faire correspondre à la fonction aux limites $f(\varphi) = g(R, \varphi)$ la série de Fourier qui converge en moyenne vers cette fonction

$$g(R, \varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi).$$

La solution $u(\rho, \varphi)$ du problème de Dirichlet est alors représentée par la série

$$u(\rho, \varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{R}\right)^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi).$$

L'intégrale de Dirichlet de cette solution est

$$D_R(u) = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n(a_n^2 + b_n^2).$$

Pour démontrer l'inégalité

$$D_R(u) \leqslant D_R(g),$$

il suffit, c'est évident, de s'assurer que, pour tous les N,

$$\pi \sum_{n=1}^{N} n(a_n^2 + b_n^2) \leqslant D_R(g),$$

c'est-à-dire que

$$D_R(u_N) \leqslant D_R(g),$$

où

$$u_N = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{\rho}{R}\right)^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi).$$

Dans notre démonstration nous utiliserons le fait que u_N a des dérivées secondes continues. (En fait, u_N est un polynôme en x, y et a des dérivées de n'importe quel ordre.)

La démonstration est constituée par deux lemmes.

L e m m e 1. *On a l'égalité*

$$\int_0^{2\pi} [g(R, \varphi) - u_N(R, \varphi)] \left[\frac{\partial u_N(\rho, \varphi)}{\partial \rho}\right]_{\rho=R} d\varphi = 0.$$

D é m o n s t r a t i o n. Il est clair que $g(R, \varphi) - u_N(R, \varphi)$ est une fonction continue ayant une série de Fourier convergeant

en moyenne vers elle :

$$g(R, \varphi) - u_N(R, \varphi) = \sum_{n=N+1}^{\infty} (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi).$$

Les coefficients de Fourier correspondant aux valeurs de l'indice de 1 à N inclusivement sont nuls pour cette fonction. Ces coefficients sont déterminés par les intégrales :

$$\left.\begin{aligned} A_0 &= \int_0^{2\pi} [g(R, \varphi) - u_N(R, \varphi)]\, d\varphi = 0, \\ A_n &= \int_0^{2\pi} [g(R, \varphi) - u_N(R, \varphi)] \cos n\varphi\, d\varphi = 0, \\ B_n &= \int_0^{2\pi} [g(R, \varphi) - u_N(R, \varphi)] \sin n\varphi\, d\varphi = 0. \end{aligned}\right\} \quad n = 1, 2, \ldots, N.$$

Toute combinaison linéaire de $A_0, A_1, \ldots, A_N, B_1, \ldots, B_N$ sera également nulle. Notamment,

$$\sum_{n=1}^{N} n(A_n a_n + B_n b_n) = 0.$$

Cette égalité peut s'écrire comme suit :

$$\int_0^{2\pi} [g(R, \varphi) - u_N(R, \varphi)] \left[\sum_{n=1}^{N} n(a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi)\right] d\varphi = 0.$$

Reste à présent à noter que

$$\sum_{n=1}^{N} n(a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) =$$

$$= R \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\sum_{n=1}^{N} \left(\frac{\rho}{R}\right)^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi)\right]_{\rho=R} = R \left[\frac{\partial u_N(\rho, \varphi)}{\partial \rho}\right]_{\rho=R}.$$

La démonstration du premier lemme est terminée.

Lemme 2. *Soient G un domaine fini à frontière Γ régulière par morceaux, $\psi_2(x, y)$ une fonction ayant dans le domaine fermé $\overline{G}$ des dérivées secondes continues, $\psi_1(x, y)$ une fonction ayant des dérivées premières continues par morceaux. Alors*

$$\iint_G \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x}\frac{\partial \psi_2}{\partial x} + \frac{\partial \psi_1}{\partial y}\frac{\partial \psi_2}{\partial y}\right) dx\, dy + \iint_G \psi_1 \left(\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y^2}\right) dx\, dy =$$

$$= \int_\Gamma \psi_1 \frac{\partial \psi_2}{\partial n}\, ds$$

(*ds est la différentielle de l'arc* Γ, $\frac{\partial}{\partial n}$ *la dérivée suivant la normale extérieure*).

Démonstration. Nous démontrerons ce lemme dans un domaine où $\psi_1(x, y)$ est continûment dérivable jusqu'à la frontière. Dans le cas de la régularité par morceaux, on peut diviser le domaine G en une somme finie de domaines $G_1, G_2, \ldots, G_k$, pour chacun desquels cette proposition est vérifiée. Démontrant l'identité qui nous intéresse pour $G_1, G_2, \ldots, G_k$, puis ajoutant ces domaines, on obtient l'identité pour G. Alors, les intégrales sur les tronçons des frontières de $G_1, \ldots, G_k$ intérieurs à G se réduisent, étant donné que pour deux sous-domaines voisins les normales extérieures, et donc aussi les dérivées $\frac{\partial\psi_2}{\partial n}$, ne diffèrent que par le signe; les fonctions ψ_1, elles, qui figurent dans les intégrales frontières, sont continues. Dans le sous-domaine G_i, où ψ_1, ψ_2 ont respectivement des dérivées premières et secondes continues, on a l'identité

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\frac{\partial\psi_2}{\partial x}+\frac{\partial\psi_1}{\partial y}\frac{\partial\psi_2}{\partial y}+\psi_1\left(\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi_2}{\partial y^2}\right)=$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\psi_1\frac{\partial\psi_2}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\psi_1\frac{\partial\psi_2}{\partial y}\right).$$

Intégrons cette égalité dans G_i:

$$\iint\limits_{G_i}\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\frac{\partial\psi_2}{\partial x}+\frac{\partial\psi_1}{\partial y}\frac{\partial\psi_2}{\partial y}\right)dx\,dy+\iint\limits_{G_i}\psi_1\left(\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi_2}{\partial y^2}\right)dx\,dy=$$

$$=\iint\limits_{G_i}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\psi_1\frac{\partial\psi_2}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\psi_1\frac{\partial\psi_2}{\partial y}\right)\right]dx\,dy=\int\limits_{\Gamma_i}\psi_1\frac{\partial\psi_2}{\partial n}ds.$$

Nous nous sommes servis du théorème de Gauss-Ostrogradsky pour transformer l'intégrale double en intégrale de contour. Le lemme 2 est démontré.

Conséquence.

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2}\left[\frac{\partial u_N}{\partial x}\frac{\partial(g-u_N)}{\partial x}+\frac{\partial u_N}{\partial y}\frac{\partial(g-u_N)}{\partial y}\right]dx\,dy=0.$$

En effet, posant $u_N=\psi_2$, $g-u_N=\psi_1$, et appliquant le lemme précédent au domaine $x^2+y^2\leqslant R^2$, il vient

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2}\left[\frac{\partial u_N}{\partial x}\frac{\partial(g-u_N)}{\partial x}+\frac{\partial u_N}{\partial y}\frac{\partial(g-u_N)}{\partial y}\right]dx\,dy+$$

$$+\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2}(g-u_N)\left[\frac{\partial^2u_N}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u_N}{\partial y^2}\right]dx\,dy=$$

$$=\int\limits_{x^2+y^2=R^2}(g-u_N)\frac{\partial u_N}{\partial n}ds=R\int\limits_{\rho=R}(g-u_N)\frac{\partial u_N}{\partial\rho}d\varphi=0.$$

Il est à noter ici que u_N est une fonction harmonique :

$$\frac{\partial^2 u_N}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_N}{\partial y^2} = 0.$$

A présent l'identité

$$\iint\limits_{\rho \leqslant R} \left[\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 \right] dx\, dy =$$

$$= \iint\limits_{\rho \leqslant R} \left[\left(\frac{\partial u_N}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_N}{\partial y}\right)^2 \right] dx\, dy +$$

$$+ \iint\limits_{\rho \leqslant R} \left\{ \left[\frac{\partial (g - u_N)}{\partial x} \right]^2 + \left[\frac{\partial (g - u_N)}{\partial y} \right]^2 \right\} dx\, dy +$$

$$+ 2 \iint\limits_{\rho \leqslant R} \left[\frac{\partial u_N}{\partial x} \frac{\partial (g - u_N)}{\partial x} + \frac{\partial u_N}{\partial y} \frac{\partial (g - u_N)}{\partial y} \right] dx\, dy,$$

au second membre de laquelle la dernière intégrale est nulle, et l'avant-dernière non négative, permet aussitôt de conclure que

$$D_R(g) \geqslant D_R(u_N).$$

Ainsi que nous l'avons remarqué, on déduit de là l'inégalité

$$D_R(u) \leqslant D_R(g).$$

Nous avons démontré que *si pour certaines valeurs aux limites* $f(\varphi)$ *il existe un prolongement* $g(\rho, \varphi)$ *dans le cercle continu et régulier par morceaux, ayant une intégrale de Dirichlet finie, alors la fonction harmonique* $u(\rho, \varphi)$ *correspondant aux mêmes valeurs aux limites aura aussi une intégrale de Dirichlet finie, non supérieure à* $D_R(g)$.

On déduit de là notamment que la fonction aux limites d'Hadamard

$$f(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n! \varphi)}{n^2}$$

n'a pas de prolongement $g(\rho, \varphi)$ à l'intérieur du cercle $0 \leqslant \rho \leqslant R$ $|g(R, \varphi) = f(\varphi)|$ avec une intégrale de Dirichlet $D_R(g)$ finie. La propriété extrémale des fonctions harmoniques démontrée ici est appelée *principe variationnel de Dirichlet*. Nous avons démontré ce principe dans le cas où les fonctions harmoniques sont considérées dans un cercle. En réalité, un principe analogue est vrai pour une classe très large de domaines. Nous décrirons cette classe par la suite ; en attendant nous nous arrêterons sur une description plus développée de l'idée de la méthode variationnelle.

Considérons un domaine borné quelconque du plan, sur la frontière duquel domaine est donnée une fonction continue $f(s)$. Prenons dans ce domaine des fonctions régulières $u(x, y)$ ayant des

valeurs aux limites $f(s)$, et pour chacune d'elles calculons l'intégrale de Dirichlet

$$D(u) = \iint_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx\, dy.$$

La méthode variationnelle est basée sur l'affirmation que $D(u)$ prend sa valeur minimum sur une fonction harmonique solution du problème de Dirichlet.

Il est clair que $D(u) \geqslant 0$, si bien que les valeurs de cette fonctionnelle ont une borne inférieure. Supposons cette borne inférieure atteinte pour la fonction régulière $u(x, y)$. Il est bien connu en calcul des variations que la fonction $u(x, y)$ vérifie alors l'équation d'Euler :

$$\frac{\partial}{\partial x} [(u_x^2 + u_y^2)\, u_x] + \frac{\partial}{\partial y} [u_x^2 + u_y^2) u_y] = 0$$

ou, ce qui est la même chose,

$$2 \left[\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right] = 0,$$

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

l'équation de Laplace.

L'idée d'appliquer cette méthode variationnelle à l'équation de Laplace a été émise par Gauss. Dirichlet a exposé cette méthode dans ses conférences, fréquentées par Riemann. Riemann a développé cette théorie et, sous l'appellation de principe de Dirichlet, il l'a posée à la base de sa théorie géométrique des fonctions d'une variable complexe.

Ce travail a produit une impression considérable sur les mathématiciens de l'époque. Mais 18 ans plus tard Weierstrass a démontré que les affirmations posées à la base de la théorie variationnelle n'étaient pas convaincantes. Le fait est qu'il ne résultait pas des raisonnements de Riemann l'existence d'une fonction $u(x, y)$ sur laquelle $D(u)$ atteint sa borne inférieure. Riemann n'a pas pu trouver une réponse à la critique de Weierstrass. C'est seulement 32 ans plus tard que Hilbert a réussi à donner une démonstration correcte du principe de Dirichlet.

L'idée des méthodes variationnelles ayant des applications très importantes et nombreuses, nous ne pouvons la tourner.

Nous commencerons par expliciter la critique de Weierstrass. Nous examinerons un *exemple de problème variationnel pour lequel il n'existe pas de fonction minimisant la fonctionnelle* $D(u)$.

Soit $u = 0$ sur la frontière du cercle $x^2 + y^2 = 1$. Exigeons encore que $u(0, 0) = 1$. Considérons toutes les fonctions régulières par morceaux $u(x, y)$ possibles, satisfaisant aux restrictions formulées, et pour chacune d'elles calculons l'intégrale de Dirichlet $D(u)$. Cher-

chons à évaluer la borne inférieure $D(u)$. A cet effet, introduisons les coordonnées polaires $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ et définissons les fonctions $u_\delta(r, \varphi)$ $(0 < \delta < 1)$ par l'égalité

$$u_\delta(r, \varphi) = \begin{cases} 1 & (0 \leqslant r \leqslant \delta^2), \\ \dfrac{\ln \dfrac{\delta}{r}}{\ln \dfrac{1}{\delta}} & (\delta^2 \leqslant r \leqslant \delta), \\ 0 & (\delta < r). \end{cases}$$

Calculons $D_r(u_\delta)$:

$$D_r(u_\delta) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial u_\delta}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial u_\delta}{\partial \varphi} \right)^2 \right] r\, dr\, d\varphi =$$

$$= \frac{2\pi}{\ln^2 \dfrac{1}{\delta}} \int_{\delta^2}^{\delta} \left(\frac{d \ln \dfrac{\delta}{r}}{dr} \right)^2 r\, dr = \frac{2\pi}{\ln^2 \dfrac{1}{\delta}} \int_{\delta^2}^{\delta} \frac{1}{r^2}\, r\, dr = \frac{2\pi}{\ln \dfrac{1}{\delta}}.$$

Il est clair que $D(u_\delta) \to 0$ quand $\delta \to 0$. D'évidence,

$$u_\delta(x, y)\big|_{x^2+y^2=1} = 0, \quad u_\delta(0, 0) = 1,$$

c'est-à-dire que les $u_\delta(x, y)$ sont admissibles dans notre problème. Par ailleurs, nous avons montré que $D(u_\delta) \to 0$ quand $\delta \to 0$. Il est donc clair que

$$\inf D(u) \leqslant \inf D(u_\delta) = 0.$$

La fonctionnelle $D(u)$ étant non négative, on a

$$\inf D(u) = 0.$$

Toutefois, cette borne inférieure n'est atteinte pour aucune fonction admissible. En effet, si

$$D(u) = \iint_{x^2+y^2 \leqslant 1} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx\, dy = 0,$$

alors $u = \text{const}$, mais une constante ne saurait prendre des valeurs différentes au centre du cercle et sur la circonférence.

Le même exemple de suite de fonctions $\{u_\delta\}$ $\delta = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ peut jouer encore un autre rôle. Il constitue un exemple intéressant de suite de fonctions qui prennent sur la frontière du cercle des valeurs nulles et qui ont une intégrale de Dirichlet qui tend vers zéro. Il est remarquable que ces fonctions elles-mêmes ne tendent pas uniformément vers zéro, bien que la fonction $u(x, y) = 0$ soit ici extrémale. On voit que *même si la fonction extrémale existe, la suite minimisante peut ne pas converger vers elle.*

Il y a encore une difficulté dans la résolution variationnelle du problème de Dirichlet. Nous avons construit plus haut un exemple de fonction continue sur la frontière du cercle et ne pouvant être prolongée dans le cercle avec une intégrale de Dirichlet finie (exemple d'Hadamard).

Il est clair que le problème de Dirichlet ne saurait être résolu au moyen du principe variationnel pour la fonction aux limites d'Hadamard. Aussi impose-t-on à la fonction aux limites $f(Q)$ la restriction suivante : *il existe dans le domaine G une fonction $g(x, y)$ continue jusqu'à même la frontière, régulière ou régulière par morceaux, ayant une intégrale de Dirichlet $D_G(g)$ finie, prenant sur la frontière de G les valeurs $f(Q)$.*

Seules ces $f(Q)$, qui peuvent être prolongées dans G avec une intégrale de Dirichlet finie, seront envisagées par la suite. La démonstration de la résolubilité du problème de Dirichlet ne sera faite que pour ces fonctions, et encore pas pour tous les domaines. Ainsi, le domaine constitué par le cercle unité privé de son centre n'est pas admissible. L'exemple envisagé des fonctions $u_\delta(x, y)$ nous amène à cette déduction que le prolongement avec une intégrale de Dirichlet minimum n'existe pas pour n'importe quelle fonction aux limites continue admissible. La fonction

$$f(x, y)|_\Gamma = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0,\ y = 0, \\ 0 & \text{si } x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

peut être considérée comme étant continue sur la frontière. Nous avons vu qu'elle admet un prolongement continu dans le domaine avec une intégrale de Dirichlet arbitrairement petite. Or, une fonction continue ayant une intégrale de Dirichlet nulle se réduit nécessairement à une constante et ne peut prendre nos valeurs aux limites.

Supposons que, pour un certain domaine et pour une certaine fonction aux limites $f(s)$, on ait pu construire un prolongement $u(x, y)$ de $f(s)$ ($u|_\Gamma = f$) dans G tel que $D_G(u)$ soit finie et égale à la borne inférieure $\inf D_G(z)$ des intégrales de Dirichlet des fonctions $z(x, y)$ vérifiant la condition aux limites

$$z|_\Gamma = f$$

[nous avons désigné par $D_G(z)$ l'intégrale de Dirichlet de $z(x, y)$ dans G]. Nous allons montrer qu'un tel *prolongement régulier extrémal $u(x, y)$ est unique.*

Soit

$$D_G(u) = D_G(v) = d = \inf D_G(z),$$
$$u|_\Gamma = v|_\Gamma = f.$$

Démontrons l'égalité

$$D_G\left(\frac{u+v}{2}\right) = \frac{1}{2} D_G(u) + \frac{1}{2} D_G(v) - \frac{1}{4} D_G(u-v).$$

A cet effet, il suffit de soumettre l'expression sous le signe d'intégration aux transformations élémentaires suivantes:

$$D_G\left(\frac{u+v}{2}\right)=\iint_G\left\{\left[\frac{\partial\left(\frac{u+v}{2}\right)}{\partial x}\right]^2+\left[\frac{\partial\left(\frac{u+v}{2}\right)}{\partial y}\right]^2\right\}dx\,dy -$$

$$=\iint_G\left\{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{4}\left[\frac{\partial(u-v)}{\partial x}\right]^2-\frac{1}{4}\left[\frac{\partial(u-v)}{\partial y}\right]^2\right\}dx\,dy=$$

$$=\frac{1}{2}D_G(u)+\frac{1}{2}D_G(v)-\frac{1}{4}D_G(u-v).$$

Il résulte de l'égalité démontrée et de l'inégalité

$$D_G\left(\frac{u+v}{2}\right)\geqslant d\quad\left(\frac{u+v}{2}\Big|_\Gamma=f\right)$$

que $d\leqslant\frac{1}{2}d+\frac{1}{2}d-\frac{1}{4}D_G(u-v)$. D'où

$$D_G(u-v)=\iint_G[(u_x-v_x)^2+(u_y-v_y)^2]\,dx\,dy\leqslant 0.$$

De la sorte, $u-v=\text{const}$. Sur la frontière $u-v=0$. L'égalité $u-v\equiv 0$ partout dans G est démontrée.

L'application de ce théorème d'unicité de la fonction extrémale à un cercle achève pour ce domaine la démonstration du principe de Dirichlet.

Nous allons énoncer à nouveau ce principe dans ce cas.

Si $f(\varphi)$ est une fonction continue admettant au moins un prolongement continu régulier par morceaux $g(\rho, \varphi)$ [$g(\rho, \varphi)=f(\varphi)$] dans le cercle $0\leqslant\rho\leqslant R$ avec une intégrale de Dirichlet finie $D_R(g)$, il existe parmi ces prolongements un prolongement régulier unique $u(\rho, \varphi)$ tel que $D_G(u)=d$, d étant la borne inférieure des intégrales de Dirichlet de ces prolongements. Le prolongement $u(\rho, \varphi)$ est une fonction harmonique dans le cercle résolvant le problème de Dirichlet

$$u(R, \varphi)=f(\varphi).$$

Nous avons montré au paragraphe précédent que l'équation de Laplace et l'intégrale de Dirichlet sont invariantes par rapport aux transformations conformes réversibles

$$x=x(\xi, \eta),\ \xi=\xi(x, y),$$

$$y=y(\xi, \eta),\quad \eta=\eta(x, y)$$

des variables indépendantes. Il en résulte que si un domaine fermé quelconque $G+\Gamma$ admet une représentation continue conforme

sur un cercle, on est assuré que le problème de Dirichlet avec des valeurs aux limites continues est résoluble pour le domaine.

Notamment, le problème de Dirichlet peut être résolu pour les domaines représentés sur la fig. 59, c'est-à-dire pour le secteur circulaire et pour les lunules délimitées par deux arcs de circonférences.

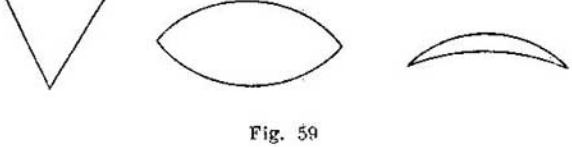

Fig. 59

On a en théorie des fonctions d'une variable complexe des formules simples pour la représentation de ces domaines sur le cercle unité.

Le principe de Dirichlet joue pour tous ces domaines. En effet, soient Γ la frontière de G, $u|_\Gamma = f$. Montrons que

$$D_G(u) \leqslant D_G(g),$$

g étant une fonction quelconque régulière par morceaux, définie dans G et prenant les mêmes valeurs aux limites que $u(x, y)$ ($g|_\Gamma = f$). Supposons que les égalités

$$x = x(\xi, \eta),$$
$$y = y(\xi, \eta)$$

définissent une représentation conforme du cercle $K\{\xi^2 + \eta^2 \leqslant 1\}$ sur G. Alors $u[x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)]$ est une fonction harmonique de ξ, η, $u|_{\xi^2+\eta^2=1} = f[x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)]$. Il est évident que la fonction $\gamma(\xi, \eta) = g[x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)]$ prend sur la circonférence $\xi^2 + \eta^2 = 1$ les mêmes valeurs aux limites que $u[x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)]$. En vertu de l'invariance de l'intégrale de Dirichlet,

$$D_G(u) = D_K\{u[x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)]\},$$
$$D_G(g) = D_K\{g[x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)]\},$$

et en vertu du principe de Dirichlet pour le cercle,

$$D_K\{g[x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)]\} \geqslant D_K\{u[x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)]\}.$$

De ce fait, $D_G(g) \geqslant D_G(u)$.

Notre démonstration de l'unicité de la fonction extrémale vaut pour des domaines quelconques, en particulier pour les domaines ici envisagés.

Sur ce, nous terminons la démonstration du principe de Dirichlet et de la résolubilité du problème de Dirichlet pour tous les domaines pouvant être représentés sur le cercle continûment (avec la frontière) au moyen de transformations élémentaires conformes. Notam-

ment, le principe de Dirichlet et la résolubilité du problème de Dirichlet ont été démontrés pour le secteur et les lunules représentés sur la fig. 59.

Nous étudierons au paragraphe suivant la méthode alternée de Schwarz, qui nous permettra d'étendre le théorème de résolubilité du problème de Dirichlet et d'application du principe de Dirichlet à des polygones quelconques.

Utilisant un théorème en vertu duquel tout domaine simplement connexe à frontière rectifiable contenant au moins deux points admet une représentation continue conforme sur un cercle, moyennant quelques précisions apportées aux énoncés, on démontre sans peine la résolubilité du problème de Dirichlet et le principe de Dirichlet. Toutefois, nous n'utiliserons pas ce théorème des représentations conformes, étant donné que sa démonstration dans un énoncé rigoureux susceptible de nous satisfaire n'est pas simple du tout.

§ 22. Méthode de Schwarz

Méthode alternée de Schwarz de la démonstration de l'existence de la solution du problème de Dirichlet pour des domaines composés. Critérium de Schwarz. Enoncé du théorème et sa démonstration. Utilisation de la méthode de Schwarz pour la démonstration du principe de Dirichlet. Exemple de déduction du théorème d'existence de la solution du problème de Dirichlet et du principe de Dirichlet dans un polygone non simplement connexe. Vérification du critérium de Schwarz à l'aide de la « condition de lunule » géométrique. Schéma de la démonstration du principe de Dirichlet et de la résolubilité du problème de Dirichlet pour des domaines polygonaux quelconques.

Nous allons considérer dans ce paragraphe la méthode alternée de Schwarz qui résout le problème de Dirichlet pour l'équation de Laplace dans des domaines composés. Supposons que le domaine G se décompose en trois parties G_1, G_2, G_3, comme cela est indiqué sur la fig. 60. Désignons la réunion des domaines G_1 et G_2, avec leur frontière commune β, par $G_{1,2}$. Posons de même $G_{2,3} = G_2 \cup G_3 \cup \gamma$, $\cup$ désignant le signe de réunion. La frontière du domaine $G_{1,2}$ est constituée par les arcs α, γ et σ. Supposons que pour les domaines partiels $G_{1,2}$ et $G_{2,3}$ le problème de Dirichlet soit résoluble pour des valeurs aux limites continues quelconques. Nous nous proposons d'énoncer la condition qui doit être imposée aux domaines G_1, G_2, G_3 pour que le problème de Dirichlet soit résoluble pour le domaine G tout entier, sachant qu'il est résoluble pour les domaines partiels $G_{1,2}$ et $G_{2,3}$. Nous énoncerons d'abord ce critérium sous la forme qui nous sera utile pour démontrer le théorème d'existence, mais qui ne fournit pas, de prime abord, un procédé efficace permettant de vérifier si ce critérium est rempli pour des domaines géométriquement donnés. Nous indiquerons par la suite des conditions géométriques simples suffisantes pour l'observation de ce critérium.

Critérium de Schwarz. *Nous dirons qu'un système de domaines G_1, G_2, G_3 d'arcs frontières α, β, γ, δ, σ vérifie le critérium de Schwarz si les deux conditions suivantes sont remplies:*

1. *Toute fonction harmonique dans $G_{1,2}$, continue dans $\overline{G}_{1,2}$, nulle sur $\alpha \cup \sigma$ et n'excédant pas en valeur absolue 1 sur γ n'excède pas en module partout sur l'arc β un certain $0 < 1$.*

2. *Toute fonction harmonique dans $G_{2,3}$, continue dans $\overline{G}_{2,3}$, nulle sur $\delta \cup \sigma$ et n'excédant pas en valeur absolue 1 sur β n'excède pas en module partout sur l'arc γ $\theta < 1$.*

Il est supposé dans ce critérium que la constante θ peut être choisie une fois pour toutes pour le système donné de domaines G_1, G_2, G_3, et donc qu'elle ne dépend pas de la fonction harmonique

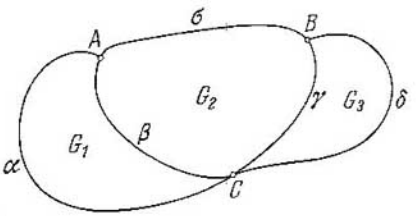

Fig. 60

continue envisagée. (Rappelons que la barre sur un ensemble indique la fermeture de cet ensemble.)

Nous dirons que le domaine $G_{1,2}$ ($G_{2,3}$) vérifie la condition de résolubilité si, quelle que soit la fonction aux limites continue sur $\overline{\alpha \cup \gamma \cup \sigma}$ ($\overline{\delta \cup \beta \cup \sigma}$), il existe une solution continue correspondante du problème de Dirichlet dans $\overline{G}_{1,2}$ ($\overline{G}_{2,3}$). De même, le domaine $G = G_{1,2} \cup G_{2,3}$ vérifie la condition de résolubilité si, pour toute fonction aux limites continue sur $\overline{\alpha \cup \delta \cup \sigma}$, il existe une solution continue correspondante du problème de Dirichlet dans $\overline{G}$.

Théorème. *Si un système de domaines G_1, G_2, G_3 vérifie le critérium de Schwarz et si pour les domaines $G_{1,2}$, $G_{2,3}$ la condition de résolubilité est remplie, cette condition est aussi remplie pour le domaine composé $G = G_{1,2} \cup G_{2,3}$.*

Démonstration. Soit donnée sur $\overline{\alpha \cup \delta \cup \sigma}$ une fonction aux limites continue $f(s)$. Soit $g(x, y)$ une fonction quelconque continue dans $\overline{G}$ égale à $f(s)$ sur la frontière $\overline{\alpha \cup \delta \cup \sigma}$. Nous allons décrire une méthode d'itération qui, à partir de l'approximation initiale $g(x, y)$, nous conduit à la solution du problème de Dirichlet.

Posons $u_0(x, y) = g(x, y)$ et définissons $v_0(x, y)$ comme suit :

$$v_0(x, y) = \begin{cases} u_0(x, y) \text{ dans } \overline{G_1 \cup \sigma \cup \delta}; \\ \text{à la solution du problème de Dirichlet dans} \\ \bar{G}_{2,3} \text{ avec les conditions aux limites} \\ v_0|_{\overline{\sigma \cup \delta}} = f(s) = u_0(x, y)|_{\overline{\sigma \cup \delta}}, \\ v_0|_{\beta} = u_0(x, y)|_{\beta}. \end{cases}$$

Puis, les approximations successives $u_n(x, y)$, $v_n(x, y)$ seront construites comme suit :

$$u_n(x, y) = \begin{cases} v_{n-1}(x, y) \text{ dans } \overline{G_3 \cup \alpha \cup \sigma}; \\ \text{à la solution du problème de Dirichlet dans} \\ \bar{G}_{1,2} \text{ avec les conditions aux limites} \\ u_n|_{\overline{\alpha \cup \sigma}} = f(s) = v_{n-1}(x, y)|_{\overline{\alpha \cup \sigma}}, \\ u_n|_{\gamma} = v_{n-1}(x, y)|_{\gamma}, \end{cases}$$

$$v_n(x, y) = \begin{cases} u_n(x, y) \text{ dans } \overline{G_1 \cup \sigma \cup \gamma}; \\ \text{à la solution du problème de Dirichlet dans} \\ \bar{G}_{2,3} \text{ avec les conditions aux limites} \\ v_n|_{\overline{\sigma \cup \delta}} = f(s) = u_n(x, y)|_{\overline{\sigma \cup \delta}}, \\ v_n|_{\beta} = u_n(x, y)|_{\beta}. \end{cases}$$

Il est évident que, par construction, chacune des fonctions $u_n(x, y)$, $v_n(x, y)$ est continue dans $\overline{G}$ et qu'elle prend sur la frontière les valeurs $f(s)$. Nous allons montrer que la suite

$$u_0, v_0, u_1, v_1, u_2, \ldots, v_{k-1}, u_k, v_k, u_{k+1}, \ldots$$

converge uniformément. Il en résultera que sa limite est une fonction continue prenant sur $\overline{\alpha \cup \delta \cup \sigma}$ les valeurs données $f(s)$.

Il est facile de démontrer que cette limite est une fonction harmonique dans G. En effet, prenons dans G un point intérieur quelconque (x_0, y_0). Ce point sera un point intérieur au moins pour l'un des domaines $G_{1,2}$, $G_{2,3}$. Envisageons, pour fixer les idées, le cas $(x_0, y_0) \in G_{1,2}$. La suite $u_0(x, y)$, $u_1(x, y)$, $\ldots$, $u_n(x, y)$, $\ldots$ de fonctions harmoniques dans $G_{1,2}$ converge aussi uniformément dans $G_{1,2}$ vers la même limite en tant que sous-suite d'une suite convergente. En vertu du premier théorème de Harnack, sa limite est une fonction harmonique dans $G_{1,2}$.

Si $(x_0, y_0) \in G_{2,3}$, on distinguerait de même une sous-suite $v_0, v_1, v_2, \ldots$ et on établirait l'harmonicité de sa limite.

On voit que pour prouver la condition de résolubilité du problème de Dirichlet dans G il suffit de montrer que la suite

$$u_0, v_0, u_1, v_1, u_2, v_2, \ldots$$

est uniformément convergente.

Passant à cette étude de la convergence, notons que

$$u_n - u_{n-1} \; (n = 2, 3, 4, \ldots) = \begin{cases} v_{n-1} - v_{n-2} \text{ dans } \overline{G_3 \cup \sigma \cup \alpha}; \\ \text{à une fonction harmonique dans } G_{1,2} \\ \text{égale à 0 sur } \overline{\alpha \cup \sigma} \text{ et à} \\ v_{n-1} - v_{n-2} \text{ sur } \overline{\gamma}; \end{cases}$$

$$v_n - v_{n-1} \; (n = 1, 2, 3, \ldots) = \begin{cases} u_n - u_{n-1} \text{ dans } \overline{G_1 \cup \sigma \cup \delta}; \\ \text{à une fonction harmonique dans } G_{2,3} \\ \text{égale à 0 sur } \overline{\delta \cup \sigma} \text{ et à} \\ u_n - u_{n-1} \text{ sur } \overline{\beta}. \end{cases}$$

Posons

$$a_n = \max_{(x,\, y) \in \overline{\beta}} | u_n(x, y) - u_{n-1}(x, y) |,$$

$$b_n = \max_{(x,\, y) \in \overline{\gamma}} | v_n(x, y) - v_{n-1}(x, y) |.$$

Le critérium de Schwarz étant vérifié, nous sommes conduits à affirmer que

$$a_n \leqslant \theta b_{n-1}; \; b_n \leqslant \theta a_n.$$

D'où

$$a_n \leqslant \theta^2 a_{n-1} \leqslant \theta^{2(n-2)} a_2,$$

$$b_n \leqslant \theta^{2n-3} a_2 \; (n \geqslant 2).$$

De toute évidence, du principe du maximum pour la solution du problème de Dirichlet résultent les inégalités suivantes:

$$| u_n(x, y) - u_{n-1}(x, y) | \leqslant b_{n-1} \leqslant \text{const}\, \theta^{2n},$$

$$| v_n(x, y) - v_{n-1}(x, y) | \leqslant a_n \leqslant \text{const}\, \theta^{2n};$$

$$(x, y) \in \overline{G}, \; n = 2, 3, 4, \ldots$$

La convergence uniforme des suites

$$u_0, \; u_1, \; u_2, \; \ldots,$$

$$v_0, \; v_1, \; v_2, \; \ldots$$

est évidente. Notons à présent que, à partir de $n = 1$, les fonctions $v_n - u_n$ sont, c'est évident, harmoniques et continues dans chacun des domaines G_1, G_2, G_3 et nulles sur la frontière extérieure $\overline{\alpha \cup \delta \cup \sigma}$. Par ailleurs, il résulte de la définition que $v_n - u_n = 0$ dans $\overline{G_1}$ et sur $\overline{\beta}$. Sur l'arc $\overline{\gamma}$ la fonction u_n coïncide par construction avec v_{n-1}. Ceci étant, $v_n - u_n$ est égale sur $\overline{\gamma}$ à $v_n - v_{n-1}$. D'après

le principe du maximum,

$$| v_n (x, y) - u_n (x, y) | \leqslant \max_{\bar{\gamma}} | v_n - u_n | = \max_{\bar{\gamma}} | v_n - v_{n-1} | = b_n \leqslant \text{const } \theta^{2n}.$$

Ceci montre aussitôt que la suite composée

$$u_0, v_0, u_1, v_1, u_2, v_2, \ldots$$

converge aussi uniformément. La démonstration du théorème est achevée.

Le principe de Schwarz permet d'étendre à des domaines composés non seulement la résolubilité du problème de Dirichlet avec des valeurs aux limites continues, mais encore l'observation du principe de Dirichlet.

Soit une fonction continue et régulière par morceaux $g(x, y)$ ayant une intégrale de Dirichlet finie $D_G(g) = D_{G_1}(g) + D_{G_2}(g) + D_{G_3}(g)$. Supposons de même que le principe de Dirichlet soit vérifié pour chacun des domaines $G_{1,2}$, $G_{2,3}$.

L'observation de ce principe signifie que, pour toute fonction $v(x, y)$ régulière par morceaux dans $G_{1,2}$ et pour une fonction $u(x, y)$ harmonique dans ce domaine et coïncidant avec v sur la frontière $\overline{\beta \cup \sigma \cup \delta}$, on a l'inégalité

$$D_{G_{1,2}}(u) \leqslant D_{G_{1,2}}(v).$$

Notamment, pour la suite de fonctions u_n, v_n participant à la démonstration du théorème précédent,

$$D_{G_{1,2}}(u_n) \leqslant D_{G_{1,2}}(v_{n-1}), \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Notons encore que $u_n = v_{n-1}$ dans G_3, si bien que

$$D_{G_3}(u_n) \leqslant D_{G_3}(v_{n-1}).$$

Eu égard à ces deux dernières affirmations, il vient:

$$D_G(u_n) \leqslant D_G(v_{n-1}), \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

De même, supposant le principe de Dirichlet réalisé pour $G_{2,3}$, on établit sans peine l'inégalité

$$D_G(v_n) \leqslant D_G(u_n), \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Comme $u_0(x, y) = g$, nous nous sommes assurés que l'intégrale de Dirichlet de n'importe laquelle des fonctions de la suite

$$u_0, v_0, u_1, v_1, u_2, v_2, \ldots$$

n'est pas supérieure à $D_G(g)$. Nous savons que cette suite converge uniformément vers une fonction $u(x, y)$ harmonique dans G, qui coïncide avec $g(x, y)$ sur la frontière de ce domaine. Démontrons que $D_G(u) \leqslant D_G(g)$.

Il suffit d'établir l'inégalité

$$D_{H_1 \cup H_2 \cup H_3}(u) = D_{H_1}(u) + D_{H_2}(u) + D_{H_3}(u) \leqslant D_G(g)$$

pour des sous-domaines intérieurs quelconques H_i des domaines G_i ($H_1 \subset G_1$, $H_2 \subset G_2$, $H_3 \subset G_3$) et d'utiliser ensuite l'égalité

$$D_G(u) = \sup D_{H_1 \cup H_2 \cup H_3}(u).$$

Dans chacun des sous-domaines H_i la suite

$$u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3, \ldots$$

est une suite de fonctions harmoniques qui convergent uniformément avec leurs dérivées premières. (Souvenez-vous du théorème de

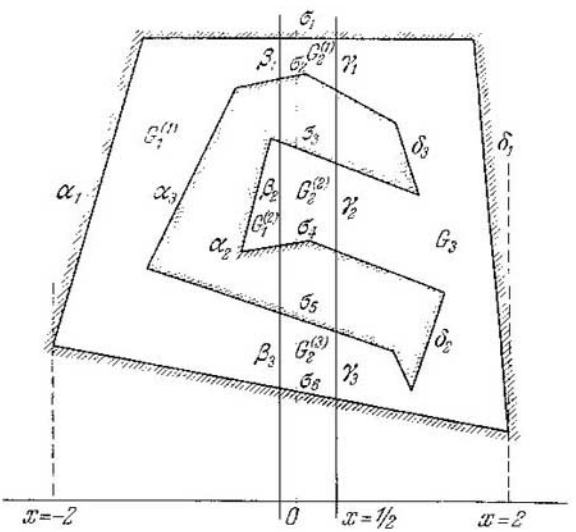

Fig. 61

Harnack et du théorème de convergence des dérivées pour les suites harmoniques uniformément convergentes.) C'est pourquoi

$$D_{H_1 \cup H_2 \cup H_3}(u) = \lim_{n \to \infty} D_{H_1 \cup H_2 \cup H_3}(u_n).$$

Par ailleurs,

$$D_{H_1 \cup H_2 \cup H_3}(u_n) \leqslant D_G(u_n) \leqslant D_G(g).$$

Sur ce, nous terminons la démonstration de l'inégalité

$$D_G(u) \leqslant D_G(g).$$

En vertu du théorème d'unicité de la solution du problème de Dirichlet, la fonction $u(x, y)$ est déterminée univoquement d'après les valeurs aux limites $g(x, y)|_{\alpha \cup \delta \cup \sigma}$. Son existence résulte du théorème démontré relatif à la résolubilité du problème de Dirichlet dans $G = G_1 \cup G_2 \cup G_3$. La fonction coïncidant avec $g(x, y)$ sur la frontière $\alpha \cup \delta \cup \sigma$ et ayant son intégrale de Dirichlet égale à $D_G(u)$ est unique. Ceci a été démontré au paragraphe précédent.

Les faits qu'on vient d'énumérer expriment le contenu du principe de Dirichlet pour le domaine composé G. Ainsi donc, nous avons montré que le critérium de Schwarz pour G_1, G_2, G_3, la résolubilité du problème de Dirichlet pour $G_{1,2}$, $G_{2,3}$ et l'observation du principe de Dirichlet pour $G_{1,2}$, $G_{2,3}$ entraînent la résolubilité du problème de Dirichlet et l'observation du principe de Dirichlet pour le domaine composé $G = G_{1,2} \cup G_{2,3}$. Avant d'utiliser ces faits, faisons quelques remarques sur la démonstration qui vient d'être faite. Dans cette démonstration, il était absolument inessentiel que les domaines fussent simplement connexes, et que chacun des arcs α, β, γ, δ, σ de la frontière fut connexe. Chacun de ces arcs peut être constitué de plusieurs arcs différents, comme, par exemple, sur la fig. 61. Sur cette figure, le polygone biconnexe $\overline{G_1 \cup G_2 \cup G_3}$ a été découpé par deux droites parallèles β $(x = 0)$ et γ $(x = 1/2)$ en plusieurs parties. Nous avons considéré que les parties $G_1^{(1)}$ et $G_1^{(2)}$ constituent le domaine G_1. Les parties $G_2^{(1)}$, $G_2^{(2)}$, $G_2^{(3)}$ constituent G_2*). Les frontières α, δ sont constituées chacune par trois lignes brisées α_1, α_2, α_3; δ_1, δ_2, δ_3. La frontière σ est décomposée en six parties différentes. Sur chacune des frontières rectilignes β, γ doivent être considérés trois segments; on a représenté sur la fig. 62 les domaines G_1, G_2, G_3 disposés de telle façon que l'arc σ est absent. Nous allons montrer que les domaines représentés sur la fig. 61 vérifient le critérium de Schwarz.

Considérons la fonction harmonique $\frac{2}{5}(x + 2)$ non négative dans $G_1 \cup G_2$ et égale à 1 sur γ $(x = 1/2)$. La non-négativité de cette fonction résulte de ce que notre figure est tout entière située dans la bande $-2 \leqslant x \leqslant 2$, comme le montre la figure.

Il est évident que pour toute fonction harmonique continue non supérieure à 1 sur γ et égale à zéro sur $\alpha \cup \sigma$ on déduit du principe du maximum l'inégalité

$$u(x, y) \leqslant \frac{2}{5}(x + 2).$$

*) On entend d'ordinaire par domaine un ensemble ouvert connexe, de sorte que, en toute rigueur, G_1 et G_2 ne sont pas des domaines. Néanmoins, dans cet exemple, il nous sera commode de nous écarter quelque peu des définitions en usage et d'appeler G_1 et G_2 des domaines.

Si l'on sait que $u(x, y)$ n'est pas inférieure à -1 sur γ et qu'elle est nulle sur $\alpha \cup \sigma$, on peut écrire de façon analogue :

$$u(x, y) \geqslant -\frac{2}{5}(x+2).$$

Ceci montre clairement que si $|u| \leqslant 1$ sur γ et si $u = 0$ sur $\alpha \cup \sigma$, on a alors pour $x = 0$, c'est-à-dire sur β, l'inégalité $|u| \leqslant \frac{2}{5}(x+2) = \frac{4}{5}$. On démontre exactement de la même manière à l'aide de la fonction harmonique $1 - x/2$ positive dans $G_1 \cup G_2$ et égale à 1 sur β $(x = 0)$ que toute fonction harmonique non supérieure à 1 en module sur β et nulle sur $\delta \cup \sigma$ vérifie sur γ $(x = 1/2)$

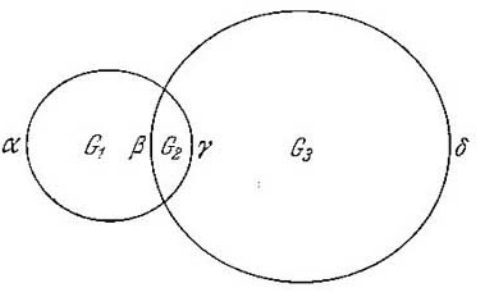

Fig. 62

l'inégalité $|u| \leqslant 3/4$. On voit que dans le cas envisagé le critérium de Schwarz est vérifié si l'on prend pour θ

$$\theta = \frac{4}{5} = \max\left(\frac{3}{4}, \frac{4}{5}\right).$$

Si l'on avait démontré que le problème de Dirichlet était résoluble et que le principe de Dirichlet était vrai pour les domaines simplement connexes $G_1^{(1)} \cup G_2^{(1)} \cup G_2^{(3)} \cup \beta_1 \cup \beta_3$; $G_1^{(2)} \cup G_2^{(2)} \cup \beta_2$; $G_3 \cup G_2^{(1)} \cup G_2^{(2)} \cup G_2^{(3)} \cup \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$, on aurait été en droit d'étendre ces affirmations au domaine non simplement connexe $\overline{G_1 \cup G_2 \cup G_3}$. Il est clair que le raisonnement apporté ici est général. Nous ne nous y arrêterons pas plus en détail, et quand nous aurons montré par la suite l'observation du principe de Dirichlet pour les polygones simplement connexes, nous ne spécifierons pas chaque fois quand nous nous servirons de ce principe que les polygones possèdent cette propriété. L'extension des faits démontrés aux polygones multiplement connexes s'opère suivant le schéma examiné sur cet exemple par découpage en parties simplement connexes.

Nous allons à présent décrire et démontrer une *condition géométrique très simple et commode qui entraîne l'observation du critérium de Schwarz.*

Supposons qu'on puisse distinguer dans un domaine G_2 un sous-domaine $G_2^{(2)}$ délimité par deux arcs de circonférences qui se coupent

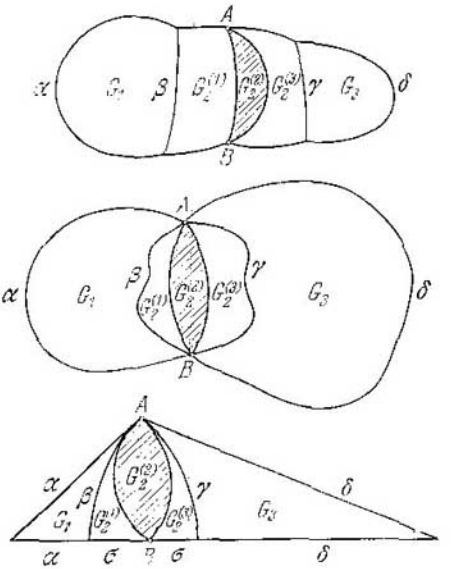

Fig. 63

on des points A, B situés sur la frontière de G_2 de telle sorte que les arcs β, γ se trouvent de part et d'autre de la lunule AB.

Nous avons représenté sur la fig. 63 plusieurs variantes admissibles de disposition de la lunule $G_2^{(2)}$ dans G_2. Les arcs de circonférences délimitant la lunule sont supposés distincts. Nous avons représenté sur la fig. 64 un domaine ne pouvant recevoir une lunule, étant donné que les arcs β et γ sont tangents aux points P, Q. *Si le domaine G_2 peut recevoir de la manière indiquée ci-dessus une lunule, le critérium de Schwarz est vérifié.* C'est ce que nous allons démontrer maintenant.

Supposons connu qu'une fonction harmonique continue $u(x, y)$ soit nulle sur $\alpha \cup \sigma$ et qu'elle n'excède pas en module 1 sur γ. Alors, en vertu du principe du maximum, elle n'excède pas en module 1

sur l'arc de circonférence délimitant la lunule à droite (cf. fig. 63). Si l'on arrive à montrer que la valeur absolue de cette fonction n'est pas supérieure à un certain θ ($\theta < 1$) sur l'arc de gauche délimitant la lunule, on déduira alors sans peine du principe du maximum qu'une

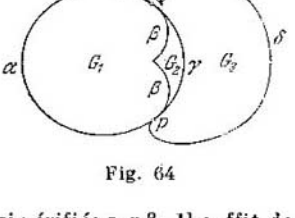

Fig. 64

telle inégalité est aussi vérifiée sur β. Il suffit de construire une fonction harmonique $w(x, y)$ égale à 1 sur l'arc de droite et non négative sur le restant de la frontière du domaine $G_1 \cup G_2^{(1)} \cup G_2^{(2)}$ pour déduire du principe du maximum l'inégalité

$$|u(x, y)| \leqslant w(x, y), \quad (x, y) \in G_1.$$

Si l'on a alors $w \leqslant \theta$ sur l'arc de gauche délimitant la lunule, l'affirmation requise sera démontrée. Nous construirons la fonction harmonique — la majorante $w(x, y)$ — de telle façon qu'elle soit uniforme dans le plan coupé suivant l'arc délimitant notre lunule à droite, égale à 1 sur cet arc à gauche de la coupure et nulle à sa droite. On réussit à construire cette fonction qui sera constante le long de chacun des arcs de telle ou telle circonférence passant par les points A, B. Il suffit pour cela d'utiliser l'harmonicité de la fonction

$$w(x, y) = a\left(\operatorname{Arctg}\frac{y-y_A}{x-x_A} - \operatorname{Arctg}\frac{y-y_B}{x-x_B}\right) + b$$

et de prendre les constantes a, b et les branches de l'arc tangente de façon à vérifier les conditions posées. Nous nous sommes déjà servis de l'harmonicité de cette fonction dans le chapitre des préliminaires lors de la déduction de la formule de Poisson qui résout le problème de Dirichlet dans le cercle. Sur la frontière gauche de la lunule notre fonction w prend, c'est évident, une certaine valeur positive θ inférieure à 1.

Il est vrai qu'on ne saurait utiliser la fonction $w(x, y)$ en tant que majorante en partant du principe du maximum sous sa forme la plus simple, car cette fonction est discontinue aux points A, B situés sur la frontière G. Néanmoins, elle est bornée, ce qui permet d'utiliser le lemme relatif à la majorante discontinue (§ 20). Sur ce, nous terminons les raisonnements montrant que l'égalité $u(x, y) =$

$= 0$ sur $\alpha \cup \sigma$ et l'inégalité $|u| \leqslant 1$ sur γ entraînent l'inégalité $|u| \leqslant \theta$ sur β. La vérification de la première moitié du critérium de Schwarz est terminée. La seconde moitié se vérifie exactement de la même manière.

Nous allons montrer maintenant comment l'utilisation du critérium de la lunule permet de s'assurer aisément de la résolubilité du problème de Dirichlet et de l'observation du principe de Dirichlet pour n'importe quel polygone. Comme nous l'avons déjà dit, nous nous bornerons aux polygones simplement connexes.

Envisageons un polygone qui puisse être divisé par un segment de droite AB, tout entier contenu dans le polygone, en deux parties APB et BQA (fig. 65) pour chacune desquelles la légitimité de

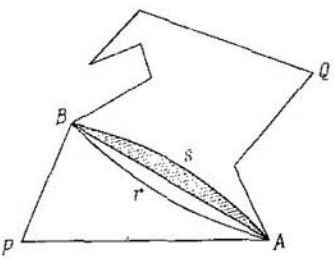

Fig. 65

l'assertion à démontrer a déjà été établie. Pour être laconiques, nous symboliserons par D l'assertion que le problème de Dirichlet est résoluble et que le principe de Dirichlet est réalisé.

Entourons le segment AB par une lunule tout entière contenue dans le polygone. Ainsi que nous l'avons montré au paragraphe précédent, l'assertion D est vraie pour la lunule $ArBs$. Notre critérium géométrique permet de vérifier aisément que l'assertion D est vraie pour le domaine $APBsA$ constitué par le polygone APB complété par la partie hachurée de la lunule.

De la légitimité de D pour $APBsA$ et pour BQA, point n'est plus difficile, à nouveau moyennant la condition de lunule, de déduire la légitimité de D pour $APBQA$.

Tout polygone simplement connexe peut être découpé par des segments de droites en triangles de telle façon que chaque section augmente le nombre de domaines séparés. Dès lors, il suffit de vérifier que l'assertion D est vraie pour les triangles, voire pour les triangles rectangles (chacun des triangles peut être découpé en deux triangles rectangles par l'une de ses hauteurs). Nous avons montré sur la fig. 66 comment un triangle rectangle ABC est découpé en

trois parties G_1, G_2, G_3 par des arcs de circonférences AE, AF passant par le point A, de centres aux sommets des angles aigus C et B.

La condition de lunule est évidemment remplie ici. Aussi suffira-t-il de pouvoir vérifier la légitimité de D seulement pour les secteurs circulaires CAE, BAF. Nous avons démontré à la fin du paragraphe précédent que le problème de Dirichlet était résoluble et que le

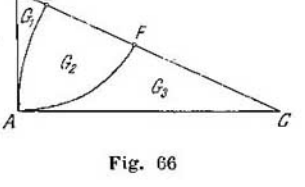

Fig. 66

principe de Dirichlet était vrai pour n'importe quels secteurs. Sur ce, nous terminons la description du schéma de la démonstration du fait que, étant donné une fonction continue quelconque sur la frontière d'un polygone quelconque ayant un nombre fini de côtés, on peut construire dans ce polygone une fonction harmonique continue jusqu'à la frontière et coïncidant sur cette frontière avec la fonction donnée. Si ce prolongement harmonique de la fonction limite dans le polygone a une intégrale de Dirichlet infinie, il n'existe pas de prolongement quel qu'il soit de cette fonction limite avec une intégrale de Dirichlet finie. Si, par contre, l'intégrale de Dirichlet du prolongement harmonique est finie, pour tout autre prolongement cette intégrale est strictement supérieure ou infinie.

Nous nous servirons des faits démontrés au paragraphe suivant lors de l'étude du principe de Dirichlet dans le cas d'une classe de domaines très large.

§ 23. Démonstration du principe de Dirichlet

Restrictions imposées au domaine et aux fonctions. Lemme relatif au comportement des fonctions admissibles au voisinage de la frontière et (lemme 2) évaluation de l'intégrale du carré d'une fonction s'annulant sur la frontière d'après son intégrale de Dirichlet.

Construction d'une suite particulière minimisante et étude de ses propriétés. Passage à la limite légitimant le principe de Dirichlet.

Dans ce paragraphe, nous nous proposons de légitimer le principe de Dirichlet pour une classe très large de domaines plans G et de démontrer le théorème d'existence de la solution du problème de Dirichlet dans un domaine G pour l'équation de Laplace.

Sur la frontière Γ de G les valeurs aux limites $u|_\Gamma = f(s)$ seront supposées telles qu'elles puissent être prolongées par quelque procédé dans G avec une intégrale de Dirichlet finie. Bien entendu, c'est là une restriction majeure pas du tout obligatoire pour que le problème de Dirichlet soit résoluble. Nous serons forcés d'imposer cette restriction parce que nous avons choisi pour méthode de résolution le principe variationnel, lequel permet de travailler seulement avec des fonctions à intégrale de Dirichlet finie.

Nous commencerons par décrire les exigences imposées au domaine G et à toutes les fonctions $u(x, y)$ ($u_k(x, y)$) qui participeront à tous les théorèmes et lemmes de ce paragraphe.

Propositions.

1°. *Chacune des fonctions envisagées $u(x, y)$ est régulière par morceaux, elle possède dans G une intégrale de Dirichlet*

$$D_G(u) = \iint_G (u_x^2 + u_y^2)\, dx\, dy$$

finie et prend sur la frontière de ce domaine les valeurs $u|_\Gamma = f(s)$. (Pour toutes les fonctions $u(x, y)$ la fonction aux limites $f(s)$ est

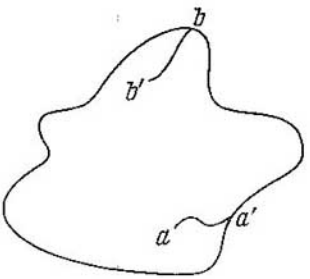

Fig. 67

la même). La notation $f(s)$ est ici purement symbolique. Il n'est pas supposé qu'un seul et unique paramètre s puisse être pris sur la frontière, car nous admettrons, en particulier, des domaines du type représenté sur la fig. 67. Pour ces domaines les arcs aa', bb' sont aussi rapportés à la frontière. Relativement à la frontière du domaine G et à la fonction aux limites $f(s)$ il sera supposé ce qui suit.

2°. *Il existe un certain $h_0 > 0$ tel que, pour tout point Q sur la frontière toute circonférence de centre en Q de rayon $h < h_0$ coupe la frontière.*

3°. *La fonction $f(s)$ est continue sur la frontière fermée. De ce fait, elle est uniformément continue, c'est-à-dire qu'il existe une fonction positive $\alpha(h)$ ($\lim_{h\to 0} \alpha(h) = 0$) telle que $|f(Q) - f(Q')| < \alpha(h)$ dès que la distance entre les points limites Q et Q' est inférieure à h.*

Nous désignerons par G_h l'ensemble des points intérieurs dont la distance à la frontière de G n'est pas supérieure à h, et par $D_{G_h}(u)$ l'intégrale de Dirichlet de $u(x, y)$ dans ce domaine.

Lemme 1. *Soit Q un point quelconque de la frontière de G. On a alors pour $h < h_0$*

$$\frac{1}{\pi h^2} \iint_{\Omega_h} [u(x, y) - f(Q)]^2 \, dx \, dy \leqslant 8\pi D_{G_h}(u) + 2\alpha^2(h),$$

Ω_h étant la partie du cercle de rayon h de centre au point Q se trouvant dans le domaine G.

Démonstration. Considérons un point quelconque du domaine Ω_h, de coordonnées polaires r et φ ($l'origine est en Q$)

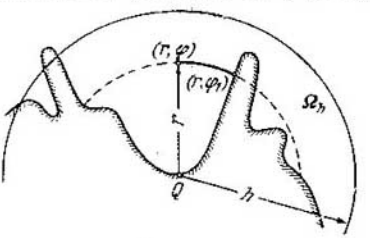

Fig. 68

(fig. 68). Comme $h < h_0$, la circonférence de rayon $r \leqslant h$ coupe la frontière. Soient r, φ_1 les coordonnées du point d'intersection avec Γ le plus proche du point choisi (r, φ). Alors,

$$u(r, \varphi) - u(r, \varphi_1)| = \left| \int_{\varphi_1}^{\varphi} u_\psi(r, \psi) \, d\psi \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\int_{\varphi_1}^{\varphi} u_\psi^2(r, \psi) \, d\psi} \cdot \sqrt{|\varphi_1 - \varphi|} \leqslant \sqrt{2\pi} \sqrt{\int u_\varphi^2(r, \varphi) \, d\varphi}.$$

L'intégrale sur l'angle φ sans indication explicite des bornes d'intégration est ici et par la suite l'intégrale sur toutes les valeurs de φ pour lesquelles $(r, \varphi) \in \Omega_h$. Etant donné que le point (r, φ_1) est situé sur la frontière et que sa distance à Q n'est pas plus grande que h, on a

$$|u(r, \varphi_1) - f(Q)| \leqslant \alpha(h).$$

Par conséquent,

$$|u(r, \varphi) - f(Q)| \leqslant \sqrt{2\pi} \sqrt{\int u_\varphi^2(r, \varphi)\, d\varphi} + \alpha(h),$$

d'où l'on déduit

$$|u(r, \varphi) - f(Q)|^2 \leqslant 4\pi \int u_\varphi^2(r, \varphi)\, d\varphi + 2\alpha^2(h).$$

Intégrant cette inégalité sur φ, il vient

$$\int |u(r, \varphi) - f(Q)|^2\, d\varphi \leqslant 8\pi^2 \int u_\varphi^2(r, \varphi)\, d\varphi + 4\pi\alpha^2(h).$$

Si l'on multiplie les deux membres de l'inégalité par r et qu'on intègre de 0 à h, on obtient dans le premier membre une intégrale sur Ω_h que nous allons évaluer :

$$\iint_{\Omega_h} |u - f(Q)|^2\, dx\, dy = \int_0^h \left(\int |u(r, \varphi) - f(Q)|^2\, d\varphi \right) r\, dr \leqslant$$

$$\leqslant 8\pi^2 \int_0^h \left(\int u_\varphi^2(r, \varphi)\, d\varphi \right) r\, dr + 4\pi\alpha^2(h) \cdot \frac{h^2}{2} \leqslant$$

$$\leqslant 8\pi^2 \int_0^h \left(\int \frac{h^2}{r^2} u_\varphi^2\, d\varphi \right) r\, dr + 2\pi h^2 \cdot \alpha^2(h) \leqslant$$

$$\leqslant 8\pi^2 h^2 \int_0^h \int \left(u_r^2 + \frac{1}{r^2} u_\varphi^2 \right) d\varphi\, r\, dr + 2\pi h^2 \alpha^2(h) =$$

$$= \pi h^2 [8\pi D_{\Omega_h}(u) + 2\alpha^2(h)].$$

Nous avons désigné ici par $D_{\Omega_h}(u)$ l'intégrale de Dirichlet de u dans le domaine Ω_h, qui n'excède pas, de toute évidence, $D_{G_h}(u)$. Le lemme 1 est démontré.

Lemme 2. *Supposons que le domaine G puisse être encadré par un carré de côté L. Alors, pour toute fonction $w(x, y)$ continue régulière par morceaux s'annulant sur la frontière de G, on a l'inégalité*

$$\iint_G w^2\, dx\, dy \leqslant \frac{L^2}{2} \iint_G (w_x^2 + w_y^2)\, dx\, dy.$$

Avant d'aborder la démonstration, faisons la remarque suivante. Si l'on prolonge la fonction $w(x, y)$, définie dans G et nulle sur la frontière, par des valeurs nulles en dehors de G dans tout le carré contenant G, dans ce carré K

$$\iint_K w^2\, dx\, dy = \iint_G w^2\, dx\, dy,$$

$$\iint_K (w_x^2 + w_y^2)\, dx\, dy = \iint_G (w_x^2 + w_y^2)\, dx\, dy.$$

Sans nuire à la généralité, on peut supposer le carré donné par les inégalités

$$0 \leqslant x \leqslant L,$$
$$0 \leqslant y \leqslant L.$$

Ainsi, pour les fonctions déterminées dans ce carré et nulles sur la frontière, il suffira de montrer que

$$\int_0^L \int_0^L w^2\, dx\, dy \leqslant \frac{L^2}{2} \int_0^L \int_0^L (w_x^2 + w_y^2)\, dx\, dy.$$

Cette assertion résulte de la chaîne évidente d'égalités et d'inégalités :

$$w(x, y) = \int_0^x w_x(\xi, y)\, d\xi,$$

$$|w(x, y)| \leqslant \int_0^x |w_x(\xi, y)|\, d\xi \leqslant \sqrt{\int_0^x 1\, d\xi} \cdot \sqrt{\int_0^L w_x^2\, dx} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{x} \cdot \sqrt{\int_0^L (w_x^2 + w_y^2)\, dx},$$

$$w^2(x, y) \leqslant x \int_0^L (w_x^2 + w_y^2)\, dx,$$

$$\int_0^L \int_0^L w^2(x, y)\, dx\, dy \leqslant \int_0^L x\, dx \cdot \int_0^L \int_0^L (w_x^2 + w_y^2)\, dx\, dy =$$

$$= \frac{L^2}{2} \cdot \int_0^L \int_0^L (w_x^2 + w_y^2)\, dx\, dy.$$

Nous avons intégré d'abord dans ces calculs sur une seule droite $y = \text{const}$, puis nous avons intégré aussi sur y. La démonstration du lemme 2 est achevée.

Ces lemmes préliminaires établis, nous en venons à la légitimation du principe de Dirichlet. Nous opérerons en trois étapes.

I. Construction d'une suite particulière minimisante.

II. Etude des propriétés de cette suite.

III. Passage à la limite et étude des propriétés de la limite.

Venons-en à l'étude de la première étape. Considérons l'ensemble $\mathfrak{M}\{u(x, y)\}$ de toutes les fonctions $u(x, y)$ vérifiant la proposition 1° : les $u(x, y)$ sont régulières par morceaux, $u|_\Gamma = f$ et l'intégrale de Dirichlet $D_G(u)$ est finie. Cet ensemble n'est pas vide, étant

donné qu'on suppose l'existence d'au moins une fonction $g(x, y)$ vérifiant les exigences imposées à $u(x, y) \in \mathfrak{M}$. La non-négativité de $D_G(u)$ entraîne l'existence d'une borne inférieure $d \geqslant 0$ pour les $D_G(u)$:

$$d = \inf_{u \in \mathfrak{M}} D_G(u).$$

Il résulte de la définition de la borne inférieure qu'on peut prendre dans $\mathfrak{M}$ une suite $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3, \ldots$ telle que $d = \lim_{n\to\infty} D_G(\tilde{u}_n)$. Nous appellerons minimisante une telle suite. On peut évidemment supposer que cette suite a été choisie et numérotée de telle façon que $d \leqslant D_G(\tilde{u}_n) \leqslant d + 1/n$.

Nous voulons démontrer l'existence de la limite $u(x, y) = \lim_{n\to\infty} \tilde{u}_n$ et nous assurer que $D_G(u) = d$. Toutefois, la réalisation de ce programme présente cette difficulté que $\lim_{n\to\infty} \tilde{u}_n$ doit être comprise ici non pas dans le sens de la convergence uniforme (avec les dérivées), mais dans le sens de la convergence en norme d'un espace particulier W_2^1, que nous n'avons pas étudié et dont nous ne savons pas manipuler les éléments. (Rappelez-vous l'exemple de suite minimisante étudié au § 21, qui n'est pas une suite convergente au sens de la convergence uniforme.) Néanmoins, la démonstration peut se faire sans mettre en œuvre de nouveaux faits d'analyse fonctionnelle. Pour cela, il suffira d'envisager non pas des suites minimisantes arbitraires, mais seulement certaines suites particulières. Nous allons construire ces suites.

Lemme géométrique. *Pour tout $h > 0$ suffisamment petit, il existe un polygone M_n ayant un nombre fini de côtés, tel que ce polygone est tout entier contenu dans G et qu'il contient tous les points de G dont la distance à la frontière n'est pas inférieure à $\frac{1}{n}$ ($h < \frac{1}{n} < 2h$). Qui plus est, avec chaque point de ce genre, il contient le cercle de rayon $2/3n$ de centre en ce point.*

Démonstration. Considérons dans notre domaine borné G l'ensemble fermé des points dont la distance à la frontière n'est pas inférieure à $1/3n$. En vertu du théorème de Bolzano-Weierstrass, du recouvrement de cet ensemble par des voisinages circulaires ouverts de rayon $1/6n$ de centres aux points de l'ensemble on peut tirer un recouvrement fini. Décrivons autour de chaque voisinage de ce recouvrement un carré. Tous les points intérieurs et frontières de ce carré sont au plus à la distance $\sqrt{2}/6n < 1/3n$ de son centre, si bien qu'ils se trouvent dans G. L'ensemble des points dont chacun se trouve dans au moins un de ces carrés ou sur sa frontière forme un polygone ayant un nombre fini de côtés, contenant tous les points de G dont la distance à la frontière n'est pas inférieure à $1/3n$. L'exs-

tence d'un polygone doué des propriétés énumérées dans l'énoncé du lemme géométrique est démontrée.

Construction. Soit par définition $u_n(x, y)$ une fonction coïncidant avec $\widetilde{u}_n(x, y)$ en dehors du polygone M_n. Dans M_n nous définirons $u_n(x, y)$ comme une fonction harmonique coïncidant avec $\widetilde{u}_n(x, y)$ aux points de la frontière du polygone M_n. L'existence d'une telle fonction résulte de la résolubilité du problème de Dirichlet, démontrée au § 22, pour les polygones, la fonction aux limites étant continue arbitraire. Il résulte du principe de Dirichlet pour les polygones, principe que nous avons également établi, que

$$D_{M_n}(\widetilde{u}_n) \geqslant D_{M_n}(u_n),$$
$$d + \frac{1}{n} \geqslant D_G(\widetilde{u}_n) \geqslant D_G(u_n).$$

Il est évident que u_n vérifie les conditions aux limites, qu'elle a une intégrale de Dirichlet finie, si bien que, étant fonction de $\mathfrak{M}$, elle vérifie l'inégalité

$$D_G(u_n) \geqslant d.$$

Il résulte de toute évidence de

$$d + \frac{1}{n} \geqslant D_G(u_n) \geqslant d$$

l'égalité $\lim\limits_{n\to\infty} D_G(u_n) = d$, qui signifie que la suite construite u_1, u_2, u_3, ... est aussi minimisante. Nous aurons précisément affaire à cette suite minimisante dans la suite. Il importera que *tous les termes de cette suite soient harmoniques à partir d'un n suffisamment grand, au voisinage de tout point intérieur de G.*

Nous abordons la seconde étape, où l'on étudiera les propriétés de la suite construite u_1, u_2, u_3, ...

Propriété 1. *Les égalités suivantes*

$$D_G(u_k - u_l) \leqslant 2(1/k + 1/l),$$
$$\iint_G (u_k - u_l)^2 \, dx\, dy \leqslant L^2(1/k + 1/l)$$

sont vraies, L étant le côté du carré dans lequel le domaine G peut être inscrit.

Démonstration. Démontrant au § 21 l'unicité de la fonction extrémale du principe de Dirichlet, nous avons obtenu chemin faisant l'égalité

$$D_G\left(\frac{u+v}{2}\right) = \frac{1}{2} D_G(u) + \frac{1}{2} D_G(v) - \frac{1}{4} D_G(u - v)$$

que nous allons utiliser maintenant sous la forme suivante:

$$D_G\left(\frac{u_k + u_l}{2}\right) = \frac{1}{2} D_G(u_k) + \frac{1}{2} D_G(u_l) - \frac{1}{4} D_G(u_k - u_l).$$

La fonction $\frac{u_h + u_l}{2}$ est égale à f sur la frontière de G, de sorte qu'elle appartient à $\mathfrak{M}$. Ceci étant, $D_G\left(\frac{u_h + u_l}{2}\right) \geqslant d$.

L'inégalité

$$\frac{1}{2} D_G(u_h) + \frac{1}{2} D_G(u_l) - \frac{1}{4} D_G(u_h - u_l) \geqslant d$$

entraîne

$$D_G(u_h - u_l) \leqslant 2[D_G(u_h) - d] + 2[D_G(u_l) - d] \leqslant 2\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{l}\right).$$

La première des inégalités qui nous sont nécessaires est démontrée. La seconde découle du lemme 2, étant donné que $u_h - u_l = 0$ sur la frontière Γ de G.

Propriété 2. *Pour tout $\varepsilon > 0$, on trouve $h > 0$ et N tels que, pour la bande frontière G_h constituée par les points dont la distance à la frontière Γ de G n'est pas supérieure à h, l'inégalité*

$$D_{G_h}(u_n) < \varepsilon$$

est vraie pour tous les $n > N$.

Démonstration. On déduit de l'assertion bien connue pour tout domaine G

$$\frac{1}{4} D_G(u+v) - D_G\left(\frac{u+v}{2}\right) = \frac{1}{2} D_G(u) + \frac{1}{2} D_G(v) - \frac{1}{4} D_G(u-v) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} D_G(u) + \frac{1}{2} D_G(v),$$

en y remplaçant G par G_h et l'appliquant aux fonctions $u = u_N$, $v = u_n - u_N$, que

$$D_{G_h}(u_n) \leqslant 2D_{G_h}(u_N) + 2D_{G_h}(u_n - u_N).$$

D'après la propriété 1

$$D_{G_h}(u_n - u_N) \leqslant D_G(u_n - u_N) \leqslant 2\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{N}\right),$$

d'où

$$D_{G_h}(u_n) \leqslant 2D_{G_h}(u_N) + 4\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{N}\right) < 2D_{G_h}(u_N) + \frac{8}{N}$$

pour $n > N$. Etant donné que, pour tout N fixe, $\lim_{h \to 0} D_{G_h}(u_N) = 0$, prenant d'abord $N > 16/\varepsilon$ puis h tel que $D_{G_h}(u_N) < \varepsilon/4$, nous sommes conduits à l'inégalité définitive $D_{G_h}(u_n) < \varepsilon$.

Propriété 3.

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $h_1 > 0$ tel que, pour tout point intérieur P dont la distance au point frontière le plus proche Q est $h < h_1$, on a

l'inégalité

$$|u_n(P) - f(Q)| < \varepsilon$$

pour tous les n à partir d'un numéro N ne dépendant que de ε et h.

Démonstration. Soit K un cercle de rayon $h/2$ de centre en P. Il est évident que ce cercle est contenu dans le cercle de centre en Q et de rayon $2h$ (fig. 69). De ce fait, en vertu du lemme 1,

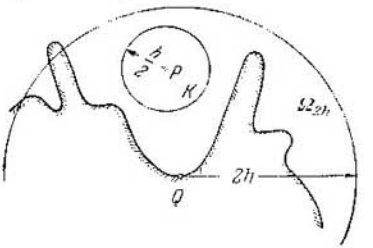

Fig. 69

lorsque $2h < h_0$, la valeur moyenne de $[u_n(x, y) - f(Q)]^2$ dans ce cercle

$$\frac{1}{\pi\left(\frac{h}{2}\right)^2}\iint_K [u_n(x, y) - f(Q)]^2\,dx\,dy \leqslant c_0\,[D_{G_{2h}}(u_n) + \alpha^2(2h)],$$

c_0 étant une constante absolue, $D_{G_{2h}}(u_n)$ l'intégrale de Dirichlet de u_n sur l'ensemble G_{2h} et $\alpha(h)$ le module de continuité de la fonction aux limites $f(s)$ (cf. proposition 3°).

D'après la propriété 2, on peut prendre $h_1 > 0$ et N_1 tels que, pour $n > N_1$, on a $c_0 D_{G_{2h_1}}(u_n) < \varepsilon^2/2$ (et donc $c_0 D_{G_{2h}}(u_n) < \varepsilon^2/2$ pour tous les $h < h_1$, $n > N_1$). Nous supposerons $h_1 < h_0/2$ si petit que $c_0\alpha^2(2h) < \varepsilon^2/2$ pour tous les $h < h_1$. De cette façon, pour $n > N_1$, $h < h_1$

$$\frac{4}{\pi h^2}\iint_K [u_n(x, y) - f(Q)]^2\,dx\,dy < \varepsilon^2. \qquad (1)$$

Par ailleurs, pour les numéros supérieurs à $2/h$, les u_n sont, par construction, harmoniques dans le cercle K, étant donné que tous les points de ce cercle sont distants de Γ de $h/2$ au moins.

En vertu de la conséquence 1 du théorème de la moyenne (§ 20), le carré $[u_n(P) - f(Q)]^2$ au centre du cercle K de la fonction harmonique $u_n(x, y) - f(Q)$ dans le cercle K n'est pas supérieur à la moyenne du carré de cette fonction dans le cercle K. On déduit de là et de l'inégalité (1)

$$|u_n(P) - f(Q)| < \varepsilon \text{ pour } n > \max(N_1, 2/h).$$

La propriété 3 est démontrée.

Nous pouvons à présent passer à l'étape troisième finale, qui est la réalisation du passage à la limite.

L'inégalité

$$\iint_G (u_h - u_l)^2 \, dx \, dy \leqslant L^2 (1/k + 1/l)$$

entraîne la convergence en moyenne de la suite $u_1, u_2, u_3, \ldots$ Dans le sous-domaine déduit de G en excluant la bande limite G_h, tous les éléments u_n de notre suite sont, pour $n > 1/h$, des fonctions harmoniques. Ceci étant, dans le domaine H_h déduit de G en lui enlevant une bande frontière deux fois plus large G_{2h}, la convergence de cette suite $\{u_k\}$ sera uniforme avec celle des dérivées premières $\frac{\partial u_k}{\partial x}$, $\frac{\partial u_k}{\partial y}$, et elle aura pour limite une fonction harmonique $u(x, y)$. Les dérivées $\frac{\partial u_k}{\partial x}$, $\frac{\partial u_k}{\partial y}$ convergent alors vers $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$. Aussi a-t-on

$$D_{H_h}(u) = \lim_{k \to \infty} D_{H_h}(u_k) \leqslant \lim_{k \to \infty} D_G(u_k) = d.$$

Comme h est arbitraire, la fonction $u(x, y)$ est définie et harmonique partout dans G et on a pour elle l'inégalité

$$D_G(u) = \sup_h D_{H_h}(u) \leqslant d.$$

Considérons à présent un point arbitraire Q_0 sur la frontière Γ de G et montrons que la fonction construite $u(x, y)$ est continue au point Q_0. Pour cela, fixons $\varepsilon > 0$ arbitraire et prenons $h_1 > 0$ tel que, d'après la propriété 3, pour tout point intérieur P dont la distance à la frontière est $h < h_1$, l'on ait $|u_n(P) - f(Q)| < \varepsilon/2$ pour tous les n au-delà d'un certain numéro dépendant de ε et h. Le point Q ici est un des points frontières les plus proches de P.

Si la distance de P à Q_0 est inférieure à h, il en est à plus forte raison de même de sa distance à la frontière. Par conséquent, $|u_n(P) - f(Q)| < \varepsilon/2$. Passant ici à la limite $n \to \infty$, on obtient $|u(P) - f(Q)| \leqslant \varepsilon/2$. La distance entre les points Q_0 et Q n'étant pas supérieure à $2h$, on a $|f(Q) - f(Q_0)| \leqslant \alpha(2h)$, et donc

$$|u(P) - f(Q_0)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \max_{h \leqslant h_1} \alpha(2h).$$

Réduisant s'il le faut h_1 de telle sorte que $\alpha(2h) < \varepsilon/2$ pour $h \leqslant h_1$, il vient pour tous les points $P \in G$ dont la distance à Q_0 est inférieure à h_1

$$|u(P) - f(Q_0)| < \varepsilon.$$

Nous avons montré l'existence dans G d'une fonction harmonique $u(x, y)$ prenant sur la frontière des valeurs données et ayant une intégrale de Dirichlet $D_G(u) \leqslant d$. Par ailleurs, par définition $D_G(u) \geqslant d$. L'égalité $D_G(u) = d$ est démontrée.

Nous avons ainsi démontré que le problème de Dirichlet est résoluble pour le domaine G et pour la fonction aux limites admissible $f(s)$ et établi le principe de Dirichlet.

A savoir, nous avons démontré que si le domaine vérifie la condition 2°, il existe alors une fonction régulière $u(x, y) \in \mathfrak{M}$ pour laquelle $D_G = d = \inf_{v \in \mathfrak{M}} D_G(v)$. Cette fonction $u(x, y)$ est unique et coïncide avec la solution du problème de Dirichlet.

§ 24. Problème d'Hilbert pour les équations de Cauchy-Riemann dans un cercle

Position du problème et exemples. Indice de la condition aux limites. Normalisation (régularisation) de la condition aux limites dans le problème d'Hilbert. Théorème d'existence de la solution dans le cas où l'indice de la condition aux limites est non négatif. Etude de la non-unicité lorsque l'indice des conditions aux limites est positif ou nul. Unicité et conditions de résolubilité lorsque l'indice est négatif. Problème avec une dérivée oblique et sa réduction au problème d'Hilbert. Problème de Neumann. Indice du problème et indice des conditions aux limites. Notion d'indice pour un système d'équations algébriques linéaires.

Nous avons étudié suffisamment en détail le problème de Dirichlet pour l'équation de Laplace en tant qu'exemple de problème modèle qui relève des équations du type elliptique. Nous allons envisager aujourd'hui le problème un peu plus compliqué qu'est le problème d'Hilbert pour les équations de Cauchy-Riemann.

Etudiant le problème d'Hilbert, nous nous bornerons au domaine simplement connexe le plus simple qu'est le cercle. Les faits majeurs que nous allons établir pour ce problème peuvent être aussi obtenus pour tout domaine simplement connexe à frontière suffisamment régulière. Qui plus est, ils peuvent être déduits des théorèmes démontrés pour le cercle à l'aide d'une transformation conforme. Mais nous ne pourrons pas nous arrêter dans ce cours à une telle transposition, ne disposant pas des théorèmes subtils sur les propriétés aux limites des transformations conformes, indispensables pour cette transposition.

Le problème d'Hilbert dans le cercle unité $x^2 + y^2 \leqslant 1$ *se pose ainsi. On demande de trouver la solution* $u(x, y)$, $v(x, y)$ *continue jusqu'à même la frontière* Γ $(x^2 + y^2 = 1)$ *des équations de Cauchy-Riemann*

$$u_x - v_y = 0,$$

$$u_y + v_x = 0,$$

qui vérifie sur la frontière la condition aux limites

$$a(s)\, u + b(s)\, v = f(s).$$

Les coefficients $a(s)$, $b(s)$ sont supposés être des fonctions suffisamment régulières de la longueur de l'arc s de la circonférence unité; la fonction $f(s)$ est aussi suffisamment régulière, $a^2(s) + b^2(s) > 0$.

Nous commencerons l'étude du problème d'Hilbert par deux exemples types.

Exemple 1. Soit $a(s) = 1$, $b(s) = 0$, $u|_\Gamma = f(s)$. Nous avons obtenu ici le problème de Dirichlet pour la fonction harmonique $u(x, y)$. Sa conjuguée harmonique $v(x, y) = c + v_0(x, y)$ est déterminée à une constante arbitraire près. Nous avons démontré au § 2 que $v(x, y)$ est continue jusqu'à la frontière si $f(s)$ est suffisamment régulière.

Exemple 2. Soit $a(s) = x(s)$, $b(s) = -y(s)$ $(x^2 + y^2 = 1)$,

$$(xu - yv)|_\Gamma = f(s).$$

Supposons que nous ayions pu trouver une solution $u(x, y) + iv(x, y)$ de ce problème, analytique dans le cercle unité et continue jusqu'à la frontière. On sait que $\oint (u + iv)(dx + i\,dy) = \oint (u\,dx - v\,dy) + i \oint (u\,dy + v\,dx) = 0$ le long de tout contour fermé décrit dans le cercle. La partie imaginaire de cette intégrale donne l'égalité

$$\oint u\,dy + v\,dx = 0.$$

En vertu de la continuité de $u(x, y)$, $v(x, y)$, on peut déformer le contour sans changer le résultat et le transformer en la circonférence unité. Sur cette circonférence $dy = x\,ds$, $dx = -y\,ds$. D'où

$$\oint (ux - vy)\,ds = \int_0^{2\pi} f(s)\,ds.$$

Le problème d'Hilbert étant résoluble dans cet exemple, l'intégrale du second membre est nulle. Le problème est donc résoluble non pour n'importe quels seconds membres $f(s)$.

Les exemples simples apportés montrent que le caractère du problème dépend essentiellement des coefficients $a(s)$, $b(s)$ de la condition aux limites. Nous verrons par la suite que la résolubilité ou la non-résolubilité du problème d'Hilbert, ainsi que les conditions d'unicité, dépendent d'un certain entier N pouvant être déterminé d'après la forme des fonctions $a(s)$, $b(s)$. Ce nombre est l'*indice de la condition aux limites*.

Supposons que s, la longueur de l'arc de la circonférence unité, varie de 0 à 2π lorsqu'on décrit la circonférence dans le sens inverse des aiguilles d'une horloge. Alors, le vecteur de coordonnées $a(s)$, $b(s)$ décrit une courbe dans le plan (a, b). *Le nombre de tours que décrit cette courbe autour de l'origine des coordonnées est précisément ce qu'on appelle l'indice.* De telles courbes avec différents indices sont représentées sur les fig. 70-74. La flèche indique le sens

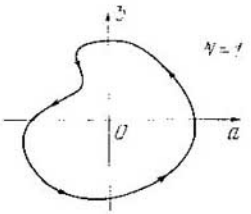

Fig. 70

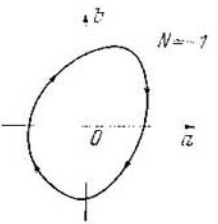

Fig. 71

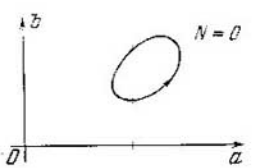

Fig. 72

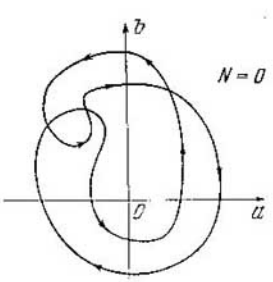

Fig. 73

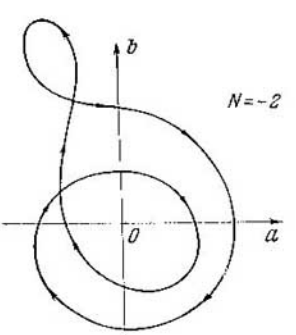

Fig. 74

de description de la courbe, s croissant. Dans les exemples envisagés 1 et 2, les valeurs de l'indice étaient respectivement égales à 0 et à -1.

Théorème. *Le problème d'Hilbert pour $N \geqslant 0$ a toujours une solution non unique. Cette solution dépend de $2N+1$ constantes. Pour $N < 0$, si le problème d'Hilbert est résoluble, la solution est unique. Pour la résolubilité, il faut et il suffit que le second membre $f(s)$ soit orthogonal à n'importe quelle fonction d'un certain système linéaire de fonctions, ce système ayant un nombre fini de dimensions. La dimension de ce système est $2|N|-1 = -(2N+1)$.*

Dans l'exemple étudié (exemple 2) de problème à indice $N=-1$, le second membre $f(s)$ doit être orthogonal seulement à un espace à une dimension. Cet espace est constitué par des constantes. On déduit précisément de là la condition $\int_0^{2\pi} f(s) \cdot 1 \, ds = 0$. Il résulte du théorème formulé que pour toute fonction suffisamment régulière $f(s)$ satisfaisant à cette égalité le problème d'Hilbert de cet exemple est univoquement résoluble.

La démonstration de ce théorème sera donnée un peu plus tard, et nous ferons maintenant plusieurs constructions préliminaires utiles.

Notons tout d'abord encore une fois que le problème d'Hilbert est équivalent au problème de la détermination d'une fonction analytique dans le cercle et continue jusqu'à la frontière $w = u(x, y) + iv(x, y)$, vérifiant la condition aux limites

$$a(s)\, u + b(s)\, v = f(s).$$

Dans le cas particulier où $b \equiv 0$ dans l'exemple 1, nous avons montré que pour une telle condition aux limites $\left(u|_\Gamma = \frac{f(s)}{a(s)} = f_1(s)\right)$ le problème s'étudie facilement. Nous montrerons plus bas que dans le cas général aussi le problème peut être en fait ramené à l'exemple particulier envisagé.

Pour cela, supposons d'abord un instant que $a(s)$ et $b(s)$ soient les valeurs aux limites des parties réelle et imaginaire d'une fonction analytique dans le cercle, non nulle dans ce cercle

$$c(x+iy) = a(x, y) + ib(x, y).$$

Alors la fonction analytique dans le cercle

$$\frac{w}{c} = \frac{u+iv}{a+ib} = \frac{au+bv}{a^2+b^2} + i\,\frac{av-bu}{a^2+b^2} = U + iV$$

a pour partie réelle $U = \frac{au+bv}{a^2+b^2}$, dont la valeur sur la frontière est connue : elle est égale à $\frac{f(s)}{a^2(s)+b^2(s)}$. Comme nous l'avons rappelé dans l'exemple 1 (la démonstration détaillée a été exposée

au § 2), les fonctions harmoniques $U(x, y)$ et $V(x, y)$ sont reconstituées d'après les valeurs de U sur la frontière, V étant déterminée à une constante additive près. Par là même se trouve déterminée $w(x+iy) = c(x+iy)[U(x, y) + iV(x, y)]$. Bien entendu, notre hypothèse que $a(s)$, $b(s)$ sont les valeurs aux limites des parties réelle et imaginaire d'une fonction analytique dans le cercle n'est pas en général remplie. Toutefois, il est clair que la condition aux limites

$$a(s)\,u + b(s)\,v = f(s)$$

est équivalente à n'importe quelle condition de la forme

$$\rho(s)\,a(s)\,u + \rho(s)\,b(s)\,v = \rho(s)\,f(s),$$

quelle que soit la fonction strictement positive $\rho(s)$.

Les notations

$$\alpha(s) = \rho(s)\,a(s),\quad \beta(s) = \rho(s)\,b(s)$$

permettent de la recopier sous la forme

$$\alpha(s)\,u + \beta(s)\,v = \rho(s)\,f(s).$$

Il est clair que l'indice du couple $(\alpha(s), \beta(s))$ est exactement égal à l'indice du couple initial, et nous essayerons de prendre le facteur $\rho(s)$ de sorte que $\alpha(s)$ et $\beta(s)$ soient les valeurs aux limites des parties réelle et imaginaire d'une fonction analytique dans le cercle $\alpha(x, y) + i\beta(x, y)$. Voyons si l'on peut prendre le facteur de telle sorte que $\alpha + i\beta$ n'ait pas de zéros dans le cercle. Nous chercherons d'emblée cette fonction sous la forme $\alpha(x, y) + i\beta(x, y) = e^{p(x,y)+iq(x,y)}$, où $p + iq$ est une fonction analytique dans le cercle unité. (Il est facile de voir que la représentation sous cette forme de la fonction $\alpha + i\beta$ équivaut à l'exigence que cette fonction n'ait pas de zéros, mais nous n'avons pas besoin de nous arrêter sur cette équivalence.) Il vient de l'égalité des modules dans la représentation de la fonction $\alpha + i\beta$

$$e^{p(x,\,y)}|_\Gamma = \rho(s)\sqrt{a^2(s) + b^2(s)}. \tag{1}$$

Par conséquent,

$$e^{iq(x,\,y)}|_\Gamma = \frac{a(s) + ib(s)}{\sqrt{a^2(s) + b^2(s)}}. \tag{2}$$

Le problème consiste donc à trouver des fonctions $\rho(s)$, $p(x, y)$ et $q(x, y)$ satisfaisant aux relations (1), (2). Nous chercherons d'abord $q(x, y)$, puis $p(x, y)$ en tant que sa conjuguée. Et enfin, $\rho(s)$ sera déterminée par l'égalité (1). Essayons donc de trouver $q(x, y)$. Il résulte de la définition de l'indice N du couple $(a(s), b(s))$ que lorsque le point décrit la circonférence unité dans le sens inverse des aiguilles d'une horloge, après un tour complet le vecteur

$\frac{a(s)+ib(s)}{\sqrt{a^2(s)+b^2(s)}}$ décrit la circonférence N fois. Par conséquent, $q(x, y)|_\Gamma$ (qui est simplement l'argument dudit vecteur) s'accroît de $2\pi N$. Par là, lorsque $N \neq 0$ la fonction $q(x, y)$ n'est pas uniforme même sur la frontière du cercle, et notre construction de la fonction $\alpha(x, y) + i\beta(x, y)$ n'est pas légitime.

Pour construire la fonction $\alpha(x, y) + i\beta(x, y)$, force sera de renoncer à l'exigence que cette fonction n'ait pas de zéros ni de pôles dans le cercle. Notons que la fonction analytique $(x + iy)^N$ a son argument qui croît aussi de $2\pi N$ lorsque $x + iy$ décrit la circonférence unité. Par conséquent, lorsque s varie de 0 à 2π, l'argument de la fonction

$$\frac{a(s)+ib(s)}{\sqrt{a^2(s)+b^2(s)}} \cdot \frac{1}{(x+iy)^N}\Big|_{x^2+y^2=1} = \frac{a(s)+ib(s)}{\sqrt{a^2+b^2}} \frac{1}{\cos Ns + i \sin Ns}$$

reprend sa valeur initiale. Par conséquent, cet argument est univoquement déterminé. Prenant ces valeurs de l'argument pour valeurs aux limites de $q(x, y)$, nous construirons dans le cercle la fonction analytique $p(x, y) + iq(x, y)$. La construction de la fonction analytique d'après les valeurs aux limites de sa partie imaginaire est entièrement analogue à la reconstitution de la fonction analytique d'après les valeurs aux limites de sa partie réelle, puisque $-i(p + iq) = q - ip$. Nous fixerons la constante arbitraire de la partie réelle p par un procédé quelconque bien déterminé. Ainsi donc, nous avons construit une fonction analytique dans le cercle $e^{p(x,y)+iq(x,y)}$, qui sera notée $\alpha_0(x, y) + i\beta_0(x, y)$. A la frontière du cercle

$$|\alpha_0(x, y) + i\beta_0(x, y)|_\Gamma = e^{p(x, y)+iq(x, y)}|_\Gamma = e^{p(x, y)}|_\Gamma \cdot \frac{a(s)+ib(s)}{\sqrt{a^2(s)+b^2(s)}} \cdot \frac{1}{(x+iy)^N}\Big|_\Gamma.$$

Par conséquent, la fonction

$$\alpha(x, y) + i\beta(x, y) = [\alpha_0(x, y) + i\beta_0(x, y)](x + iy)^N$$

est égale sur la frontière du cercle à $e^{p(x, y)}|_\Gamma \cdot \frac{a(s)+ib(s)}{\sqrt{a^2(s)+b^2(s)}}$. Le facteur $\rho(s) = \frac{e^{p(x, y)}|_\Gamma}{\sqrt{a^2(s)+b^2(s)}}$ est dit *facteur de régularisation*.

Si $a(s)$ et $b(s)$ sont suffisamment régulières, la fonction $\alpha_0(x, y) + i\beta_0(x, y)$ est une fonction deux fois continûment dérivable jusqu'à la frontière. (L'examen du procédé de construction indiqué au § 2 pour les fonctions $p(x, y) + iq(x, y)$ montre qu'il suffit pour cela que les fonctions $a(s)$ et $b(s)$ soient quatre fois continûment dérivables.)

Nous commençons la démonstration du théorème énoncé plus haut.

Soit $N \geqslant 0$. Alors, la fonction analytique construite $\alpha(x, y) + i\beta(x, y)$ a dans le cercle un seul zéro d'ordre N à l'origine des coordonnées. Construisons une fonction analytique dans le cercle et continue jusqu'à la frontière $U(x, y) + iV(x, y)$ d'après les valeurs aux limites de sa partie réelle :

$$U(\cos s, \sin s) = \frac{\rho(s) f(s)}{\alpha^2(s) + \beta^2(s)}.$$

Alors la fonction $u(x, y) + iv(x, y) = (\alpha + i\beta)(U + iV)$ est la fonction cherchée. En effet, elle est, par construction, analytique dans le cercle et continue jusqu'à la frontière. Par ailleurs, elle vérifie la condition aux limites. En effet,

$$\frac{\alpha u + \beta v}{\alpha^2 + \beta^2}\Big|_\Gamma = \operatorname{Re} \frac{u(x, y) + iv(x, y)}{\alpha(x, y) + i\beta(x, y)}\Big|_\Gamma = U(x, y)|_\Gamma = \frac{\rho(s) f(s)}{\alpha^2(s) + \beta^2(s)}.$$

Par conséquent, $\alpha u + \beta v|_\Gamma = \rho(s) f(s)$. L'existence de la solution pour $N \geqslant 0$ est établie.

Etudions à présent la question de son unicité (plus exactement, du degré de non-unicité). Il est clair que la solution du problème d'Hilbert (ainsi que la solution de tout problème linéaire) est déterminée à une solution arbitraire près du problème homogène. Ainsi, soit $u(x, y) + iv(x, y)$ la solution du problème homogène : $(au + bv)|_\Gamma = 0$, et donc $(\alpha u + \beta v)|_\Gamma = 0$. Aussi la fonction

$$U + iV = \frac{u + iv}{\alpha + i\beta} = \frac{\alpha u + \beta v}{\alpha^2 + \beta^2} + i\,\frac{\alpha v - \beta u}{\alpha^2 + \beta^2}$$

a-t-elle sa partie réelle U qui s'annule sur la frontière du cercle. Comme $u(x, y) + iv(x, y)$ est régulière dans le cercle et que $\alpha(x, y) + i\beta(x, y)$ a un zéro d'ordre N à l'origine des coordonnées, la fonction $U(x, y) + iV(x, y)$, a à l'origine un pôle d'ordre non supérieur à N.

Nous allons trouver maintenant la forme générale de la fonction analytique $U + iV$ ayant à l'origine un pôle d'ordre non supérieur à N et tel que $U(x, y) = 0$ sur la circonférence $x^2 + y^2 = 1$. Supposons que $U + iV$ ait au centre du cercle un pôle de partie principale

$$\sum_{k=-N}^{k=-1} (\xi_k + i\eta_k)(x + iy)^k.$$

Il n'est pas difficile de vérifier que le polynôme

$$\sum_{k=-N}^{k=-1} (\xi_k - i\eta_k)(x + iy)^{-k}$$

a sa partie réelle qui prend sur la frontière les mêmes valeurs que la partie réelle de la partie principale. Aussi la fonction

$$\Phi + i\Psi = \sum_{k=-N}^{k=-1} [(\xi_k + i\eta_k)(x + iy)^k - (\xi_k - i\eta_k)(x + iy)^{-k}]$$

a-t-elle sa partie réelle qui s'annule sur la frontière, et la même partie principale que $U + iV$. Par conséquent,

$$(U + iV) - (\Phi + i\Psi)$$

est bornée, et la partie réelle de la différence prend sur la frontière des valeurs nulles. D'où $U - \Phi = 0$, $V - \Psi = C^* = \text{const}$. Ainsi,

$$U + iV = iC^* + \sum_{k=-N}^{k=-1} [(\xi_k + i\eta_k)(x + iy)^k - (\xi_k - i\eta_k)(x + iy)^{-k}].$$

Par ailleurs, les constantes ξ_k, η_k peuvent être choisies arbitraires. La fonction $U + iV$ est alors analytique, sa partie réelle est nulle sur la circonférence et elle a un pôle d'ordre non supérieur à N au centre. Cette solution dépend de $2N + 1$ constantes

$$\xi_{-1}, \xi_{-2}, \ldots, \xi_{-N},$$
$$\eta_{-1}, \eta_{-2}, \ldots, \eta_{-N}, C^*.$$

Nous avons montré que pour $N \geqslant 0$ la solution du problème de Hilbert a pour arbitraire $2N + 1$ solutions linéairement indépendantes du problème homogène. (Pourquoi sont-elles linéairement indépendantes?)

Envisageons à présent le cas $N < 0$. Soit $u(x, y) + iv(x, y)$ la solution du problème d'Hilbert. La fonction $\alpha(x, y) + i\beta(x, y)$ construite ci-dessus ayant un pôle d'ordre $|N|$ à l'origine, la fonction

$$U(x, y) + iV(x, y) = \frac{u(x, y) + iv(x, y)}{\alpha(x, y) + i\beta(x, y)}$$

a à l'origine un zéro d'ordre non inférieur à $|N|$. Les valeurs aux limites de la partie réelle $U(x, y)$ sont égales à $\left.\frac{\alpha u + \beta v}{\alpha^2 + \beta^2}\right|_\Gamma = \frac{\rho(s) f(s)}{\alpha^2(s) + \beta^2(s)}$. Soient a_n et b_n les coefficients de Fourier de cette fonction. Nous avons montré auparavant, au § 7, que les coefficients de la série de Taylor de la fonction

$$U + iV = \omega_0 + \omega_1 z + \omega_2 z^2 + \ldots \quad (z = x + iy)$$

sont déterminés univoquement par les formules

$$\omega_0 = \frac{a_0}{2} + iC,$$
$$\omega_n = a_n - ib_n \quad (n > 0) \tag{3}$$

à une constante près C. Les $|N|$ premiers coefficients étant nuls, c'est dire que tous les coefficients de la série de Taylor de $U + iV$ (et donc la fonction elle-même) sont univoquement déterminés d'après la condition aux limites. Par conséquent, $u + iv =$

$= (U + iV)(\alpha + i\beta)$ est univoquement déterminée. Ainsi, nous avons démontré que, pour $N < 0$, le problème n'a pas plus d'une solution, et s'il est résoluble, on a

$$a_0 = a_1 = a_2 = \ldots = a_{|N|-1} = b_1 = b_2 = \ldots = b_{|N|-1} = 0.$$

Par ailleurs, si ces conditions sont remplies, la fonction construite $U + iV$ a à l'origine un zéro d'ordre non inférieur à $|N|$ (la constante C dans (3) a été prise égale à 0). Alors $u + iv = (\alpha + i\beta) \times (U + iV)$ est analytique dans le cercle et, par construction, U satisfait aux conditions aux limites.

Ecrivant les expressions explicites des coefficients de Fourier, on obtient les conditions nécessaires et suffisantes de résolubilité du problème d'Hilbert :

$$\int_0^{2\pi} \frac{f(s)}{\rho(s)\,[a^2(s) + b^2(s)]} \cos ns\, ds = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots, |N|-1),$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{f(s)}{\rho(s)\,[a^2(s) + b^2(s)]} \sin ns\, ds = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots, |N|-1).$$

Posant

$$\varphi_k(s) = \begin{cases} \dfrac{\sin ks}{\rho(s)\,[a^2(s) + b^2(s)]} & (k = 1, 2, \ldots, |N|-1), \\ \dfrac{\cos(ks - |N|s)}{\rho(s)\,[a^2(s) + b^2(s)]} & (k = |N|, |N|+1, \ldots, 2|N|-1), \end{cases}$$

et recopiant ces égalités sous la forme

$$\int_0^{2\pi} f(s)\,\varphi_k(s)\, ds = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, 2|N|-1,$$

on peut dire que pour que le problème d'Hilbert soit résoluble pour $N < 0$, il faut et il suffit que le second membre $f(s)$ soit orthogonal à l'espace à $2|N| - 1$ dimensions des fonctions qui sont des combinaisons linéaires de $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{2|N|-1}$. (Question : pourquoi les fonctions φ sont linéairement indépendantes entre elles ?) Le théorème est entièrement démontré.

Pour conclure, nous allons examiner un problème pour l'équation de Laplace, intimement lié au problème d'Hilbert.

Problème avec dérivée oblique. *Trouver la solution $\varphi(x, y)$ de l'équation de Laplace $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0$, continue jusqu'à la frontière en même temps que les dérivées premières et vérifiant la condition aux limites $\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\big|_\Gamma = f(s)$.* Ici $\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}$ désigne la dérivée dans une certaine direction ν. Si l'on désigne les cosinus directeurs de

cette direction par $a(s)$, $-b(s)$, la condition aux limites se recopie comme suit :

$$a(s)\frac{\partial \varphi}{\partial x} - b(s)\frac{\partial \varphi}{\partial y} = f(s).$$

Posons $u = \varphi_x$, $v = -\varphi_y$. Il est évident que $u_y = -v_x$. En outre, $u_x - v_y = (\varphi_x)_x - (-\varphi_y)_y = \varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0$. On voit que $u(x, y)$, $v(x, y)$ sont liées par les conditions de Cauchy-Riemann. La fonction $u + iv$ est analytique. La condition aux limites $a\varphi_x - b\varphi_y = f$ se recopie pour cette fonction analytique comme suit :

$$au + bv = f.$$

De cette façon, à toute solution du problème avec dérivée oblique correspond une solution du problème d'Hilbert donnée par les formules $u = \varphi_x$, $v = -\varphi_y$. Inversement, d'après la solution du problème d'Hilbert, on peut déterminer univoquement, à une constante additive arbitraire près, la solution φ du problème à dérivée oblique.

Ainsi donc, nous avons démontré ce qui suit dans le cas du cercle unité : si l'indice de la condition aux limites $N \geqslant 0$, en vertu du théorème démontré, le problème d'Hilbert, et donc aussi le problème à dérivée oblique, est toujours résoluble. Alors la fonction φ admet pour arbitraire $2N + 2$ solutions linéairement indépendantes du problème homogène (une constante arbitraire apparaît quand on passe de u, v à φ).

Mais si $N < 0$, pour que le problème soit résoluble, il faut et il suffit que soient observées $2|N| - 1$ solutions, et la solution φ est déterminée à une constante arbitraire près.

A titre d'exemple, on peut envisager le problème de Neumann, cas particulier du problème à dérivée oblique où la direction ν est celle de la normale. On a alors pour le cercle $a(s) = \cos s$, $b(s) = -\sin s$, et donc l'indice vaut -1. Ainsi qu'il résulte du théorème (et de l'exemple 2 examiné auparavant), la condition de résolubilité s'écrit sous la forme $\int_0^{2\pi} f(s)\,ds = 0$. La solution du problème de Neumann est déterminée à une constante additive arbitraire près.

Sur ce, nous avons terminé l'étude du problème d'Hilbert. Nous ne ferons plus qu'une remarque terminologique.

Actuellement, on convient d'appeler indice d'un problème aux limites la différence entre le nombre de solutions du problème homogène et le nombre de conditions d'orthogonalité vérifiées par le second membre lorsque le problème est résoluble. Dans le problème d'Hilbert cette différence vaut $2N + 1$ (elle vaut $2N + 2$ dans le problème à dérivée oblique), que le nombre N soit positif ou négatif. C'est précisément pour cette raison que nous avons appelé N

indice de la condition aux limites, pour ne pas le confondre avec l'indice $2N + 1$ du problème.

Exercice. Montrez que pour que le système

$$\sum_{k=1}^{K} a_{ik}x_k = f_i, \quad i = 1, 2, \ldots, I, \tag{4}$$

soit résoluble, il faut et il suffit que les fonctions f_i soient orthogonales $\left(\sum_{i=1}^{i=I} z_i f_i = 0\right)$ à toute solution du système homogène conjugué

$$\sum_{i=1}^{I} a_{ik}z_i = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, K. \tag{5}$$

La différence de deux solutions quelconques du système (4) satisfait aux équations homogènes

$$\sum_{k=1}^{K} a_{ik}y_k = 0. \tag{6}$$

La différence des dimensions des espaces des solutions des systèmes (6), (5) est appelée indice du système (4). Démontrez que cet indice vaut $K - I$.

§ 25. Problèmes incorrects

Examen de la possibilité de résoudre des problèmes incorrects sur l'exemple du problème de Cauchy pour les solutions périodiques de l'équation de Laplace. Développement de ces solutions en séries de Fourier. Fonctions logarithmiquement convexes et obtention au moyen de ces fonctions d'inégalités pour les fonctions harmoniques. Correction conventionnelle dans la classe des solutions bornées. Régularisation des approximations pour les données initiales et recherche de la solution bornée par une constante connue pour un problème incorrect.

Pour conclure notre aperçu de la théorie des fonctions elliptiques au moyen de problèmes typiques simples, nous allons nous arrêter encore sur l'étude d'un problème « incorrect ». En dépit du postulat d'Hadamard selon lequel les processus physiques réels sont décrits, en général, par des problèmes corrects, il existe un grand nombre de questions scientifiques qui se ramènent à des problèmes incorrects. D'ordinaire ces questions sont liées à la tentative de reconstituer le cours d'un processus quelconque, décrit par un problème correct, d'après les résultats de mesures devant déterminer la solution univoquement, mais le procédé mis en œuvre est incorrect. Ainsi, par exemple, le potentiel du champ de gravitation peut être obtenu, d'après une distribution donnée des masses, en résolvant un certain problème correct pour l'équation de Poisson. Or, si l'on cherche à déterminer ce champ d'après les résultats de mesures faites, par exemple, à la surface de la Terre, nous sommes conduits à un problème de Cauchy incorrect traité dans l'exemple d'Hadamard. Néanmoins, on résout souvent le problème de la reconstitution du

champ de gravitation d'après les données de Cauchy, par exemple à des fins d'exploration gravimétrique.

Ce paragraphe sera consacré à la résolution du problème de Cauchy pour l'équation de Laplace. Il serait plus exact de dire que nous résolvons un problème aux limites mixte, étant donné que $u(x, y)$ sera supposée périodique en x de période 2π. Qui plus est, nous nous bornerons à l'hypothèse que $u(x, y) = -u(-x, y)$. Supposons que la solution soit définie et continue en même temps que les dérivées premières dans la bande $0 \leqslant y \leqslant 1$. Pour la simplicité, nous supposerons encore que $u(x, 0) = 0$ et nous poserons

$$\left.\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}\right|_{y=0} = \varphi(x).$$

Supposant qu'une telle solution existe, écrivons son développement en série de Fourier par rapport à la variable x. En vertu des conditions imposées (on a exigé que la fonction soit impaire et régulière), cette série a la forme

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(y) \sin nx$$

et converge pour tout y $(0 \leqslant y \leqslant 1)$ uniformément par rapport à x.

Pour calculer les coefficients de Fourier $b_n(y)$, notons que $b_n(y) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(x, y) \sin nx\, dx$. Puis multiplions terme à terme l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

par $\sin nx$ et intégrons l'égalité obtenue de 0 à 2π :

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} \sin nx\, dx + \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} \sin nx\, dx = 0.$$

Cette égalité est légitime pour les points intérieurs de la bande $0 < y < 1$. Pour ces points la fonction harmonique $u(x, y)$ est, on le sait, indéfiniment dérivable. De ce fait, dans la seconde intégrale on peut intervertir les opérations d'intégration et de dérivation. Quant à la première intégrale, nous la transformerons en intégrant deux fois par parties et nous nous servirons de la périodicité de $u(x, y)$. On obtient en fin de compte la relation

$$-n^2 \int_0^{2\pi} u(x, y) \sin nx\, dx + \frac{d^2}{dy^2} \int_0^{2\pi} u(x, y) \sin nx\, dx = 0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$-n^2 b_n(y) + \frac{d^2}{dy^2} b_n(y) = 0.$$

La solution générale de cette équation a la forme suivante :

$$b_n(y) = A_n \operatorname{sh} ny + C_n \operatorname{ch} ny.$$

Il résulte de la représentation intégrale des fonctions $b_n(y)$ qu'elles sont continues pour $0 \leqslant y \leqslant 1$. Par conséquent, il vient finalement de la condition $u(x, 0) = 0$ (et donc de $b_n(0) = 0$),

$$b_n(y) = A_n \operatorname{sh} ny.$$

Ainsi, nous avons déduit que la fonction $u(x, y)$ vérifiant nos hypothèses admet la représentation

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sh} ny \sin nx. \tag{1}$$

Notamment, $u(x, 1) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sh} n \sin nx$, ce qui entraîne

$$|A_n \operatorname{sh} n| = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(x, 1) \sin nx \, dx \leqslant 2 \max |u(x, 1)| = K.$$

Par conséquent, $|A_n| \leqslant \frac{K}{\operatorname{sh} n}$.

Il résulte de cette évaluation que la série (1) peut être dérivée terme à terme autant de fois qu'on le voudra pour $0 \leqslant y < 1$. Notamment,

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nA_n \sin nx,$$

c'est-à-dire que $A_n = \frac{a_n}{n}$, les a_n étant les coefficients de Fourier de $\varphi(x)$.

Nous avons par là même obtenu (sous les hypothèses imposées plus haut) la solution du problème de Cauchy pour l'équation de Laplace avec les conditions :

$$u(x, 0) = 0,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx.$$

Nous avons montré que si la solution existe dans la bande $0 \leqslant y \leqslant 1$, alors

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \operatorname{sh} ny \sin nx \tag{2}$$

et

$$|a_n| < \text{const}\,\frac{n}{\operatorname{sh} n}. \tag{3}$$

Et inversement, si les coefficients de Fourier a_n vérifient l'inégalité (3), la série (2) fournit la solution du problème de Cauchy. En effet, il est facile de vérifier que chaque terme de la série est une fonction harmonique et, en vertu de l'inégalité (3), la série peut être dérivée autant de fois qu'on le voudra pour $|y| < 1$. Par conséquent, la fonction $u(x, y)$ est aussi harmonique et vérifie les conditions initiales.

L'exemple d'Hadamard montre que le problème de la reconstitution de $u(x, y)$ d'après $u(x, 0)$, $\left.\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right|_{y=0}$ n'est pas correct. Toutefois, si l'on sait que la solution existe et qu'elle vérifie certaines inégalités, il peut être approximativement résolu, même si l'on se sert de données initiales non tout à fait exactes.

Nous allons faire le récit du problème de la reconstitution de

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \operatorname{sh} ny \cdot \sin nx$$

d'après les valeurs approchées

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx.$$

Notre récit sera basé sur un article de M. Lavrentiev publié en 1956 dans « Izvestia Akad. Naouk ». Le problème qu'on va résoudre est incorrect. Toutefois, si l'on suppose que l'on ait à reconstituer une solution dont on sait que

$$\int_0^{\pi} u^2(x, y)\, dx < M^2 \text{ pour tous les } 0 \leqslant y \leqslant 1,$$

l'incorrection disparaît en vertu du théorème suivant.

Théorème. *Si $u(x, y)$ est une fonction harmonique continue pour $0 \leqslant y \leqslant 1$, qui vérifie nos conditions de périodicité et de régularité: $u(x, 0) = 0$,*

$$\int_0^{\pi} u^2(x, 1)\, dx \leqslant M^2, \quad \int_0^{\pi} \varphi^2(x)\, dx \leqslant m^2$$

$$(\varphi(x) = u_y(x, 0)),$$

on a alors

$$\int_0^{\pi} u^2(x, y)\, dx \leqslant y^2 m^{2(1-y)} M^{2y}.$$

Nous appellerons la fonction régulière positive $f(t) > 0$ logarithmiquement convexe si $\frac{d^2}{dt^2} \ln f(t) \geqslant 0$. En vertu de l'égalité

$$\frac{d^2}{dt^2} \ln f(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{f}\frac{df}{dt}\right) = \frac{f''f - f'^2}{f^2} \geqslant 0,$$

pour qu'il y ait convexité logarithmique, il faut et il suffit que soient observées les inégalités $f > 0$, $f''f - f'^2 \geqslant 0$, ce qui équivaut en retour à la non-négativité de la forme

$$f''\xi^2 + 2f'\xi\eta + f\eta^2 \geqslant 0$$

ξ, η étant quelconques.

Lemme 1. *La somme de fonctions logarithmiquement convexes est logarithmiquement convexe.*

La démonstration de ce lemme résulte de l'inégalité

$$(f_1 + f_2)''\xi^2 + 2(f_1 + f_2)'\xi\eta + (f_1 + f_2)\eta^2 \geqslant 0,$$

vérifiée quels que soient ξ, η, pourvu qu'on ait pour ces ξ, η les inégalités

$$f_1''\xi^2 + 2f_1'\xi\eta + f_1\eta^2 \geqslant 0,$$
$$f_2''\xi^2 + 2f_2'\xi\eta + f_2\eta^2 \geqslant 0,$$

qui signifient que f_1, f_2 sont logarithmiquement convexes. Il est évident que le fait établi est vrai pour un nombre fini quelconque de termes.

Lemme 2. *La fonction* $f(t) = \frac{\operatorname{sh}^2 at}{t^2}$ *est logarithmiquement convexe pour tout* a.

En effet,

$$\frac{d^2}{dt^2} \ln f(t) = \frac{2}{t^2} \cdot \frac{\operatorname{sh}^2 at - a^2t^2}{\operatorname{sh}^2 at} \geqslant 0.$$

Lemme 3. $I_N(y) = \sum_{k=1}^{N} \frac{a_k^2 \operatorname{sh}^2 ky}{k^2y^2}$ *est une fonction logarithmiquement convexe.* La démonstration résulte des lemmes 1, 2.

La convexité logarithmique entraîne les inégalités

$$\ln I_N(y) \leqslant y \ln I_N(1) + (1-y) \ln I_N(0), \quad 0 \leqslant y \leqslant 1,$$
$$I_N(y) \leqslant [I_N(1)]^y [I_N(0)]^{1-y}.$$

Il est évident que si l'on pose

$$u_N(x, y) = \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{n} \operatorname{sh} ny \sin nx,$$

$$\varphi_N(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n \sin nx,$$

on a alors

$$I_N(y) - \frac{2}{\pi y^2}\int_0^\pi u_N^2(x, y)\,dx,$$

$$I_N(1) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi u_N^2(x, 1)\,dx,$$

$$I_N(0) = \sum_{n=1}^{N} a_n^2 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \varphi_N^2(x)\,dx.$$

Ceci permet de recopier l'inégalité démontrée comme suit :

$$\frac{1}{y^2}\int_0^\pi u_N^2(x, y)\,dx \leqslant \left[\int_0^\pi u_N^2(x, 1)\,dx\right]^y \left[\int_0^\pi \varphi_N^2(x)\,dx\right]^{1-y}.$$

Dans nos hypothèses $u_N(x, y)$. $\varphi_N(x)$ convergent uniformément ($|y| \leqslant 1$) vers $u(x, y)$ et $\varphi(x)$ respectivement. Il résulte de cette convergence uniforme que

$$\int_0^\pi u^2(x, y)\,dx \leqslant y^2\left[\int_0^\pi u^2(x, 1)\,dx\right]^y \left[\int_0^\pi \varphi^2(x)\,dx\right]^{1-y}.$$

La démonstration du théorème est achevée.

Soit à présent $\{u^{(k)}(x, y)\}$ une suite de fonctions harmoniques

$$u^{(k)}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^{(k)}}{n} \operatorname{sh} ny \sin nx,$$

bornées par une même constante pour $|y| \leqslant 1$. On a alors pour n'importe laquelle de ces fonctions

$$\int_0^\pi [u^{(k)}(x, 1)]^2\,dx \leqslant M^2,$$

$$u^{(k)}(x, 0) = 0, \qquad \left.\frac{\partial u^{(k)}(x, y)}{\partial y}\right|_{y=0} = \varphi^{(k)}(x).$$

Soit $u(x, y)$ une certaine fonction harmonique de même forme :

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \operatorname{sh} ny \cdot \sin nx,$$

$$u(x, 0) = 0, \quad \left.\frac{\partial u(x, y)}{dy}\right|_{y=0} = \varphi(x). \quad \int_0^\pi u^2(x, 1)\,dx \leqslant M^2$$

et supposons connu que

$$\int_0^{\pi} [\varphi^{(h)}(x) - \varphi(x)]^2 \, dx = \varepsilon_h^2 \xrightarrow[h \to \infty]{} 0.$$

Alors $u^{(h)}(x, y)$ *converge vers* $u(x, y)$ *uniformément en même temps que toutes ses dérivées jusqu'à un ordre fixe quelconque dans n'importe quelle bande* $|y| \leqslant Y < 1$.

Démonstration. Primo, notons que

$$\int_0^{\pi} [u^{(h)}(x, 1) - u(x, 1)]^2 \, dx \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^{2\pi} [u^{(h)}(x, 1)]^2 \, dx + 2 \left| \int_0^{2\pi} u^{(h)}(x, 1) \, u(x, 1) \, dx \right| + \int_0^{\pi} u^2(x, 1) \, dx \leqslant$$

$$\leqslant M^2 + 2\sqrt{M^2}\sqrt{M^2} + M^2 = 4M^2.$$

Puis, en vertu du théorème précédent (en remplaçant M^2 par $4M^2$),

$$\int_0^{\pi} |u^{(h)}(x, y) - u(x, y)|^2 \, dx \leqslant y^2 (2M)^{2y} \varepsilon_h^{2(1-y)} \leqslant y^2 \cdot 4M^2 \cdot \varepsilon_h^{2(1-Y)}.$$

Intégrons cette inégalité sur y de $-Y$ à Y*) :

$$\int_{-Y}^{Y} \int_0^{\pi} |u^{(h)}(x, y) - u(x, y)|^2 \, dx \, dy \leqslant \frac{2Y^3}{3} \cdot 4M^2 \varepsilon_h^{2(1-Y)}.$$

On voit que les $u^{(h)}(x, y)$ convergent en moyenne vers $u(x, y)$ dans le rectangle $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $|y| < Y$. La fonction $u(x, y)$ étant périodique en x et impaire, on a convergence en moyenne pour toute partie finie de la bande $|y| < Y$. On sait que pour les fonctions harmoniques la convergence en moyenne entraîne la convergence uniforme dans tout sous-domaine intérieur. Cette convergence est uniforme non seulement pour les $u^{(h)}(x, y)$ elles-mêmes, mais aussi pour leurs dérivées de n'importe quel ordre fixe.

L'ensemble des solutions bornées de notre problème dépend continûment des données initiales. On dit qu'il y a ici correction conventionnelle, c'est-à-dire dépendance continue, si toutes les fonctions considérées sont bornées. C'est précisément cette correction conventionnelle qui nous permet d'aborder le problème posé.

Nous allons nous arrêter à présent au calcul approché de $u(x, y)$ d'après les valeurs approchées $\psi_N(x)$ de $\varphi(x)$. Sans nuire à la généralité, on peut supposer que $\psi_N(x)$ est un polynôme trigono-

*) Il est évident que, bien que nous ne nous soyions pas arrêtés sur ce point, $u(x, y) = -u(x, -y)$; $u^{(h)}(x, y) = -u^{(h)}(x, -y)$.

métrique

$$\psi_N(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n^{(N)} \sin nx.$$

Soit

$$\int_0^{\pi} [\psi_N(x) - \varphi(x)]^2 \, dx = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{N} (a_n^{(N)} - a_n)^2 + \frac{\pi}{2} \sum_{N+1}^{\infty} a_n^2 \leqslant \varepsilon_N.$$

En outre, supposons que

$$\int_0^{\pi} u^2(x, 1) \, dx = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{n^2} \operatorname{sh}^2 n \leqslant M^2.$$

Les fonctions harmoniques construites d'après les valeurs initiales $u(x, 0)$ et d'après les valeurs $\psi_N(x)$ pour les valeurs initiales des dérivées par rapport à y

$$\tilde{u}_N(x, y) = \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n^{(N)}}{n} \operatorname{sh} ny \cdot \sin nx,$$

ne doivent pas être forcément uniformément bornées pour $|y| \leqslant 1$, de sorte qu'elles peuvent ne pas former une suite convergente.

Nous commencerons par « régulariser » les valeurs approchées $\psi_N(x)$ pour les données initiales. Posons

$$\bar{\psi}_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \bar{a}_n^{(N)} \sin nx,$$

les $\bar{a}_n^{(N)}$ étant choisis tels qu'ils vérifient l'inégalité

$$\frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{N} \frac{[\bar{a}_n^{(N)}]^2}{n^2} \operatorname{sh}^2 n \leqslant M^2$$

et qu'ils minimisent, sous cette condition, l'expression

$$\frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{N} (a_n^{(N)} - \bar{a}_n^{(N)})^2.$$

L'existence de tels $\bar{a}_n^{(N)}$ ne suscite pas de doute, puisqu'il s'agit du minimum d'une fonction continue de N variables dans un domaine fini de l'espace à N dimensions.

Si nous avions posé $\bar{a}_n^{(N)} = a_n$ $(n = 1, 2, \ldots, N)$, l'inégalité

$$\frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{N} \frac{[\bar{a}_n^{(N)}]^2}{n^2} \operatorname{sh}^2 n \leqslant M^2$$

aurait été observée et, en outre, nous aurions eu

$$\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{N}[a_n^{(N)}-\overline{a}_n^{(N)}]^2=\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{N}[a_n^{(N)}-a_n]^2\leqslant\varepsilon_N$$

(mais en fait on ne saurait procéder ainsi, étant donné que les a_n sont inconnus). Il en résulte que pour les $\overline{a}_n^{(N)}$ minimisant l'expression $\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{N}[a_n^{(N)}-\overline{a}_n^{(N)}]^2$, ce minimum n'est pas supérieur à ε_N, puisqu'on a dans le domaine admissible un point où la valeur de l'expression à minimiser n'est pas supérieure à ε_N. Nous savons déjà maintenant que

a) $\frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{N}[a_n^{(N)}-\overline{a}_n^{(N)}]^2\leqslant\varepsilon_N$,

b) $\frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{N}[a_n^{(N)}-a_n]^2\leqslant\varepsilon_N$,

c) $\frac{\pi}{2}\sum_{N+1}^{\infty}a_n^2\leqslant\varepsilon_N$.

On déduit des inégalités a), b) à l'aide de l'inégalité élémentaire $(b-a)^2\leqslant 2(b^2+a^2)$ que

$$\frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{N}[\overline{a}_n^{(N)}-a_n]^2\leqslant 4\varepsilon_N.$$

Réunissons le résultat obtenu à c):

$$\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{N}[\overline{a}_n^{(N)}-a_n]^2+\frac{\pi}{2}\sum_{N+1}^{\infty}a_n^2\leqslant 5\varepsilon_N,$$

$$\int_0^{\pi}[\overline{\psi}_N(x)-\varphi(x)]^2\,dx\leqslant 5\varepsilon_N.$$

En outre, par construction,

$$\int_0^1\overline{u}_N^2(x,1)\,dx\leqslant M^2.$$

Nous avons posé ici

$$\overline{u}_N(x, y) = \sum_{n=1}^{N} \frac{\overline{a}_n^{(N)}}{n} \operatorname{sh} ny \cdot \sin nx,$$

$$\int_0^1 \overline{u}_N^2(x, 1)\, dx = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{N} \frac{[\overline{a}_n^{(N)}]^2}{n^2} \operatorname{sh}^2 n.$$

D'après ce que nous avons démontré auparavant, les fonctions harmoniques $\overline{u}_N(x, y)$ convergeront pour $|y| < 1$ vers $u(x, y)$ si $N \to \infty$, $\varepsilon_N \to 0$.

Pour conclure, nous allons décrire succinctement comment on peut trouver les $\overline{a}_n^{(N)}$. Nous allons voir pour commencer lequel des deux cas

I) $\dfrac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{N} \dfrac{[a_n^{(N)}]^2}{n^2} \operatorname{sh}^2 n \leqslant M^2$,

II) $\dfrac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{N} \dfrac{[a_n^{(N)}]^2}{n^2} \operatorname{sh}^2 n > M^2$

est vérifié.

Dans le cas I) il suffit de poser

$$\overline{a}_n^{(N)} = a_n^{(N)}.$$

Il vient alors

$$\frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{N} [a_n^{(N)} - \overline{a}_n^{(N)}]^2 = 0,$$

et cette expression ne saurait prendre de valeurs moindres.

Dans le cas II), il est clair que le minimum de

$$\frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{N} [a_n^{(N)} - \overline{a}_n^{(N)}]^2$$

est atteint lorsque les $\overline{a}_n^{(N)}$ se trouvent sur la surface de l'ellipsoïde à N dimensions

$$\frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{N} \frac{[\overline{a}_n^{(N)}]^2}{n^2} \operatorname{sh}^2 n = M^2.$$

Pour déterminer l'extremum lié, servons-nous du multiplicateur de Lagrange λ_N et, ayant formé l'expression

$$\sum_{n=1}^{N} \left\{ [a_n^{(N)} - \overline{a}_n^{(N)}]^2 + \lambda_N \frac{\operatorname{sh}^2 n}{n^2} [\overline{a}_n^{(N)}]^2 \right\},$$

annulons sa dérivée par rapport à $\bar{a}_n^{(N)}$:

$$2\left[a_n^{(N)} - \bar{a}_n^{(N)} + \lambda_N \frac{\operatorname{sh}^2 n}{n^2}\,\bar{a}_n^{(N)}\right] = 0.$$

D'où

$$\bar{a}_n^{(N)} = \frac{a_n^{(N)}}{1 + \lambda_N \dfrac{\operatorname{sh}^2 n}{n^2}}.$$

Le paramètre λ_N doit être trouvé en tant que solution de l'équation

$$\frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{N} \frac{[\bar{a}_n^{(N)}]^2}{n^2} \operatorname{sh}^2 n = M^2.$$

Il est clair qu'il existe une solution positive et une seule, étant donné que le premier membre est une fonction monotone décroissante de λ_N et qu'il varie de $\frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{N} \frac{[a_n^{(N)}]^2}{n^2} \operatorname{sh}^2 n > M^2$ à zéro lorsque λ_N varie de zéro à plus l'infini.

Le minimum cherché est atteint pour la racine positive.

Ceci résulte du fait que les seconds membres des égalités

$$\sum_{n=1}^{N} [\bar{a}_n^{(N)} - a_n^{(N)}]^2 = \sum_{n=1}^{N} \frac{\lambda_N^2}{\left(1 + \lambda_N \dfrac{\operatorname{sh}^2 n}{n^2}\right)^2} [a_n^{(N)}]^2 \frac{\operatorname{sh}^4 n}{n^4},$$

$$\frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{N} \frac{[\bar{a}_n^{(N)}]^2}{n^2} \operatorname{sh}^2 n = M^2 = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\left(1 + \lambda_N \dfrac{\operatorname{sh}^2 n}{n^2}\right)^2} \cdot \frac{[a_n^{(N)}]^2}{n^2} \operatorname{sh}^2 n$$

décroissent si l'on change de signe lorsque λ_N est négatif.

Nous avons montré qu'on peut en principe résoudre un problème incorrect, sachant que la solution qui nous intéresse existe effectivement et appartient à un certain ensemble de solutions pour lequel la « correction conventionnelle » est vérifiée.

Nous ne ferons pas l'exposé du processus de résolution de problèmes incorrects. Indiquons seulement que, d'ordinaire, ce processus consiste à remplacer le problème initial par un problème voisin correct. La solution de ce problème voisin (régularisé) diffère ordinairement peu de la solution cherchée appartenant à une certaine classe de « correction conventionnelle ».

CHAPITRE IV

TRANSFORMATION DE LAPLACE ET MÉTHODE DE FOURIER POUR LES SYSTÈMES HYPERBOLIQUES

§ 26. Système d'équations différentielles

Etude des formules pour la résolution des systèmes d'équations différentielles à coefficients constants à l'aide de considérations qui serviront pour légitimer la méthode de Fourier. Intégrale de Duhamel et transformation de Laplace. Caractéristique amplitude-fréquence. Formulation du théorème d'inversion de la transformation de Laplace et son application à la représentation de la solution sous la forme d'une somme d'exponentielles.

Nous abordons l'étude de la théorie de la méthode de Fourier sur un exemple de son application aux problèmes mixtes pour les systèmes hyperboliques à deux variables indépendantes x, t. Cette méthode est la transposition à un cas plus compliqué du procédé bien connu d'Euler d'intégration des équations différentielles. Le procédé d'Euler consiste à trouver pour le système $\frac{du}{dt} - Au = 0$ des solutions particulières $u = e^{\lambda_i t} v_i$ et à construire une solution arbitraire à l'aide de ces solutions particulières. Nous omettrons ici les modifications connues de ce procédé qui surviennent lorsque l'équation caractéristique $\det \| A - \lambda E \| = 0$ a des racines multiples.

Nous avons déjà pris connaissance de la méthode de Fourier pour les équations aux dérivées partielles dans les préliminaires de ce livre (chap. I, § 7). Nous y avons examiné à titre d'exemples le problème de Dirichlet pour l'équation de Laplace et le système hyperbolique le plus simple que constituent les équations de l'acoustique. Nous allons construire dans ce chapitre la théorie de la méthode de Fourier pour les systèmes hyperboliques à deux variables indépendantes x, t. Le cas de deux équations sera examiné en détail. Dans le cas des systèmes d'ordres plus élevés le schéma de la théorie est le même, mais les résultats peuvent quelque peu différer. Le fait est que ce n'est pas toujours, tant s'en faut, qu'une solution quelconque peut être représentée par la somme de solutions particulières du type ondes stationnaires. Nous n'étudierons dans ce chapitre qu'un seul exemple de non-complétude du système d'ondes stationnaires, alors qu'on n'a pas de fonctions propres, mais je pense que la théorie exposée permettra de voir clairement s'il y a ou non complétude.

Nous allons construire la théorie de la méthode de Fourier en nous basant sur la technique de la transformation de Laplace. Pour la clarté des conclusions, nous décrirons d'abord l'idée de la théorie pour les équations différentielles.

Avant de donner la définition formelle, nous allons examiner les considérations qui dégagent le sens de la procédure au moyen de laquelle la transformation de Laplace est définie.

Soit $w(t)$ la solution du système

$$\frac{dw}{dt} - Aw = f(t)$$

à matrice A indépendante du temps t, vérifiant les conditions initiales nulles $w(0) = 0$. Avec ce système, nous envisagerons concurremment la famille de solutions $u(t, t_0)$, dépendant du paramètre t_0, du système homogène

$$\frac{du}{dt} - Au = 0,$$
$$u|_{t=0} = f(t_0).$$

J'affirme que

$$w(t) = \int_0^t u(t - t_0, t_0)\, dt_0.$$

En effet,

$$\frac{dw}{dt} = u(0, t) + \int_0^t \frac{du(t - t_0, t_0)}{dt}\, dt_0 = f(t) + \int_0^t Au(t - t_0, t_0)\, dt_0 =$$
$$= f(t) + A\int_0^t u(t - t_0, t_0)\, dt_0 = f(t) + Aw(t).$$

L'équation $\frac{dw}{dt} - Aw = f(t)$ est vérifiée. L'observation pour w de la condition initiale $w(0) = 0$ est évidente.

La formule

$$w(t) = \int_0^t u(t - t_0, t_0)\, dt_0,$$

qui représente la solution du problème inhomogène d'après les solutions du problème homogène est dite *intégrale de Duhamel*.

Envisageons à présent le cas où le second membre a la forme particulière $f(t) = e^{\lambda t}\varphi$ (φ est un vecteur constant). La solution $u(t, t_0)$ du problème homogène

$$\frac{du}{dt} - Au = 0,$$
$$u|_{t=0} = f(t_0) = e^{\lambda t_0}\varphi$$

dépend de t_0 de façon explicite simple :

$$u(t, t_0) = e^{\lambda t_0} u(t, 0).$$

Nous utiliserons ce fait par la suite, omettant dans $u(t, 0)$ le second argument (nul) et écrivant la solution w du problème inhomogène

$$\frac{dw}{dt} - Aw = e^{\lambda t}\varphi,$$

$$w|_{t=0} = 0$$

au moyen de la formule

$$w(t) = \int_0^t u(t - t_0)\, e^{\lambda t_0}\, dt_0 = e^{\lambda t} \int_0^t u(t - t_0)\, e^{-\lambda(t - t_0)}\, dt_0.$$

Le vecteur fonction $u(t)$ figurant dans cette intégrale vérifie les équations et les conditions initiales suivantes :

$$\frac{du}{dt} - Au = 0,$$

$$u|_{t=0} = \varphi.$$

On sait du cours d'équations différentielles que la solution peut être, en règle générale, représentée par la combinaison linéaire d'exponentielles $e^{k_i t}$, les k_i étant les racines de l'équation caractéristique

$$\det \| kE - A \| = 0.$$

L'expression « en règle générale » signifie que certaines précisions devront être apportées lorsque cette équation a des racines multiples. Il résulte de la représentation de la solution par une combinaison d'exponentielles que si $\operatorname{Re} \lambda > \max_i \operatorname{Re} k_i$, on a alors

$$\int_0^t u(t - t_0)\, e^{-\lambda(t - t_0)}\, dt_0 = -\int_{t_0 = t}^{t_0 = 0} u(t - t_0)\, e^{-\lambda(t - t_0)} d(t - t_0) =$$

$$= -\int_t^0 u(\tau)\, e^{-\lambda\tau}\, d\tau = \int_0^t u(\tau)\, e^{-\lambda\tau}\, d\tau \xrightarrow[t \to \infty]{} \int_0^\infty u(t)\, e^{-\lambda t}\, dt = v(\lambda),$$

c'est-à-dire que la dernière intégrale converge.

(Problème. Démontrez la convergence de l'intégrale sous la même hypothèse $\operatorname{Re} \lambda > \max_i \operatorname{Re} k_i$ lorsque parmi les racines k_i il en est des multiples.)

On dit dans ce cas que la « force perturbatrice » $e^{\lambda t}\varphi$ met le système en branle avec la « fréquence » propre à cette « force ». Nous avons désigné par $v(\lambda)$ l'amplitude des oscillations qui s'établit lorsque $t \to \infty$. Nous avons écrit « fréquence » entre guillemets parce

que, en toute rigueur, la notion de fréquence ω n'est définie que pour les λ purement imaginaires $\lambda = i\omega$. Pour la simplicité et pour plus de clarté nous supposerons provisoirement que $\lambda = i\omega$ est ici purement imaginaire et que $\max_i (\mathrm{Re}\, k_i) < -p < 0$. Puis nous montrerons comment on peut étendre les faits requis au cas où l'inégalité $\max_i (\mathrm{Re}\, k_i) < -p$ n'est pas vérifiée. Ainsi, considérant la solution du système

$$\frac{dw}{dt} - Aw = e^{i\omega t}\varphi,$$

$$w|_{t=0} = 0,$$

on a pour elle la formule

$$w(t) = e^{i\omega t} \int_0^t u(t - t_0)\, e^{-i\omega(t-t_0)}\, dt_0.$$

Quand $t \to \infty$

$$\int_0^t u(t - t_0)\, e^{-i\omega(t-t_0)}\, dt_0 \to v(i\omega) = \int_0^\infty u(t)\, e^{-i\omega t}\, dt.$$

Le vecteur fonction $v(i\omega)$ de la fréquence ω est appelé *caractéristique amplitude-fréquence du système* $\frac{du}{dt} - Au = 0$, l'intégrale donnant sa représentation $\int_0^\infty u(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$ étant appelée *transformation de Laplace de* $u(t)$.

Envisageons à présent à titre d'exemple particulier tout à fait simple le système constitué par une seule équation

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} - ku = 0, \\ u|_{t=0} = \varphi, \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{dw}{dt} - kw = \varphi e^{i\omega t}, \\ w|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

On peut écrire pour $u(t)$, $w(t)$ les formules explicites suivantes :

$$u(t) = \varphi e^{kt}, \quad w = \frac{\varphi}{i\omega - k}\, e^{i\omega t} - \frac{\varphi}{i\omega - k}\, e^{kt}.$$

Comme on suppose $\mathrm{Re}\, k < 0$, dans la formule pour w le second terme tend vers 0 quand $t \to \infty$. Le coefficient du premier terme — la fonction $v(i\omega) = \frac{\varphi}{i\omega - k}$ — est la caractéristique amplitude-fréquence et elle peut être calculée sous forme d'intégrale

$$v(i\omega) = \int_0^\infty u(t)\, e^{-i\omega t}\, dt = \int_0^\infty \varphi e^{kt} e^{-i\omega t}\, dt = \frac{\varphi}{i\omega - k}.$$

Dans cet exemple la caractéristique amplitude-fréquence est simplement une fonction scalaire de ω, ou si l'on veut un vecteur fonction unidimensionnel. Il apparaît que si d'une fonction assez arbitraire $u(t)$ on connaît la caractéristique amplitude-fréquence

$$v(i\omega) = \int_0^\infty u(t)\, e^{-i\omega t}\, dt,$$

alors la fonction elle-même $u(t)$ peut être reconstituée d'après cette caractéristique. On a *le théorème* suivant *d'inversion de la transformation de Laplace*:

Théorème. *Supposons la fonction $u(t)$ définie pour $0 \leqslant t < \infty$ et vérifiant les inégalités*

$$|u(t)| < Me^{-pt}, \quad |u'(t)| < Me^{-pt} \qquad (p > 0)$$

et supposons en outre que, pour $0 \leqslant t_i \leqslant 2T$,

$$|u'(t_1) - u'(t_2)| \leqslant M\sqrt{|t_1 - t_2|}.$$

Définissons la transformation de Laplace $v(i\omega)$ par la formule

$$v(i\omega) = \int_0^\infty e^{-i\omega t} u(t)\, dt.$$

Alors la fonction initiale $u(t)$ peut être reconstituée d'après $v(i\omega)$ à l'aide de l'égalité

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-b}^{b} v(i\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega + O\left(\frac{1}{b}\right).$$

L'évaluation de la constante dans $O\left(\frac{1}{b}\right)$ est uniforme pour tous les t du segment $0 < t_0 \leqslant t \leqslant T$ et pour toutes les fonctions $u(t)$ vérifiant les inégalités dans la condition du théorème. Ce théorème ne diffère que par des détails de formulation du théorème bien connu d'inversion de la transformation de Laplace: on impose ici à $u(t)$ des restrictions un peu plus fortes et on obtient une asymptotique plus précise pour l'intégrale. La démonstration du théorème sera apportée au paragraphe suivant; en attendant, nous revenons sur l'examen de la caractéristique amplitude-fréquence $v(i\omega)$ du système d'équations différentielles $\frac{du}{dt} - Au = 0$, $u|_{t=0} = \varphi$. Il apparaît que chaque composante de cette caractéristique $v(i\omega)$ est une fonction rationnelle de $i\omega$, ayant des pôles aux points k vérifiant l'équation caractéristique

$$\det\| A - kE \| = 0.$$

Montrons ceci. Parallèlement à la transformation de Laplace $u(t)$

$$v(i\omega) = \int_0^\infty e^{-i\omega t} u(t)\, dt$$

considérons encore la transformation de Laplace de $Au(t)$ et de $\frac{du(t)}{dt}$:

$$\int_0^\infty e^{-i\omega t} Au(t)\, dt = A \int_0^\infty e^{-i\omega t} u(t)\, dt = Av(i\omega),$$

$$\int_0^\infty e^{-i\omega t} \frac{du}{dt}\, dt = [u(t)\, e^{-i\omega t}]_0^\infty - \int_{t=0}^{t=\infty} u(t)\, de^{-i\omega t} =$$

$$= -u(0) + i\omega \int_0^\infty u(t)\, e^{-i\omega t}\, dt = -\varphi + i\omega v(i\omega).$$

D'où

$$\int_0^\infty e^{-i\omega t} \left(\frac{du}{dt} - Au \right) dt = -\varphi + i\omega v(i\omega) - Av(i\omega).$$

Etant donné que $\frac{du}{dt} - Au = 0$, $v(i\omega)$ vérifie le système d'équations linéaires

$$(A - i\omega E)\, v + \varphi = 0,$$

lequel système est résoluble pourvu que $i\omega$ ne soit pas racine de l'équation caractéristique $\det \|A - kE\| = 0$. La proposition formulée à propos de $v(i\omega)$ résulte de la forme de ce système. Si toutes les racines de l'équation caractéristique sont simples, il est évident que $v(i\omega)$ admet la représentation suivante :

$$v(i\omega) = \sum_j \frac{1}{i\omega - k_j} \psi_j.$$

Servons-nous à présent du théorème d'inversion de la transformation de Laplace $(0 < t_0 \leqslant t \leqslant T)$:

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-b}^{+b} v(i\omega)\, e^{t\omega t}\, d\omega + O\left(\frac{1}{b}\right) =$$

$$= \sum_j \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-b}^{+b} \frac{e^{i\omega t}}{i\omega - k_j}\, d\omega \right) \psi_j + O\left(\frac{1}{b}\right).$$

Nous montrerons un peu plus bas que pour $b \to \infty$ et $\operatorname{Re} k_j < 0$, $t \geqslant t_0 > 0$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-b}^{+b} \frac{e^{i\omega t}}{i\omega - k_j} d\omega = e^{k_j t} + O\left(\frac{1}{b}\right). \tag{1}$$

Ceci nous permet d'affirmer que

$$u(t) = \sum_j e^{k_j t} \psi_j + O\left(\frac{1}{b}\right).$$

En vertu de l'arbitraire de b, on déduit de là la représentation

$$u(t) = \sum_j e^{k_j t} \psi_j$$

de la solution du système sous forme de combinaison d'exponentielles. Par là, la connaissance de la caractéristique amplitude-fréquence

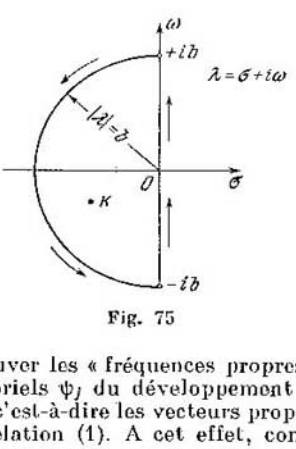

Fig. 75

$v(i\omega)$ permet de trouver les « fréquences propres k_j » et de calculer les coefficients vectoriels ψ_j du développement de la solution suivant ces fréquences, c'est-à-dire les vecteurs propres de la matrice A.

Démontrons la relation (1). A cet effet, considérons l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-b}^{+b} \frac{e^{i\omega t}}{i\omega - k} d\omega, \quad \text{où} \quad \operatorname{Re} k < 0.$$

Prenons pour chemin d'intégration le segment $-b \leqslant \omega \leqslant b$ du plan complexe $\lambda = i\omega$ et complétons ce chemin par la demi-circonférence $|\lambda| = b$ ($\operatorname{Re} \lambda < 0$) comme cela a été fait sur la fig. 75. L'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{e^{\lambda t}}{\lambda - k} d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_{-b}^{+b} \frac{e^{i\omega t}}{i\omega - k} d\omega + \frac{1}{2\pi i} \int_{\substack{|\lambda| = b \\ \operatorname{Re} \lambda < 0}} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda - k} d\lambda$$

peut être calculée exactement par la méthode des résidus. Elle diffère de l'intégrale initiale par l'intégrale sur la demi-circonférence, dont on montrera que c'est une quantité de l'ordre de $O\left(\frac{1}{b}\right)$ lorsque $b \to \infty$. Lorsque b est suffisamment grand, le pôle $\lambda = k$ se trouve à l'intérieur du contour d'intégration et a pour résidu e^{kt}. Par conséquent,

$$\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{e^{\lambda t}}{\lambda - k}\,d\lambda = e^{kt}.$$

Pour évaluer l'intégrale sur la demi-circonférence, notons que

$$\lambda = b(-\sin\varphi + i\cos\varphi),\quad 0 < \varphi \leqslant \pi,$$
$$|d\lambda| = b\,|d\varphi|,\quad |e^{\lambda t}| = e^{-bt\sin\varphi}.$$

Choisissant des b suffisamment grands, on peut considérer que sur la demi-circonférence $1/|\lambda - k| < 2/b$.

Ceci étant,

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\substack{|\lambda|=b\\ \mathrm{Re}\,\lambda<0}} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda - k}\,d\lambda\right| < \frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi} e^{-bt\sin\varphi}\,d\varphi$$

et reste à montrer que $\int\limits_0^{\pi} e^{-c\sin\varphi}\,d\varphi = 2\int\limits_0^{\pi/2} e^{-c\sin\varphi}\,d\varphi = O\left(\frac{1}{c}\right)$, où l'on a posé $c = bt$. Ecrivons cette intégrale positive sous la forme

$$\int_0^{\pi/2} e^{-c\sin\varphi}\,d\varphi = \int_0^{\pi/4} \frac{e^{-c\sin\varphi}\cos\varphi}{\cos\varphi}\,d\varphi + \int_{\pi/4}^{\pi/2} e^{-c\sin\varphi}\,d\varphi \leqslant$$
$$\leqslant \int_0^{\pi/4} \frac{e^{-c\sin\varphi}\,d(\sin\varphi)}{\sqrt{2}/2} + \int_{\pi/4}^{\pi/2} e^{-c\frac{\sqrt{2}}{2}}\,d\varphi =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{c}\left(1 - e^{-\frac{c}{\sqrt{2}}}\right) + \frac{\pi}{4}e^{-\frac{c}{\sqrt{2}}} = O\left(\frac{1}{c}\right) = O\left(\frac{1}{bt}\right) = O\left(\frac{1}{b}\right),$$

étant donné que, par hypothèse, $t \geqslant t_0 > 0$. Cette évaluation est souvent appelée en théorie des fonctions d'une variable complexe lemme de Jordan.

Nous avons étudié en détail le cas où l'équation caractéristique n'a pas de racines multiples. Le problème suivant est consacré au cas des racines multiples.

Problème. Si la racine caractéristique k_j de la matrice A a pour multiplicité r_j, la fonction $v(i\omega)$ peut s'écrire sous la forme

$$v(i\omega) = \sum_j \left[\sum_{s=1}^{r_j} \frac{\varphi_{js}}{(i\omega - k_j)^s}\right].$$

Calculez (sous l'hypothèse $\mathrm{Re}\, k_j < 0$) les intégrales

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\omega t}\,d\omega}{(i\omega - k_j)^{\sigma}}.$$

Utilisez le résultat pour déduire la représentation de la solution $u(t)$.

L'étude de la méthode de Fourier pour les équations aux dérivées partielles sera menée d'après le schéma suivant. On construira d'abord au moyen de la transformation de Laplace de la solution du système d'équations aux dérivées partielles la caractéristique « amplitude-fréquence » de ce système, qui est une fonction analytique du paramètre λ (de la « fréquence »). Puis on étudiera dans le détail la nature analytique de cette « caractéristique amplitude-fréquence », on trouvera ses pôles, on déterminera dans leur voisinage les parties principales du développement en série de Laurent. A l'aide du théorème d'inversion de la transformation de Laplace la solution sera approchée par une intégrale de contour qui, à son tour, sera calculée sous forme d'une somme finie portant sur les pôles. L'accomplissement minutieux de ce programme nous conduira à un théorème stipulant qu'il est possible d'approcher avec n'importe quelle précision toute solution du problème mixte d'un système hyperbolique par une somme finie de solutions spéciales : par des « ondes stationnaires ».

§ 27. Théorème d'inversion de la transformation de Laplace

Enoncé des théorèmes d'inversion de la transformation de Laplace et sa généralisation au cas des fonctions qui croissent (modérément). Les trois premiers lemmes et leurs conséquences conduisent à une identité importante contenant une intégrale trigonométrique. On étudie le caractère du reste dans cette identité. Fin de la démonstration du théorème.

Nous allons énoncer les théorèmes qui seront démontrés dans ce paragraphe.

Théorème 1. *Supposons que la fonction $u(t)$ définie pour $0 \leqslant t < \infty$ vérifie les inégalités*

$$|u(t)| < Me^{-pt},$$
$$|u'(t)| < Me^{-pt}, \quad p > 0,$$

et supposons en outre que, pour $0 \leqslant t_i \leqslant 2T$,

$$|u'(t_1) - u'(t_2)| \leqslant N(T)\cdot\sqrt{|t_1 - t_2|}.$$

On a alors pour $0 < t_0 \leqslant t \leqslant T$ l'inégalité

$$\left|u(t) - \frac{1}{2\pi}\int_{-b}^{+b} v(i\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega\right| < \frac{M_1}{b}.$$

Ici $v(i\omega)$ est la transformée de Laplace de $u(t)$:

$$v(i\omega) = \int_0^\infty e^{-i\omega t} u(t)\, dt,$$

et la constante M_1 ne dépend que de p, t_0, T, M, $N(T)$.

Théorème 2. *Supposons que la fonction $u(t)$ définie pour $0 \leqslant t < \infty$ vérifie les inégalités*

$$|u(t)| < Me^{Kt},$$

$$|u'(t)| < Me^{Kt},$$

$$|u'(t_1) - u'(t_2)| \leqslant N(T)\sqrt{|t_1 - t_2|} \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant t_i \leqslant 2T.$$

On a alors pour $0 < t_0 \leqslant t \leqslant T$ l'inégalité

$$\left| u(t) - \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ib}^{a+ib} v(\lambda)\, e^{\lambda t}\, d\lambda \right| < \frac{M_1}{b}, \quad a > K,$$

où $v(\lambda) = \int_0^\infty u(t)\, e^{-\lambda t} dt$ est la transformée de Laplace de $u(t)$, et la constante M_1 ne dépend que de K, t_0, T, M et $N(T)$.

On voit aussitôt que le théorème 2 découle du théorème 1. En effet, supposons que $u(t)$ vérifie les conditions du théorème 2. Introduisons la fonction $\tilde{u}(t) = e^{-at} u(t)$. Alors, $|\tilde{u}(t)| = |u(t)|\, e^{-at} < Me^{-(a-K)t} = Me^{-pt}$, où l'on a posé $p = a - K > 0$. Vérifions que $\tilde{u}(t)$ satisfait aux deux autres inégalités dans la condition du théorème 1 :

$$|\tilde{u}'(t)| = e^{-at} |u'(t) - au(t)| < M(1 + |a|)\, e^{-pt} = \tilde{M} e^{-pt},$$

$$|\tilde{u}'(t_1) - \tilde{u}'(t_2)| = |e^{-at_1}[u'(t_1) - au(t_1)] - e^{-at_2}[u'(t_2) - au(t_2)]| \leqslant$$

$$\leqslant |(e^{-at_1} - e^{-at_2})[u'(t_1) - au(t_1)] +$$

$$+ e^{-at_2}[u'(t_1) - u'(t_2) - au(t_1) + au(t_2)]| \leqslant$$

$$\leqslant A(T) \cdot |t_1 - t_2| + B(T) \cdot \sqrt{|t_1 - t_2|} \leqslant \tilde{N}(T) \cdot \sqrt{|t_1 - t_2|}$$

pour $0 \leqslant t_i \leqslant 2T$. La fonction $\tilde{u}(t)$ vérifie donc toutes les conditions du théorème 1. Par conséquent, si l'on pose

$$\tilde{v}(i\omega) = \int_0^\infty \tilde{u}(t)\, e^{-i\omega t}\, dt = \int_0^\infty u(t)\, e^{-(a+i\omega)t}\, dt,$$

on a la formule

$$\tilde{u}(t) = u(t)\,e^{-at} = \frac{1}{2\pi}\int_{-b}^{+b} \tilde{v}(i\omega)\,e^{i\omega t}\,d\omega + O\left(\frac{1}{b}\right) =$$

$$= \frac{e^{-at}}{2\pi i}\int_{a-ib}^{a+ib} \tilde{v}(i\omega)\,e^{(a+i\omega)t}\,d(a+i\omega) + O\left(\frac{1}{b}\right).$$

Posons $\lambda = a + i\omega$, $v(\lambda) = v(a + i\omega) = \tilde{v}(i\omega)$. Comme pour $t_0 \leqslant t \leqslant T$ l'expression e^{-at} est supérieurement et inférieurement bornée, de la dernière formule résulte, après simplification par e^{-at}, la conclusion du théorème 2.

Nous nous servirons par la suite de la forme d'inversion de la transformation de Laplace qui est donnée par le théorème 2.

Nous allons démontrer maintenant le théorème 1. Nous commencerons par quelques lemmes préliminaires sur les intégrales trigonométriques.

Lemme 1. *Pour $t > 0$, $b > 0$ on a l'inégalité*

$$\left|\int_t^\infty \frac{\sin b\xi}{\xi}\,\varphi(\xi)\,d\xi\right| \leqslant \frac{1}{b}\left[\frac{\sup_{\xi \geqslant t}|\varphi(\xi)|}{t} + \int_t^\infty \frac{|\varphi(\xi)|}{\xi^2}\,d\xi + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{t}\int_t^\infty |\varphi'(\xi)|\,d\xi\right].$$

(*Nous supposerons que $\varphi(\xi)$ a une dérivée continue $\varphi'(\xi)$ et un second membre fini dans l'inégalité écrite.*)

Pour démontrer le lemme, transformons en intégrant par parties l'intégrale suivante ($B > t$):

$$\int_t^B \frac{\sin b\xi}{\xi}\,\varphi(\xi)\,d\xi = -\frac{1}{b}\int_{\xi=t}^{\xi=B} \frac{\varphi(\xi)}{\xi}\,d\cos b\xi =$$

$$= \frac{1}{b}\left[\frac{\varphi(t)\cos bt}{t} - \frac{\varphi(B)\cos bB}{B} - \int_t^B \cos b\xi\,\frac{\varphi(\xi)}{\xi^2}\,d\xi + \right.$$

$$\left. + \int_t^B \cos b\xi\,\frac{\varphi'(\xi)}{\xi}\,d\xi\right],$$

puis évaluons les termes de la somme obtenue:

$$\left|\int_t^B \frac{\sin b\xi}{\xi}\,\varphi(\xi)\,d\xi\right| \leqslant \frac{1}{b}\left\{\sup_{\xi \geqslant t}|\varphi(\xi)|\cdot\left[\frac{1}{t} + \frac{1}{B}\right] + \right.$$

$$\left. + \int_t^B \frac{|\varphi(\xi)|}{\xi^2}\,d\xi + \frac{1}{t}\int_t^B |\varphi'(\xi)|\,d\xi\right\}.$$

Si les quantités suivantes

$$\sup_{\xi \geqslant t} |\varphi(\xi)|, \quad \int_t^\infty \frac{|\varphi(\xi)|}{\xi^2}\, d\xi, \quad \int_t^\infty |\varphi'(\xi)|\, d\xi$$

existent, il résulte de l'inégalité apportée que

$$\left| \int_{B_1}^{B_2} \frac{\sin b\xi}{\xi} \varphi(\xi)\, d\xi \right| < \varepsilon(B_1) \qquad (B_2 > B_1),$$

où $\varepsilon(B_1) \to 0$ lorsque $B_1 \to \infty$. Cette dernière affirmation équivaut à l'observation du critère de Cauchy pour vérifier la convergence de l'intégrale

$$\int_t^\infty \frac{\sin b\xi}{\xi} \varphi(\xi)\, d\xi.$$

Ainsi, cette intégrale converge. Passant à la limite en faisant $B \to \infty$ dans les deux membres de l'inégalité pour $\int_t^B \frac{\sin b\xi}{\xi} \varphi(\xi)\, d\xi$, nous sommes conduits à la confirmation du lemme.

Première conséquence du lemme 1:

$$\left| \int_{-t}^{+t} \frac{\sin b\xi}{\xi}\, d\xi - \pi \right| \leqslant \frac{1}{b} \cdot \frac{4}{t}.$$

On sait du cours d'analyse mathématique que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin b\xi}{\xi}\, d\xi = \pi$, et on déduit du lemme 1, en posant $\varphi(\xi) = 1$:

$$\left| \int_t^\infty \frac{\sin b\xi}{\xi}\, d\xi \right| = \left| \int_{-\infty}^{-t} \frac{\sin b\xi}{\xi}\, d\xi \right| \leqslant \frac{1}{b} \left[\frac{1}{t} + \int_t^\infty \frac{d\xi}{\xi^2} + \frac{1}{t} \int_t^\infty 0 \cdot d\xi \right] = \frac{2}{bt}.$$

A présent la conséquence formulée est évidente.

Deuxième conséquence du lemme 1. Si pour $t \geqslant 0$

$$|u(t)| \leqslant Me^{-pt},$$

$$|u'(t)| \leqslant Me^{-pt},$$

on a pour $t \geqslant t_0 > 0$

$$\int_t^\infty \frac{\sin b\xi}{\xi} u(t+\xi)\, d\xi = O\left(\frac{1}{b}\right)$$

avec le reste $\left| O\left(\frac{1}{b}\right) \right| < \frac{1}{b} \cdot \frac{M}{t_0} \left[2 + \frac{1}{p} \right]$.

En effet, en vertu du lemme 1 :

$$\left|\int_t^\infty \frac{\sin b\xi}{\xi} u(t+\xi)\,d\xi\right| \leqslant \frac{1}{b}\left[\frac{Me^{-pt}}{t} + Me^{-pt}\int_t^\infty \frac{e^{-p\xi}}{\xi^2}\,d\xi + \right.$$

$$\left. + \frac{Me^{-pt}}{t}\int_t^\infty e^{-p\xi}\,d\xi\right] \leqslant \frac{1}{b}\left[\frac{M}{t} + M\int_t^\infty \frac{d\xi}{\xi^2} + \frac{M}{t}\int_t^\infty e^{-p\xi}\,d\xi\right] =$$

$$= \frac{1}{b}\left[\frac{2M}{t} + \frac{M}{pt}\,e^{-pt}\right] < \frac{1}{b}\,\frac{M}{t_0}\left[2+\frac{1}{p}\right] = O\left(\frac{1}{b}\right).$$

La conséquence est justifiée.

Lemme 2. *Supposons vérifiées, pour* $-t \leqslant \xi \leqslant t$, *les inégalités* $|f(\xi)| < M$, $|f'(\xi)| < \dfrac{M}{\sqrt{|\xi|}}$: *alors*

$$\left|\int_{-t}^{+t} \sin b\xi f(\xi)\,d\xi\right| < \frac{2M+4M\sqrt{t}}{b}.$$

Démonstration :

$$\int_{-t}^{+t} \sin b\xi\, f(\xi)\,d\xi = -\frac{1}{b}\int_{\xi=-t}^{\xi=t} f(\xi)\,d\cos b\xi = -\frac{\cos bt}{b}\,|f(t)-f(-t)| +$$

$$+ \frac{1}{b}\int_{-t}^{+t} \cos b\xi\cdot f'(\xi)\,d\xi,$$

$$\left|\int_{-t}^{+t} \sin b\xi\, f(\xi)\,d\xi\right| < \frac{2M}{b} + \frac{1}{b}\,M\cdot 2\int_0^t \frac{d\xi}{\sqrt{\xi}} = \frac{2M+4M\sqrt{t}}{b}.$$

Lemme 3. *Supposons vérifiées, pour* $|\xi| < t$, *les inégalités :* $|\varphi(\xi)| < M$, $|\varphi'(\xi)| < M$,

$$|\varphi'(\xi_1) - \varphi'(\xi_2)| \leqslant M\sqrt{|\xi_1 - \xi_2|}.$$

Alors,

$$\left|\int_{-t}^{+t} \frac{\sin b\xi}{\xi}\,\varphi(\xi)\,d\xi - \pi\varphi(0)\right| < \frac{2M+4M\sqrt{t}+\dfrac{4M}{t}}{b}.$$

Démonstration. Construisons la fonction

$$f(\xi) = \frac{\varphi(\xi)-\varphi(0)}{\xi}$$

et démontrons que $|f(\xi)| < M$, $|f'(\xi)| < \dfrac{M}{\sqrt{|\xi|}}$. En effet,

$$f(\xi) = \frac{\varphi(\xi)-\varphi(0)}{\xi} = \varphi'(0\xi), \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 1.$$

D'où

$$|f(\xi)| = |\varphi'(\theta\xi)| < M.$$

Puis :

$$f'(\xi) = \frac{\xi\varphi'(\xi) - [\varphi(\xi) - \varphi(0)]}{\xi^2} = \frac{\xi\varphi'(\xi) - \xi\varphi'(0\xi)}{\xi^2} = \frac{\varphi'(\xi) - \varphi'(0\xi)}{\xi}.$$

Si bien que

$$|f'(\xi)| = \left| \frac{|\varphi'(\xi) - \varphi'(0\xi)|}{|\xi|} \leqslant \frac{M\sqrt{|(1-0)|\xi|}}{|\xi|} \leqslant \frac{M}{\sqrt{|\xi|}}.$$

Appliquons à présent le lemme 2 :

$$\left| \int_{-t}^{+t} \sin b\xi f(\xi)\, d\xi \right| = \left| \int_{-t}^{+t} \frac{\sin b\xi}{\xi} \varphi(\xi)\, d\xi - \varphi(0) \int_{-t}^{+t} \frac{\sin b\xi}{\xi} d\xi \right| < \frac{2M + 4M\sqrt{t}}{b}.$$

Reste à présent à noter que, d'après la première conséquence du lemme 1,

$$\left| \varphi(0) \int_{-t}^{+t} \frac{\sin b\xi}{\xi} d\xi - \pi \cdot \varphi(0) \right| < \frac{1}{b} \cdot \frac{4M}{t}.$$

La démonstration du lemme 3 est achevée.

Conséquence du lemme 3.

Supposons, pour $t \geqslant 0$, remplies les inégalités

$$|u(t)| < Me^{-pt} \leqslant M, \quad |u'(t)| < Me^{-pt} \leqslant M,$$

et, pour $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant 2T$, l'évaluation de continuité de $u'(t)$:

$$|u'(t_2) - u'(t_1)| \leqslant M\sqrt{|t_2 - t_1|}.$$

On a alors pour $0 < t_0 \leqslant t \leqslant T$ l'égalité :

$$\int_{-t}^{+t} \frac{\sin b\xi}{\xi} u(t+\xi)\, d\xi - \pi u(t) = O\left(\frac{1}{b}\right)$$

avec un reste $O\left(\frac{1}{b}\right)$ tel que

$$\left| O\left(\frac{1}{b}\right) \right| < \frac{2M + 4M\sqrt{T} + \frac{4M}{t_0}}{b}.$$

(Pour déduire la conséquence du lemme 3, il suffit de poser $\varphi(\xi) = u(t+\xi)$.) Réunissant cette conséquence avec la deuxième conséquence du lemme 1, on obtient pour les fonctions $u(t)$ vérifiant toutes les conditions à elles imposées l'égalité

$$u(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-t}^{\infty} \frac{\sin b\xi}{\xi} u(t+\xi)\, d\xi + O\left(\frac{1}{b}\right),$$

où la constante c dans l'évaluation

$$\left| O\left(\frac{1}{b}\right) \right| < \frac{c}{b}$$

dépend seulement de M, p, t_0, T: $c = c(M, p, t_0, T)$ si $0 < t_0 \leqslant t \leqslant T$. (Élargissant le segment de variation admissible de t, par exemple en rapprochant t_0 de 0, on augmente la constante c dans cette évaluation.)

On dit alors que l'évaluation du reste $O\left(\frac{1}{b}\right)$ est uniforme par rapport à toutes les fonctions $u(t)$ vérifiant les évaluations

$$|u(t)| < Me^{-pt}, \quad |u'(t)| < Me^{-pt}, \quad t \geqslant 0,$$

$$|u'(t_2) - u'(t_1)| \leqslant M\sqrt{t_2 - t_1}, \quad 0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant 2T,$$

et pour tous les t du segment fixé

$$0 < t_0 \leqslant t \leqslant T.$$

Souvent on démontre dans les cours d'analyse mathématique que si la fonction $g(\xi)$ est telle que

I. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|g(\xi)|}{1+|\xi|}\, d\xi < \infty$,

II. $g(\xi)$ est continue pour $\xi_0 - \Delta < \xi < \xi_0 + \Delta$ et a dans cet intervalle une variation bornée, on a alors pour elle la relation limite

$$g(\xi_0) = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\xi)\, \frac{\sin b(\xi - \xi_0)}{\xi - \xi_0}\, d\xi.$$

On déduit de cette affirmation en posant

$$g(\xi) = \begin{cases} u(t+\xi) & \text{pour } \xi > -t, \\ 0 & \text{pour } \xi < -t \end{cases}$$

que

$$u(t) = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-t}^{\infty} u(t+\xi)\, \frac{\sin b\xi}{\xi}\, d\xi.$$

Imposant à $u(t)$ des conditions plus rigides, nous avons pu montrer que pour $b \to \infty$ l'intégrale au second membre diffère de $u(t)$ d'une quantité de l'ordre

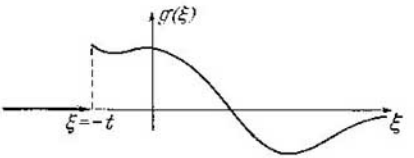

Fig. 76

de $1/b$, uniformément pour toutes les fonctions $u(t)$ satisfaisant à ces conditions et pour tous les t d'un certain segment fixé $0 < t_0 \leqslant t \leqslant T$.

La restriction $t_0 > 0$ doit être imposée en raison du fait suivant. La fonction $g(\xi)$ a son graphique du type de celui qui est représenté sur la fig. 76. Pour $\xi = -t$ elle est, en règle générale, discontinue. Il est clair que la convergence

des fonctions continues par rapport à ξ_0

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin b(\xi-\xi_0)}{\xi-\xi_0}\,g(\xi)\,d\xi$$

vers la fonction $g(\xi_0)$ lorsque $b\to\infty$ cesse d'être uniforme au voisinage des points de discontinuité de g. C'est précisément pour cela que le point de discontinuité $\xi=-t$ doit être suffisamment éloigné du point étudié $\xi=0$, ce qui est assuré par l'inégalité $0<t_0\leqslant t$.

Ainsi, nous avons démontré que

$$u(t)=\frac{1}{\pi}\int_{-t}^{\infty}\frac{\sin b\xi}{\xi}\,u(t+\xi)\,d\xi+O\left(\frac{1}{b}\right).$$

On peut à présent passer au théorème d'inversion de la transformation de Laplace.

Démonstration du théorème 1.

Pour démontrer ce théorème, il suffit de s'assurer que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-b}^{+b}v(i\omega)\,e^{i\omega t}\,d\omega=\frac{1}{\pi}\int_{-t}^{\infty}\frac{\sin b\xi}{\xi}\,u(t+\xi)\,d\xi.$$

Dans l'intégrale qui représente $v(i\omega)$, il est commode dans la démonstration de désigner la variable d'intégration non pas par la lettre t, mais par une autre lettre quelconque, soit τ. Faisons le calcul qui démontre l'égalité requise:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-b}^{+b}v(i\omega)\,e^{i\omega t}\,d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-b}^{+b}e^{i\omega t}\left(\int_{0}^{\infty}u(\tau)\,e^{-i\omega\tau}\,d\tau\right)d\omega=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-b}^{+b}\int_{0}^{\infty}u(\tau)\,e^{i\omega(t-\tau)}\,d\tau\,d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-b}^{+b}\int_{-t}^{\infty}u(t+\xi)\,e^{-i\omega\xi}\,d\xi\,d\omega.$$

La dernière intégrale converge uniformément, si bien qu'on peut changer l'ordre d'intégration:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-b}^{+b}v(i\omega)\,e^{i\omega t}\,d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-b}^{+b}\int_{-t}^{\infty}u(t+\xi)\,e^{-i\omega\xi}\,d\xi\,d\omega=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-t}^{\infty}u(t+\xi)\left(\int_{-b}^{+b}e^{-i\omega\xi}\,d\omega\right)d\xi.$$

L'intégrale intérieure peut être calculée:

$$\int_{-b}^{+b}e^{-i\omega\xi}\,d\omega=-\left[\frac{e^{-i\omega\xi}}{i\xi}\right]_{\omega=-b}^{\omega=b}=\frac{e^{ib\xi}-e^{-ib\xi}}{i\xi}=2\frac{\sin b\xi}{\xi}.$$

Finalement:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-b}^{+b}v(i\omega)\,e^{i\omega t}\,d\omega=\frac{1}{\pi}\int_{-t}^{\infty}u(t+\xi)\,\frac{\sin b\xi}{\xi}\,d\xi.$$

La démonstration du théorème est terminée. La règle d'inversion de la transformation de Laplace est justifiée.

§ 28. Transformation de Laplace pour les solutions d'un système hyperbolique

Description de la position des problèmes mixtes réversibles pour un système hyperbolique. L'existence des solutions et leurs évaluations ont été étudiées au § 17. Transformée de Laplace $v_i(x, \lambda)$ de la solution pour des $\operatorname{Re}\lambda$ suffisamment grands. Son analyticité. Equations différentielles ordinaires vérifiées par la transformée. Evaluations. Utilisation de l'inversibilité. Exposé du schéma de l'étude ultérieure. Propriétés principales de $v_i(x, \lambda)$ qui seront démontrées dans les paragraphes suivants, et obtention à l'aide de ces propriétés de la formule d'inversion contenant une intégrale sur un contour fermé.

Nous nous proposons d'étudier la théorie de la méthode de Fourier sur l'exemple d'un système de deux équations hyperboliques écrites sous forme canonique

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + k_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + m_{11}(x)\, u_1 + m_{12}(x)\, u_2 = 0,$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} - k_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} + m_{21}(x)\, u_1 + m_{22}(x)\, u_2 = 0.$$

On suppose que ce système a une caractéristique à pente positive, et l'autre à pente négative, ce qui est assuré par les inégalités $k_1(x) > 0$, $k_2(x) > 0$. Les conditions $k_i(x) \neq 0$ signifient que les caractéristiques n'ont pas de tangentes verticales. Considérant ce système sur le segment $0 \leqslant x \leqslant l$, on doit se donner encore les conditions aux limites

$$\alpha_1 u_1(0, t) + \alpha_2 u_2(0, t) = 0,$$

$$\beta_1 u_1(l, t) + \beta_2 u_2(l, t) = 0$$

et les conditions initiales pour $t = 0$: $u_1(x, 0) = \varphi_1(x)$, $u_2(x, 0) = \varphi_2(x)$. Si tous les coefficients $(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$ dans les conditions aux limites sont non nulles $(\alpha_1 \neq 0, \alpha_2 \neq 0, \beta_1 \neq 0, \beta_2 \neq 0)$, alors, si les coefficients du système et les données initiales sont suffisamment réguliers, la solution peut être construite aussi bien dans la demi-bande « supérieure »

$$t \geqslant 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l$$

du plan x, t que dans la demi-bande inférieure

$$t \leqslant 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l.$$

Nous appellerons *réversibles* de tels problèmes, qui peuvent être résolus tant dans le sens des t croissants $(t > 0)$ que dans le sens des t décroissants $(t < 0)$ (cf. § 14). La réversibilité servira essentiellement dans la suite lors de la construction de la théorie. Pour les problèmes irréversibles, non seulement le schéma de notre étude ne convient pas, mais encore les faits eux-mêmes de la théorie de la méthode de Fourier sont tout à fait différents. Toute solution du problème irréversible ne peut, tant s'en faut, être approchée par des solutions

particulières de la forme $e^{\lambda t}u(x)$, dont l'utilisation est posée à la base de la méthode. Nous nous en assurerons par la suite sur des exemples.

Ainsi que nous l'avons montré au § 17, la solution du problème posé existe (aussi bien dans la demi-bande $t > 0$, $0 \leqslant x \leqslant l$ que dans la demi-bande $t < 0$, $0 \leqslant x \leqslant l$) et vérifie les inégalités

$$\left(|u_i(x, t)|, \left|\frac{\partial u_i}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial u_i}{\partial t}\right|\right) \leqslant \text{const}\, e^{K|t|},$$

$$\left|\frac{\partial u_i(x, t_1)}{\partial t} - \frac{\partial u_i(x, t_2)}{\partial t}\right| \leqslant \sqrt{t_1 - t_2}\, C(|t_1|, |t_2|).$$

Dans ces inégalités $C = C(|t_1|, |t_2|)$ est une constante qui dépend de l'intervalle de temps contenant t_1 et t_2. Considérons la solution dans la demi-bande $t > 0$, $0 < x < l$ et construisons sa transformée de Laplace

$$v_i(x, \lambda) = \int_0^\infty u_i(x, t)\, e^{-\lambda t}\, dt.$$

L'intégrale dans cette formule convergeant, la transformation de Laplace est définie si $\operatorname{Re}\lambda > K$. Au moyen des règles de dérivation des intégrales impropres par rapport à un paramètre, on peut s'assurer aisément qu'en tout point du demi-plan $\operatorname{Re}\lambda > K$ existe la dérivée $\frac{\partial v_i(x, \lambda)}{\partial \lambda}$ représentée par l'intégrale convergente:

$$\frac{\partial v_i(x, \lambda)}{\partial \lambda} = -\int_0^\infty u_i(x, t)\, t \cdot e^{-\lambda t}\, dt.$$

Il en résulte que les $v_i(x, \lambda)$ sont dans le demi-plan $\operatorname{Re}\lambda > K$ des fonctions analytiques de λ, qui dépendent du paramètre réel x.

Déterminons encore les transformées de Laplace des dérivées $\frac{\partial u_i(x, t)}{\partial x}$, $\frac{\partial u_i(x, t)}{\partial t}$. Ces transformées peuvent aussi être considérées comme étant déterminées pour $\operatorname{Re}\lambda > K$, et point n'est difficile de vérifier que

$$\int_0^\infty \frac{\partial u_i(x, t)}{\partial x} e^{-\lambda t}\, dt = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\infty u_i(x, t)\, e^{-\lambda t}\, dt = \frac{\partial v_i(x, \lambda)}{\partial x},$$

$$\int_0^\infty \frac{\partial u_i}{\partial t} e^{-\lambda t}\, dt = [u_i(x, t)\, e^{-\lambda t}]_0^\infty - \int_{t=0}^{t=\infty} u_i(x, t)\, de^{-\lambda t} =$$

$$= -u_i(x, 0) + \lambda \int_0^\infty u_i(x, t)\, e^{-\lambda t}\, dt = -\varphi_i(x) + \lambda v_i(x, \lambda).$$

A présent, on déduit sans peine pour $v_i(x, \lambda)$ une équation différentielle ordinaire en x, dépendant du paramètre λ:

$$0 = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\left(\frac{\partial u_1}{\partial t} + k_1\frac{\partial u_1}{\partial x} + m_{11}u_1 + m_{12}u_2\right)dt =$$

$$= -\varphi_1(x) + \lambda v_1(x, \lambda) + k_1\frac{dv_1(x, \lambda)}{dx} + m_{11}v_1(x, \lambda) + m_{12}v_2(x, \lambda).$$

Nous utilisons pour la dérivée $\frac{\partial v_1(x, \lambda)}{\partial x}$ le signe de dérivation ordinaire $\frac{dv_1(x, \lambda)}{dx}$, étant donné qu'on n'aura nulle part, jusqu'au § 31, à dériver par rapport à λ, si bien qu'une telle notation ne saurait prêter à confusion.

De même, considérant l'intégrale

$$0 = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\left(\frac{\partial u_2}{\partial t} - k_2\frac{\partial u_2}{\partial x} + m_{21}u_1 + m_{22}u_2\right)dt,$$

on obtient la seconde équation

$$-\varphi_2(x) + \lambda v_2(x, \lambda) - k_2\frac{dv_2(x, \lambda)}{dx} + m_{21}v_1(x, \lambda) + m_{22}v_2(x, \lambda) = 0.$$

Le système d'équations ordinaires

$$\lambda v_1 + k_1\frac{dv_1}{dx} + m_{11}v_1 + m_{12}v_2 = \varphi_1,$$

$$\lambda v_2 - k_2\frac{dv_2}{dx} + m_{21}v_1 + m_{22}v_2 = \varphi_2$$

jouera dans nos études ultérieures un rôle important. Il n'est pas difficile de voir que $v_1(x, \lambda)$ et $v_2(x, \lambda)$ vérifient pour $x = 0$ et $x = l$ les conditions aux limites

$$\alpha_1 v_1(0, \lambda) + \alpha_2 v_2(0, \lambda) = 0,$$

$$\beta_1 v_1(l, \lambda) + \beta_2 v_2(l, \lambda) = 0.$$

On vérifie ce point comme suit (on se bornera à vérifier une seule condition):

$$\alpha_1 v_1(0, \lambda) + \alpha_2 v_2(0, \lambda) = \alpha_1\int_0^\infty e^{-\lambda t}u_1(0, t)\,dt + \alpha_2\int_0^\infty e^{-\lambda t}u_2(0, t)\,dt =$$

$$= \int_0^\infty e^{-\lambda t}[\alpha_1 u_1(0, t) + \alpha_2 u_2(0, t)]\,dt = 0.$$

Nous avons déterminé la transformée de Laplace dans le demi-plan $\operatorname{Re}\lambda > K$. Si l'on prend $K^* > K > 0$, il apparaît qu'on peut obte-

nir dans le demi-plan $\operatorname{Re}\lambda > K^*$ l'évaluation très importante pour la suite :

$$|v_i(x, \lambda)| < \frac{\text{const}}{|\lambda|}.$$

Déduisons-la. Montrons d'abord que ($\operatorname{Re}\lambda > K^*$)

$$|v_i(x, \lambda)| = \left|\int_0^\infty u_i(x, t)\, e^{-\lambda t}\, dt\right| \leqslant \int_0^\infty |u_i|\, e^{-K^* t}\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \text{const} \int_0^\infty e^{Kt} \cdot e^{-K^* t}\, dt = \frac{\text{const}}{K^* - K}.$$

De même

$$\left|\frac{dv_i(x, \lambda)}{dx}\right| = \left|\int_0^\infty \frac{\partial u_i(x, t)}{\partial x}\, e^{-\lambda t}\, dt\right| \leqslant \frac{\text{const}}{K^* - K}.$$

On déduit des équations ordinaires vérifiées par les $v_i(x, \lambda)$:

$$v_1(x, \lambda) = \frac{1}{\lambda}\left[\varphi_1(x) - k_1 \frac{dv_1}{dx} - m_{11} v_1 - m_{12} v_2\right],$$

$$v_2(x, \lambda) = \frac{1}{\lambda}\left[\varphi_2(x) + k_2 \frac{dv_2}{dx} - m_{21} v_1 - m_{22} v_2\right].$$

Si l'on évalue le second membre de ces égalités à l'aide des inégalités qui viennent d'être déduites, on est précisément conduit (pour $\operatorname{Re}\lambda > K^*$) à l'assertion annoncée :

$$|v_i(x, \lambda)| < \frac{\text{const}}{|\lambda|}.$$

Pour tout x fixé, les fonctions $u_i(x, t)$ vérifient toutes les conditions assurant l'application du théorème d'inversion de la transformation de Laplace, démontré au paragraphe précédent. Ceci étant,

$$u_i(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ib}^{a+ib} v_i(x, \lambda)\, e^{\lambda t}\, d\lambda + O\left(\frac{1}{b}\right).$$

Dans cette formule l'intégrale est prise sur un segment de droite $\operatorname{Re}\lambda = a$ parallèle à l'axe imaginaire et telle que $a > K$. Pour a fixé, l'évaluation est uniforme pour $0 \leqslant x \leqslant l$, $T \geqslant t \geqslant t_0 > 0$. L'uniformité par rapport à x résulte du fait que l'évaluation

$$|u_i| < \text{const}\, e^{Kt}, \quad \left|\frac{\partial u_i}{\partial t}\right| < \text{const}\, e^{Kt}$$

$$\left|\frac{\partial u_i(x, t_1)}{\partial t} - \frac{\partial u_i(x, t_2)}{\partial t}\right| \leqslant C(|t_1|, |t_2|)\sqrt{|t_1 - t_2|}$$

contient des constantes indépendantes de x. Fixant K^*, nous poserons $a = K^*$.

Ainsi, le théorème d'existence de la solution du système hyperbolique dans la demi-bande $t > 0$, $0 \leqslant x \leqslant l$ nous a permis de déterminer sa transformée de Laplace, dont les composantes sont des fonctions analytiques du paramètre λ dans le demi-plan $\operatorname{Re} \lambda > K$, et d'obtenir l'évaluation $|v_i| < \frac{\text{const}}{\lambda}$ dans le demi-plan $\operatorname{Re} \lambda > K^* > K > 0$. En outre, nous avons démontré la possibilité de calculer $u_i(x, t)$ pour $0 \leqslant x \leqslant l$, $0 < t_0 \leqslant t \leqslant T$ d'après $v_i(x, \lambda)$ à l'aide d'une formule approchée d'inversion de la transformation de Laplace, avec une évaluation uniforme du reste.

Voyons à présent quelles conclusions on peut tirer de la réversibilité du problème initial, c'est-à-dire de l'existence de sa solution dans le demi-plan $t < 0$, $0 \leqslant x \leqslant l$. A cet effet, considérons les intégrales

$$\int_0^{-\infty} e^{-\lambda t} u_i(x, t)\, dt = \tilde{v}_i(x, \lambda), \quad \int_0^{-\infty} e^{-\lambda t} \frac{\partial u_i(x, t)}{\partial x}\, dt = \frac{\partial \tilde{v}_i(x, \lambda)}{\partial x},$$

$$\int_0^{-\infty} e^{-\lambda t} \frac{\partial u_i(x, t)}{\partial t} dt = [e^{-\lambda t} u_i(x, t)]_0^{-\infty} + \lambda \int_0^{-\infty} u_i(x, t)\, e^{-\lambda t} dt =$$

$$= -\varphi_i(x, 0) + \lambda \tilde{v}_i(x, \lambda).$$

La convergence de ces intégrales et la légitimité des transformations effectuées s'établissent facilement pour $\operatorname{Re} \lambda < -K$.

A l'aide des évaluations

$$|u_i(x, t)| < \text{const} \cdot e^{K|t|}, \quad \left|\frac{\partial u_i}{\partial t}\right| < \text{const} \cdot e^{K|t|}, \quad \left|\frac{\partial u_i}{\partial t}\right| < \text{const} \cdot e^{K|t|}$$

on vérifie exactement de la même façon que pour la transformation de Laplace pour $\operatorname{Re} \lambda > K$ que les $\tilde{v}_i(x, \lambda)$ satisfont aux équations

$$\begin{aligned} \lambda \tilde{v}_1 + k_1 \frac{d\tilde{v}_1}{dx} + m_{11} \tilde{v}_1 + m_{12} \tilde{v}_2 &= \varphi_1, \\ \lambda \tilde{v}_2 - k_2 \frac{d\tilde{v}_2}{dx} + m_{21} \tilde{v}_1 + m_{21} \tilde{v}_2 &= \varphi_2 \end{aligned} \qquad (\operatorname{Re} \lambda < -K)$$

et aux conditions aux limites

$$\alpha_1 \tilde{v}_1(0, \lambda) + \alpha_2 \tilde{v}_2(0, \lambda) = 0,$$

$$\beta_1 \tilde{v}_1(l, \lambda) + \beta_2 \tilde{v}_2(l, \lambda) = 0.$$

Quant à leur forme, ces équations et ces conditions aux limites ne diffèrent en rien de celles obtenues lorsque $\operatorname{Re} \lambda > 0$ pour les $v_i(x, \lambda)$. Cette circonstance nous servira par la suite. On vérifie

facilement exactement de la même manière que les $\widetilde{v_i}(x, \lambda)$ sont des fonctions analytiques de λ pour $\operatorname{Re}\lambda < -K$.

Considérons à présent nos fonctions $\widetilde{v}_i(x, \lambda)$, $\frac{\partial \widetilde{v_i}(x, \lambda)}{\partial x}$ dans le demi-plan $\operatorname{Re}\lambda < -K^* < -K$:

$$|\widetilde{v}_i(x, \lambda)| = \left| \int_0^{-\infty} e^{-\lambda t} u_i(x, t)\, dt \right| \leqslant \left| \text{const} \int_0^{-\infty} e^{-K^*|t|} e^{K|t|}\, dt \right| = \frac{\text{const}}{K^* - K},$$

$$\left| \frac{\partial \widetilde{v_i}(x, \lambda)}{\partial x} \right| = \left| \int_0^{-\infty} e^{-\lambda t} \frac{\partial u_i}{\partial x}\, dt \right| \leqslant \frac{\text{const}}{K^* - K}.$$

Ecrivant les équations pour les $\widetilde{v}_i$ sous la forme

$$\widetilde{v_1} = \frac{1}{\lambda}\left[\varphi_1 - k_1 \frac{\partial \widetilde{v_1}}{\partial x} - m_{11}\widetilde{v_1} - m_{12}\widetilde{v_2}\right],$$

$$\widetilde{v_2} = \frac{1}{\lambda}\left[\varphi_2 + k_2 \frac{\partial \widetilde{v_2}}{\partial x} - m_{21}\widetilde{v_1} - m_{22}\widetilde{v_2}\right]$$

et utilisant pour le second membre les évaluations déduites, on trouve

$$|\widetilde{v}_i(x, \lambda)| < \frac{\text{const}}{|\lambda|} \text{ pour } \operatorname{Re}\lambda < -K^*.$$

Nous étudierons par la suite le comportement des solutions des équations différentielles

$$\lambda v_1 + k_1 \frac{dv_1}{dx} + m_{11}v_1 + m_{12}v_2 = \varphi_1,$$

$$\lambda v_2 - k_2 \frac{dv_2}{dx} + m_{21}v_1 + m_{22}v_2 = \varphi_2$$

avec les conditions aux limites

$$\alpha_1 v_1(0, \lambda) + \alpha_2 v_2(0, \lambda) = 0,$$

$$\beta_1 v_1(l, \lambda) + \beta_2 v_2(l, \lambda) = 0,$$

λ variant dans la bande $-2K^* \leqslant \operatorname{Re}\lambda \leqslant 2K^*$. On verra au cours de cette étude que la solution du système est unique pour presque tous les λ de cette bande. Qui plus est, tous les points en lesquels l'unicité est violée se situent discrètement dans la bande $\operatorname{Re}|\lambda| < K$ (rappelons que $K < K^*$). Du fait que cet ensemble de points est discret on déduira l'existence d'une bande $|\operatorname{Im}\lambda - \alpha| < \beta$ dans laquelle l'unicité est partout observée. On montrera de même qu'au voisinage de n'importe quel point d'unicité les $v_i(x, \lambda)$ sont des fonctions analytiques de λ.

On sait de la théorie des fonctions d'une variable complexe qu'une fonction analytique est déterminée de façon unique par ses valeurs dans un domaine arbitrairement petit. On montrera par la suite que

dans la bande $K^* \leqslant \operatorname{Re} \lambda \leqslant 2K^*$ la solution du système d'équations ordinaires est unique, si bien qu'elle coïncide avec le vecteur fonction $\{v_1(x, \lambda), v_2(x, \lambda)\}$ obtenu par transformation de Laplace du vecteur fonction $\{u_1(x, t), u_2(x, t)\}$. Par conséquent, la fonction analytique de λ, à dépendance paramétrique de x, définie dans la bande (privée des points discrets de non-unicité) $-2K^* \leqslant \operatorname{Re} \lambda \leqslant 2K^*$, est le prolongement analytique de cette transformée de Laplace. En particulier, considérant le prolongement analytique le long de la bande $|\operatorname{Im} \lambda - \alpha| < \beta$ dans le demi-plan de gauche $\operatorname{Re} \lambda < -K^*$, on remarque qu'en vertu de l'unicité de la solution du système d'équations différentielles ordinaires dans la bande $-2K^* < \operatorname{Re} \lambda < -K^*$, ce prolongement analytique coïncide dans le demi-plan de gauche avec $\{\widetilde{v}_1(x, \lambda), \widetilde{v}_2(x, \lambda)\}$.

Ces raisonnements rendent légitime la possibilité du prolongement analytique de la transformée de Laplace

$$v_i(x, \lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} u_i(x, t)\, dt,$$

définie par cette intégrale pour $\operatorname{Re} \lambda > K$, dans tout le plan de la variable complexe λ, excepté une certaine suite discrète de points situés dans la bande $|\operatorname{Re} \lambda| \leqslant K$. On verra par la suite que les points de cette suite sont en général des pôles pour $v_i(x, \lambda)$. (Ces pôles sont les mêmes pour tous les x.) Il apparaît qu'on peut numéroter les pôles $\ldots \lambda_{-p}, \lambda_{-p+1}, \ldots, \lambda_{-1}, \lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_p, \ldots$ de telle façon que, lorsque $|p| \to \infty$, l'on ait la formule asymptotique :

$$\lambda_p = \frac{i\,2p\pi - \mu - \nu}{\varkappa} + O\left(\frac{1}{|p|}\right),$$

Les paramètres μ, ν, $\varkappa$ se calculent facilement d'après les coefficients $k_1(x)$, $k_2(x)$, $m_{ik}(x)$ du système étudié et d'après les coefficients α_1, α_2, β_1, β_2 des conditions aux limites. Notons que les paramètres $\varkappa$ et μ sont réels, que ν peut être complexe, et que tous les pôles se trouvent dans la bande $|\operatorname{Re} \lambda| < K^*$.

Considérons encore les droites horizontales

$$\operatorname{Im} \lambda = \frac{(2p+1)\pi - \operatorname{Im} \nu}{\varkappa},$$

de chacune desquelles les pôles λ_p et λ_{p+1} sont asymptotiquement (pour les grands p) également éloignés. On montrera que sur les segments découpés dans ces droites par la bande $|\operatorname{Re} \lambda| \leqslant 2K^*$ on a l'évaluation

$$|v_i(x, \lambda)| < \frac{\text{const}}{p}$$

uniforme pour tous les x.

Nous allons montrer maintenant comment on peut mettre cette circonstance à profit pour fermer le contour d'intégration dans la

formule d'inversion de la transformation de Laplace. Après quoi, il ne sera guère difficile de remplacer l'intégrale sur le contour fermé par la somme des résidus aux pôles. Il nous sera maintenant commode d'écrire la formule d'inversion de la transformation de Laplace, précédemment établie, sous la forme suivante:

$$u_i(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{K^*-i\frac{2p+1}{\varkappa}\pi}^{K^*+i\frac{2p+1}{\varkappa}\pi} v_i(x, \lambda)\, e^{\lambda t}\, d\lambda + O\left(\frac{1}{p}\right).$$

Rappelons que l'évaluation du reste $O\left(\frac{1}{p}\right)$ est uniforme pour $0 \leqslant x \leqslant l$ et pour tout intervalle de temps fixé ayant une borne inférieure distincte de zéro: $0 < t_0 \leqslant t \leqslant T$. Décrivons dans le

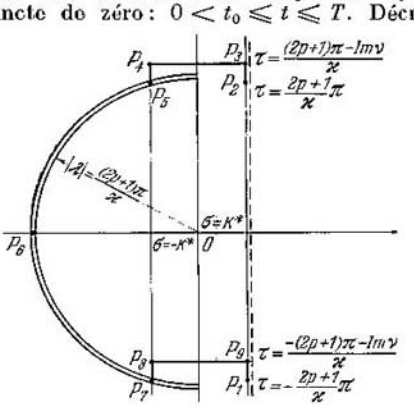

Fig. 77

plan $\lambda = \sigma + i\tau$ le contour quelque peu compliqué suivant $P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7P_8P_9P_{10}$ représenté sur la fig. 77. Les tronçons P_8P_9, P_3P_4 de ce contour se situent sur les droites horizontales

$$\operatorname{Im}\lambda = \frac{\pm(2p+1)\pi - \operatorname{Im}\nu}{\varkappa}$$

le long desquelles $|v_i(x, \lambda)| < \text{const}/p$, $|e^{\lambda t}| = |e^{\sigma t}| \leqslant e^{K^*T}$. D'où

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{P_3}^{P_4} e^{\lambda t} v_i(x, \lambda)\, d\lambda\right| < \frac{\text{const}}{p},$$

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{P_8}^{P_9} e^{\lambda t} v_i(x, \lambda)\, d\lambda\right| < \frac{\text{const}}{p}.$$

Les constantes ici et dans toutes les évaluations auxquelles nous allons procéder peuvent être choisies indépendantes de t, x dans le rectangle $t_0 \leqslant t \leqslant T$, $0 \leqslant x \leqslant l$. Dans la suite, cette uniformité des évaluations sera toujours supposée, sans spécification particulière. On sait déjà que pour $|\operatorname{Re}\lambda| \geqslant K^*$, et donc aussi pour $\operatorname{Re}\lambda = \pm K^*$, on a l'évaluation $v_i(x, \lambda) = O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right)$. Dès lors, nous sommes, de toute évidence, conduits au fait que le long de chacun des segments P_2P_3, P_4P_5, P_7P_8, P_9P_1, de longueur bornée, les intégrales

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int e^{\lambda t} v_i(x, \lambda)\, d\lambda\right|$$

sont aussi des quantités du type $O\left(\frac{1}{p}\right)$. Evaluons à présent le module de l'intégrale sur l'arc $P_5P_6P_7$ de circonférence $|\lambda| = \frac{(2p+1)\pi}{\varkappa}$

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{P_5P_6P_7} e^{\lambda t} v_i(x, \lambda)\, d\lambda\right| \leqslant \frac{\text{const}}{2\pi p}\int_{P_5P_6P_7} |e^{\lambda t}|\,|d\lambda|.$$

Etant donné que sur la circonférence $|\lambda| = \frac{(2p+1)}{\varkappa}\pi$

$$\lambda = |\lambda|\,(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

on a

$$|e^{\lambda t}|\cdot|d\lambda| = |\lambda|\, e^{|\lambda| t\cos\varphi}\, d\varphi = \frac{(2p+1)\pi}{\varkappa}\, e^{\frac{(2p+1)\pi}{\varkappa} t\cos\varphi}\, d\varphi.$$

Ceci étant,

$$\int_{P_5P_6P_7} |e^{\lambda t}|\,|d\lambda| < \frac{2p+1}{\varkappa}\pi \int_{+\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} e^{\frac{(2p+1)\pi}{\varkappa} t\cos\varphi}\, d\varphi =$$

$$= \frac{2p+1}{\varkappa}\pi \cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2p+1}{\varkappa}\pi t\sin\theta}\, d\theta,$$

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{P_6P_8P_7} e^{\lambda t} v_i(x, \lambda)\, d\lambda\right| \leqslant \text{const}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{(2p+1)\pi}{\varkappa} t\sin\theta}\, d\theta = O\left(\frac{1}{pt}\right).$$

L'affirmation que la dernière intégrale peut être considérée comme une quantité du type $O\left(\frac{1}{pt}\right)$ traduit le contenu du lemme de Jordan,

souvent utilisé en théorie des fonctions d'une variable complexe. Sa démonstration simple a été exposée au § 26.

Ainsi donc, nous avons montré que

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int\limits_{P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7P_8P_9P_1} e^{\lambda t} v_i(x, \lambda)\, d\lambda \right| = O\left(\frac{1}{p}\right).$$

Par ailleurs,

$$u_i(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{P_1}^{P_2} e^{\lambda t} v_i(x, \lambda)\, d\lambda + O\left(\frac{1}{p}\right).$$

Donc,

$$u_i(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7P_8P_9P_1} e^{\lambda t} v_i(x, \lambda)\, d\lambda + O\left(\frac{1}{p}\right).$$

On sait de la théorie des fonctions d'une variable complexe que la valeur de l'intégrale d'une fonction analytique sur un contour fermé ne change pas si l'on déforme le contour sans qu'il passe par les points singuliers de la fonction. Utilisant le fait que la fonction $v_i(x, \lambda)\, e^{\lambda t}$ ne peut avoir de pôles que dans la bande $|\operatorname{Re}\lambda| \leqslant K^*$, on conclut que notre contour compliqué peut être réduit, sans que la valeur de l'intégrale change, à la frontière du rectangle $P_9P_3P_4P_8P_9$, noté Π_p

$$\Pi_p: \left\{ |\operatorname{Re}\lambda| \leqslant K^*;\ \frac{-(2p+1)\pi - \operatorname{Im}\nu}{\varkappa} \leqslant \operatorname{Im}\lambda \leqslant \frac{(2p+1)\pi - \operatorname{Im}\nu}{\varkappa} \right\}.$$

Ainsi, postulant certaines propriétés asymptotiques de $v_i(x, \lambda)$ dans la bande $|\operatorname{Re}\lambda| < \text{const}$ et utilisant les faits déjà démontrés relativement à $v_i(x, \lambda)$ (à $\tilde{v}_i(x, \lambda)$) en dehors de cette bande, nous avons obtenu l'importante représentation suivante

$$u_i(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Pi_p} e^{\lambda t} v_i(x, \lambda)\, d\lambda + O\left(\frac{1}{p}\right)$$

avec l'évaluation $O\left(\frac{1}{p}\right)$ pour le reste, uniforme pour $0 \leqslant x \leqslant l$, $0 < t_0 \leqslant t \leqslant T$.

Avant d'utiliser cette formule pour légitimer la méthode de Fourier, nous comblerons aux deux paragraphes suivants une lacune dans notre démonstration. A savoir, nous étudierons les fonctions $v_i(x, \lambda)$ dans la bande $|\operatorname{Re}\lambda| < \text{const}$.

§ 29. Comportement asymptotique des solutions d'équations différentielles ordinaires

Formules asymptotiques (en λ) de la solution du problème de Cauchy pour les équations différentielles ordinaires liées à la transformation de Laplace. Ces formules se déduisent des représentations explicites des solutions d'un systè-

me contenant deux équations indépendantes. Les lemmes suivants conduisent progressivement à un caractère de plus en plus compliqué de l'enchaînement des équations.

Nous allons démontrer dans ce paragraphe un

Théorème sur le comportement asymptotique des solutions du problème de Cauchy. *Si $k_i(x)$, $m_{ij}(x)$ sont des fonctions continues avec leurs dérivées premières, n'importe quelles solutions du système*

$$\lambda v_i + k_1 \frac{dv_1}{dx} + m_{11} v_1 + m_{12} v_2 = \varphi_1,$$

$$\lambda v_2 - k_2 \frac{dv_2}{dx} + m_{21} v_1 + m_{22} v_2 = \varphi_2$$

vérifient pour $|\operatorname{Re}\lambda| < K^*$ sur le segment $[0, l]$ les inégalités :

$$|v_1(x) - v_1(0)\, e^{-\lambda y_1(x) - \mu_1(x)}| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M}{|\lambda|} [\max_{i,x} |\varphi_i(x)| + \max_{i,x} |\varphi_i'(x)| + \max_i |v_i(0)|],$$

$$|v_2(x) - v_2(0)\, e^{\lambda y_2(x) + \mu_2(x)}| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M}{|\lambda|} [\max_{i,x} |\varphi_i(x)| + \max_{i,x} |\varphi_i'(x)| + \max_i |v_i(0)|],$$

la constante M étant évaluée d'après le maximum du module des coefficients et de leurs dérivées, et $y_i(x)$, $\mu_i(x)$ étant définies par les formules :

$$y_i(x) = \int_0^x \frac{d\xi}{k_i(\xi)},$$

$$\mu_i(x) = \int_0^x \frac{m_{ii}(\xi)}{k_i(\xi)}\, d\xi.$$

La formulation de ce théorème paraît de prime abord assez compliquée. Mais ce n'est là qu'une apparence. Nous allons dégager le sens de ce théorème.

Il apparaît que si l'on considère les solutions de notre système pour les λ grands en module situés dans une bande étroite au voisinage de l'axe imaginaire, on peut biffer du système les coefficients m_{12}, m_{21}, qui compliquent les équations, et les seconds membres φ_1, φ_2. La solution du système homogène « désenchaîné »

$$\frac{dv_1}{dx} + \left[\frac{\lambda}{k_1(x)} + \frac{m_{11}(x)}{k_1(x)}\right] v_1 = 0,$$

$$\frac{dv_2}{dx} - \left[\frac{\lambda}{k_2(x)} + \frac{m_{22}(x)}{k_2(x)}\right] v_2 = 0$$

s'écrit au moyen des formules

$$v_1(x) = v_1(0)\, e^{-\lambda y_1(x) - \mu_1(x)},$$
$$v_2(x) = v_2(0)\, e^{\lambda y_2(x) + \mu_2(x)},$$

lesquelles représentent le terme principal de l'asymptotique. Les termes de l'ordre $O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ dans cette asymptotique évaluent l'influence des termes biffés dans les équations. Il me semble qu'après ces éclaircissements l'énoncé du théorème sera facile à retenir.

Venons-en à la démonstration du théorème. Envisageons d'abord la solution d'une seule équation à coefficient constant

$$\lambda u + \frac{du}{dy} = q(y),$$
$$u(0) = 0.$$

Cette solution peut s'écrire au moyen de la formule

$$u(y) = \int_0^y e^{-\lambda(y-\eta)} q(\eta)\, d\eta.$$

Il est évident que $u(0) = 0$. On vérifie aussitôt en dérivant que l'équation est satisfaite. En intégrant par parties, on peut ramener la formule pour la solution à une autre forme:

$$u(y) = \frac{1}{\lambda}\left[e^{-\lambda(y-\eta)} q(\eta)\right]_0^y - \frac{1}{\lambda}\int_0^y e^{-\lambda(y-\eta)} q'(\eta)\, d\eta =$$

$$= \frac{1}{\lambda}\left[q(y) - q(0)\, e^{-\lambda y}\right] - \frac{1}{\lambda}\int_0^y e^{-\lambda(y-\eta)} q'(\eta)\, d\eta.$$

En supposant $|y| \leqslant Y$, $\lambda = \sigma + i\tau$, $|\sigma| \leqslant K^*$, et donc

$$|e^{-\lambda y}| = |e^{-\sigma y - i\tau y}| = e^{-\sigma y} \leqslant e^{K^* Y},$$
$$|e^{-\lambda(y-\eta)}| \leqslant e^{K^* Y},$$

et utilisant les formules pour la solution, on peut obtenir les inégalités

$$|u(y)| \leqslant \text{const} \cdot \max |q(y)|,$$

$$|u(y)| \leqslant \frac{\text{const}}{|\lambda|}\left[\max |q(y)| + \max |q'(y)|\right].$$

Ces inégalités entraînent la légitimité du

Lemme 1. *La solution de l'équation*

$$\lambda u + \frac{du}{dy} = q(y) + \frac{q^*(y)}{\lambda}, \qquad u(0) = 0$$

admet, sous l'hypothèse $|\operatorname{Re}\lambda| \leqslant K^*$, $|y| \leqslant Y$, *l'évaluation*

$$|u(y)| \leqslant \frac{\text{const}}{|\lambda|}\left[\max |q^*| + \max |q| + \max \left|\frac{dq}{dy}\right|\right].$$

Considérons à présent la solution $z=z(x)$ de l'équation à coefficients variables

$$\lambda z + k(x)\frac{dz}{dx} + m(x)\,z = f(x) + \frac{f^*(x)}{\lambda}.$$

La substitution

$$y = \int_0^x \frac{d\xi}{k(\xi)}, \quad z = e^{-\mu(x)}u, \quad q(x) = e^{\mu(x)}f,$$

$$q^*(x) = e^{\mu(x)}f^*, \quad \mu(x) = \int_0^x \frac{m(\xi)}{k(\xi)}\,d\xi,$$

qui entraîne

$$\frac{dq}{dy} = e^{\mu(x)}\left[k(x)\frac{df}{dx} + m(x)\,f\right],$$

$$\max|q(y)| \leqslant \text{const}\cdot\max|f(x)|,$$

$$\max|q^*(y)| \leqslant \text{const}\cdot\max|f^*(x)|,$$

$$\max|q'(y)| \leqslant \text{const}\,[\max|f(x)| + \max|f'(x)|],$$

ramène l'équation pour z à l'équation pour u examinée au lemme 1. Nous avons démontré le

Lemme 2. *Si pour* $0 \leqslant x \leqslant l$ $k(x) \neq 0$, *les quantités* $k(x)$ *et* $m(x)$ *sont bornées et continues, et si* $|\operatorname{Re}\lambda| \leqslant K^*$, *alors la solution* $z(x)$ *de l'équation*

$$\lambda z + k(x)\frac{dz}{dx} + m(x)\,z = f(x) + \frac{f^*(x)}{\lambda},$$

$$z(0) = 0$$

est évaluée par l'inégalité

$$|z(x)| \leqslant \frac{\text{const}}{|\lambda|}\,[\max|f^*(x)| + \max|f(x)| + \max|f'(x)|].$$

La solution de l'équation homogène

$$\lambda z + k(x)\frac{dz}{dx} + m(x)\,z = 0$$

est donnée par la formule

$$z(x) = z(0)\,e^{-\lambda y(x) - \mu(x)},$$

$$y(x) = \int_0^x \frac{d\xi}{k(\xi)}, \quad \mu(x) = \int_0^x \frac{m(\xi)}{k(\xi)}\,d\xi.$$

Représentant la solution de l'équation inhomogène par la somme de la solution à données initiales nulles et de la solution de l'équation homogène, on déduit aisément que

$$|z(x) - z(0)\,e^{-\lambda y(x) - \mu(x)}| \leqslant \frac{\text{const}}{|\lambda|}\,[\max|f^*(x)| + \max|f(x)| + \max|f'(x)|].$$

Démontrant le lemme 2, nous nous sommes servis du fait que $k(x)$ ne s'annule pas pour $0 \leqslant x \leqslant l$, mais nulle part nous ne nous sommes servis de la positivité de $k(x)$. Dès lors, on peut considérer comme démontré le

Lemme 3. *Si pour $0 \leqslant x \leqslant l$ les coefficients $k_i(x) > 0$, $k_i(x)$ et $m_{ii}(x)$ étant bornés et continus, et si $|\operatorname{Re}\lambda| \leqslant K^*$, alors la solution du système*

$$\lambda z_1 + k_1(x)\frac{dz_1}{dx} + m_{11}(x)\,z_1 = \frac{f_1^*(x)}{\lambda} + f_1(x),$$

$$\lambda z_2 - k_2(x)\frac{dz_2}{dx} + m_{22}(x)\,z_2 = \frac{f_2^*(x)}{\lambda} + f_2(x)$$

vérifie les inégalités

$$|z_1(x) - z_1(0)\,e^{-\lambda y_1(x) - \mu_1(x)}| \leqslant \frac{N}{|\lambda|}(F + F^*),$$

$$|z_2(x) - z_2(0)\,e^{\lambda y_2(x) + \mu_2(x)}| \leqslant \frac{N}{|\lambda|}(F + F^*),$$

où

$$F = \max(|f_1| + |f_1'| + |f_2| + |f_2'|),$$
$$F^* = \max(|f_1^*| + |f_2^*|),$$

$$y_i(x) = \int_0^x \frac{d\xi}{k_i(\xi)}, \qquad \mu_i(x) = \int_0^x \frac{m_{ii}(\xi)}{k_i(\xi)}\,d\xi,$$

la constante N dépendant de la grandeur des coefficients, de la longueur du segment l et de K^*. Les dérivées des coefficients ne figurent pas dans cette évaluation.

L'inégalité démontrée pour les solutions du système « désenchaîné » constitué par deux équations non liées l'une à l'autre sera posée à la base de la représentation asymptotique des solutions du système « enchaîné » envisagé.

Considérons d'abord le cas de l'enchaînement faible (pour $\lambda \to \infty$):

$$\lambda w_1 + k_1(x)\frac{dw_1}{dx} + m_{11}(x)\,w_1 + \frac{1}{|\lambda|}[n_{11}(x, \lambda)\,w_1 + n_{12}(x, \lambda)\,w_2] = \psi_1(x),$$

$$\lambda w_2 - k_2(x)\frac{dw_2}{dx} + m_{22}(x)\,w_2 + \frac{1}{|\lambda|}[n_{21}(x, \lambda)\,w_1 + n_{22}(x, \lambda)\,w_2] = \psi_2(x).$$

Les coefficients « d'enchaînement » $n_{ik}(x, \lambda)$ seront supposés continus en x et bornés. Considérant une certaine solution $w_1(x)$, $w_2(x)$ de ce système, posons

$$\max_{i,\,x} |w_i(x)| = \omega,$$

$$\max_i |w_i(0)| = \omega_0,$$

$$f_1^* = -(n_{11}w_1 + n_{12}w_2), \qquad f_1 = \psi_1,$$
$$f_2^* = -(n_{21}w_1 + n_{22}w_2), \qquad f_2 = \psi_2,$$

et utilisant le fait que $F^* = \max(|f_1^*| + |f_2^*|) \leqslant L\omega$, $|e^{-\lambda y_1 - \mu_1}| < M$, $|e^{\lambda y_2 + \mu_2}| < M$, nous sommes conduits à l'aide du lemme 3 à l'inégalité

$$\omega \leqslant M\omega_0 + \frac{N}{|\lambda|}(F + L\omega),$$

vérifiée pour les λ situés dans notre bande. Soit $|\lambda| > 2NL$. Alors

$$\omega \leqslant M\omega_0 \frac{N}{|\lambda|}F + \frac{1}{2}\omega,$$

et, par conséquent,

$$\omega \leqslant \frac{2N}{|\lambda|} F + 2M\omega_0.$$

Puis,

$$F^* \leqslant L\omega \leqslant \frac{2NL}{|\lambda|} F + 2ML\omega_0 \leqslant \frac{2NL}{2NL} F + 2ML\omega_0 = F + 2ML\omega_0.$$

Appliquant de nouveau le lemme 3, on obtient l'évaluation

$$|w_1(x) - w_1(0)\, e^{-\lambda y_1(x) - \mu_1(x)}| \leqslant \frac{N}{|\lambda|}[F + F^*] \leqslant \frac{N}{|\lambda|}[2F + 2ML\omega_0],$$

$$|w_2(x) - w_2(0)\, e^{\lambda y_2(x) + \mu_2(x)}| \leqslant \frac{N}{|\lambda|}[2F + 2ML\omega_0].$$

Ainsi, nous avons démontré le

Lemme 4. *Si pour $0 \leqslant x \leqslant l$ les coefficients $k_l(x) > 0$, $k_l x$, $m_{ll}(x)$ et $n_{ij}(x)$ sont continus et donc bornés, et si $|\operatorname{Re}\lambda| \leqslant K^*$, pour les λ suffisamment grands en module situés dans la bande indiquée, la solution du système*

$$\lambda w_1 + k_1 \frac{dw_1}{dx} + m_{11} w_1 + \frac{1}{\lambda}[n_{11} w_1 + n_{12} w_2] = \psi_1(x),$$

$$\lambda w_2 - k_2 \frac{dw_2}{dx} + m_{22} w_2 + \frac{1}{\lambda}[n_{21} w_1 + n_{22} w_2] = \psi_2(x)$$

vérifie les inégalités

$$|w_1(x) - w_1(0)\, e^{-\lambda y_1(x) - \mu_1(x)}| \leqslant \frac{Q}{|\lambda|}[F + \max(|w_1(0)|, |w_2(0)|)],$$

$$|w_2(x) - w_2(0)\, e^{\lambda y(x) + \mu_2(x)}| \leqslant \frac{Q}{|\lambda|}[F + \max(|w_1(0)|, |w_2(0)|)];$$

ici la constante Q ne dépend que des frontières des coefficients k_i, m_{ii}, n_{ij}, et F est défini comme suit :

$$F = \max_x [|\psi_1| + |\psi_2| + |\psi_1'| + |\psi_2'|].$$

Notons que jusqu'à présent nulle part nous ne nous sommes servis de la régularité des coefficients, si bien que les frontières des dérivées des coefficients ne figurent pas dans nos évaluations.

Voilà une forme à peine plus générale de systèmes faiblement enchaînés :

$$\lambda w_1 + k_1 \frac{dw_1}{dx} + \frac{1}{\lambda^2}\left[p_{11} \frac{dw_1}{dx} + p_{12} \frac{dw_2}{dx}\right] + m_{11} w_1 + \frac{1}{\lambda}[n_{11} w_1 + n_{12} w_2] = \psi_2,$$

$$\lambda w_2 - k_2 \frac{dw_2}{dx} + \frac{1}{\lambda^2}\left[p_{21} \frac{dw_1}{dx} + p_{22} \frac{dw_2}{dx}\right] + m_{22} w_2 + \frac{1}{\lambda}[n_{21} w_1 + n_{22} w_2] = \psi_2.$$

Comme pour les n_{ij}, on suppose les coefficients p_{ij} continus et bornés.

Il est clair que si l'on résout ce système par rapport à $\frac{dw_i}{dx}$, chose évidemment possible pour les λ suffisamment grands en module, on obtient des égalités du type suivant :

$$\frac{dw_1}{dx} = \lambda[A_{11} w_1 + A_{12} w_2] + B_{11}\psi_1 + B_{12}\psi_2,$$

$$\frac{dw_2}{dx} = \lambda[A_{21} w_1 + A_{22} w_2] + B_{21}\psi_1 + B_{22}\psi_2$$

avec des coefficients $A_{ik} = A_{ik}(x, \lambda)$, $B_{ik} = B_{ik}(x, \lambda)$ bornés (lorsque $\lambda \to \infty$) continus par rapport à x. Substituant ces expressions pour les dérivées dans les expressions $\frac{1}{\lambda^2}\left[p_{i1}\frac{dv_1}{dx} + p_{i2}\frac{dv_2}{dx}\right]$, on se débarrasse des termes d'un tel type en modifiant quelque peu les expressions de $n_{ik}(x, \lambda)$ et de ψ_i. Après quoi on peut appliquer le lemme 4 et s'assurer que sa formulation peut être textuellement transposée aux systèmes ayant un enchaînement de l'ordre de $1/\lambda^2$ dans les coefficients des dérivées. Il est vrai qu'on devra maintenant exiger des coefficients que leurs dérivées, soient bornées, étant donné que les dérivées B'_{kl} figureront dans les expressions des dérivées des seconds membres du système transformé.

On peut aussi obtenir des évaluations semblables pour les systèmes à enchaînement de l'ordre de $1/\lambda$ dans les coefficients des dérivées. Il nous suffira ici de nous borner aux systèmes de la forme

$$\lambda v_1 + k_1 \frac{dv_1}{dx} + \frac{p}{\lambda}\frac{dv_2}{dx} + m_{11}v_1 + \frac{1}{\lambda}[n_{11}v_1 + n_{12}v_2] = \psi_1,$$

$$\lambda v_2 - k_2 \frac{dv_2}{dx} + \frac{q}{\lambda}\frac{dv_1}{dx} + m_{22}v_2 + \frac{1}{\lambda}[n_{21}v_2 + n_{22}v_2] = \psi_2.$$

Ici, toutefois, dans les constantes de l'évaluation figureront aussi encore les dérivées de certaines combinaisons des coefficients.

Ecrivons notre système sous la forme matricielle

$$\begin{pmatrix} \lambda + m_{11} & 0 \\ 0 & \lambda + m_{12} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_1 & \frac{p}{\lambda} \\ \frac{q}{\lambda} & -k_2 \end{pmatrix}\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{\lambda}\begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$$

et faisons la substitution

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{a(x, \lambda)}{\lambda} \\ \frac{b(x, \lambda)}{\lambda} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

avec des coefficients $a(x, \lambda)$, $b(x, \lambda)$ suffisamment réguliers en x, qui seront supposés, en même temps que les dérivées par rapport à x, bornés lorsque $\lambda \to \infty$.

Il est évident que

$$\frac{d}{dx}\left[\begin{pmatrix} 1 & \frac{a}{\lambda} \\ \frac{b}{\lambda} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1 & \frac{a}{\lambda} \\ \frac{b}{\lambda} & 1 \end{pmatrix}\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{\lambda}\begin{pmatrix} 0 & a' \\ b' & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}.$$

Aussi le système d'équations pour w_1, w_2 peut-il s'écrire:

$$\begin{pmatrix} \lambda + m_{11} & 0 \\ 0 & \lambda + m_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \frac{a}{\lambda} \\ \frac{b}{\lambda} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} k_1 & \frac{p}{\lambda} \\ \frac{q}{\lambda} & -k_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \frac{a}{\lambda} \\ \frac{b}{\lambda} & 1 \end{pmatrix}\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{\lambda}\begin{pmatrix} \tilde{n}_{11} & \tilde{n}_{12} \\ \tilde{n}_{21} & \tilde{n}_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}.$$

Multiplions encore ce système à gauche par la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{a}{\lambda} \\ -\frac{b}{\lambda} & 1 \end{pmatrix}$$

et notons que

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{a}{\lambda} \\ -\frac{b}{\lambda} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda+m_{11} & 0 \\ 0 & \lambda+m_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \frac{a}{\lambda} \\ \frac{b}{\lambda} & 1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} \lambda+m_{11} & \lambda \\ 0 & \lambda+m_{22} \end{pmatrix}+\frac{1}{\lambda}\begin{pmatrix} -ab\left(1+\frac{m_{22}}{\lambda}\right) & (m_{11}-m_{22})\,a \\ (m_{22}-m_{11})\,b & -ab\left(1+\frac{m_{11}}{\lambda}\right) \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{a}{\lambda} \\ -\frac{b}{\lambda} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 & \frac{p}{\lambda} \\ \frac{q}{\lambda} & -k_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \frac{a}{\lambda} \\ \frac{b}{\lambda} & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & -k_2 \end{pmatrix}+$$

$$+\frac{1}{\lambda}\begin{pmatrix} 0 & p+a\,(k_1+k_2) \\ q-b\,(k_1+k_2) & 0 \end{pmatrix}+\frac{1}{\lambda^2}\begin{pmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} \\ \pi_{21} & \pi_{22} \end{pmatrix}+\frac{1}{\lambda^3}\begin{pmatrix} \widetilde{\pi}_{11} & \widetilde{\pi}_{12} \\ \widetilde{\pi}_{21} & \widetilde{\pi}_{22} \end{pmatrix}.$$

Comme $k_1 + k_2 > 0$, posant $a = -\frac{p(x)}{k_1(x)+k_2(x)}$, $b = \frac{q(x)}{k_1(x)+k_2(x)}$, nous sommes conduits après la transformation décrite au système « faiblement enchaîné » déjà étudié avec un « enchaînement » de l'ordre de $1/\lambda^2$ pour les dérivées premières. Il est évident que la régularité de $p(x)$, $q(x)$, $k_i(x)$ entraîne la régularité de $a(x)$, $b(x)$. Ainsi donc, appliquant l'évaluation qui nous est connue, il vient:

$$|w_1(x,\lambda)-w_1(0,\lambda)\,e^{-\lambda y_1-\mu_1}| \geqslant \frac{Q}{|\lambda|}[F+\max(|w_1(0)|,\ |w_2(0)|)],$$

$$|w_2(x,\lambda)-w_2(0,\lambda)\,e^{\lambda y_2+\mu_2}| \leqslant \frac{Q}{|\lambda|}[F+\max(|w_1(0)|,\ |w_2(0)|)].$$

Nous rappelant que

$$v_1 = w_1+\frac{a}{\lambda}w_2,$$

$$v_2 = \frac{b}{\lambda}w_1+w_2,$$

nous déduisons sans peine de là

$$|v_1(x)-v_1(0)\,e^{-\lambda y_i(x)-\mu_i(x)}| \leqslant \frac{\text{const}}{|\lambda|}[\max_{x,\,i}|\psi_i(x)|+$$

$$+\max_{x,\,i}|\psi_i'(x)|+\max_{i}|v_i(0)|],$$

$$|v_2(x)-v_2(0)\,e^{\lambda y_2(x)+\mu_2(x)}| \leqslant \frac{\text{const}}{|\lambda|}[\max_{x,\,i}|\psi_i(x)|+$$

$$+\max_{x,\,i}|\psi_i'(x)|+\max_{i}|v_i(0)|].$$

Ces évaluations constituent le contenu du lemme 5. Pour ramener à présent notre système fondamental

$$\lambda v_1 + k_1 \frac{dv_1}{dx} + m_{11} v_1 + m_{12} v_2 = \varphi_1,$$
$$\lambda v_2 - k_2 \frac{dv_2}{dx} + m_{21} v_1 + m_{22} v_2 = \varphi_2 \qquad (*)$$

à la forme déjà étudiée, écrivons la forme qui nous est connue de ces équations

$$v_1 = \frac{1}{\lambda}\left[\varphi_1 - k_1 \frac{dv_1}{dx} - m_{11} v_1 - m_{12} v_2\right],$$
$$v_2 = \frac{1}{\lambda}\left[\varphi_2 + k_2 \frac{dv_2}{dx} - m_{21} v_1 - m_{22} v_2\right],$$

puis substituons à partir de là l'expression de v_1 dans la seconde équation (*) à v_1 affecté du coefficient m_{21}. L'expression de v_2 sera substituée dans la première équation dans le terme en v_2 contenant le coefficient m_{12}.

Ceci achève la réduction du système à la forme étudiée. Ses nouveaux seconds membres sont :

$$\psi_1 = \varphi_1 - \frac{m_{12}}{\lambda}\varphi_2, \quad \psi_2 = \varphi_2 - \frac{m_{21}}{\lambda}\varphi_1.$$

Appliquant le dernier de nos lemmes, on s'assure que le théorème fondamental de ce paragraphe est démontré.

§ 30. Fonctions propres du problème aux limites

Etude dans la bande $|\operatorname{Re}\lambda| < \text{const}$ de fonctions analytiques de λ qui dépendent du paramètre x. Ces fonctions vérifient des équations différentielles ordinaires en x et des conditions aux limites. Déduction de formules asymptotiques pour la solution du problème aux limites à partir des formules pour la solution du problème de Cauchy obtenues au paragraphe précédent. La fonction $D(\lambda)$. Ses zéros sont les valeurs propres du système. $D(\lambda)$ n'a pas de zéros en dehors de la bande $|\operatorname{Re}\lambda| \leqslant K$. Comportement asymptotique des zéros de $D(\lambda)$. Prolongement analytique de la transformation de Laplace de la solution d'un système hyperbolique dans tout le plan complexe avec des pôles aux zéros de $D(\lambda)$.

Nous avons démontré au paragraphe précédent que toute solution du système d'équations

$$\lambda v_1 + k_1 \frac{dv_1}{dx} + m_{11} v_1 + m_{12} v_2 = \varphi_1,$$
$$\lambda v_2 - k_2 \frac{dv_2}{dx} + m_{21} v_1 + m_{22} v_2 = \varphi_2$$

($0 \leqslant x \leqslant l$, $k_i > 0$, k_i, m_{ik} sont bornés en même temps que leurs dérivées premières continues, φ_i, φ_i' sont continues) vérifie les inégalités

$$|v_1(x) - v_1(0)\, e^{-\lambda v_1(x) - \mu_1(x)}| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{M}{|\lambda|}\left[\max|\varphi_i(x)| + \max|\varphi_i'(x)| + \max_i |v_i(0)|\right],$$
$$|v_2(x) - v_2(0)\, e^{\lambda v_2(x) + \mu_2(x)}| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{M}{|\lambda|}\left[\max|\varphi_i(x)| + \max|\varphi_i'(x)| + \max_i |v_i(0)|\right].$$

La constante M s'évalue au moyen des coefficients du système et de leurs dérivées, les quantités $\gamma_i(x)$, $\mu_i(x)$ sont déterminées par les égalités

$$\gamma_i(x) = \int_0^x \frac{d\xi}{k_i(\xi)}, \quad \mu_i(x) = \int_0^x \frac{m_{ii}(\xi)}{k_i(\xi)}\, d\xi.$$

On suppose que le paramètre λ varie dans une certaine bande arbitraire mais fixée $|\operatorname{Re}\lambda| < K^*$.

Nous allons étudier au moyen des inégalités démontrées certaines solutions particulières de systèmes du type étudié

$$v^* = (v_1^*, v_2^*), \quad v^{(1)} = (v_1^{(1)}, v_2^{(1)}), \quad v^{(2)} = (v_1^{(2)}, v_2^{(2)}).$$

Les solutions v^*, $v^{(1)}$, $v^{(2)}$ sont déterminées par leurs données initiales et par les seconds membres du système comme suit :

1) $v_1^*(x, \lambda)$, $v_2^*(x, \lambda)$ vérifient les données initiales $v_1^*(0, \lambda) = 0$, $v_2^*(0, \lambda) = 0$ et le système homogène

$$\lambda v_1 + k_1 \frac{dv_1}{dx} + m_{11} v_1 + m_{12} v_2 = \varphi_1,$$

$$\lambda v_2 - k_2 \frac{dv_2}{dx} + m_{21} v_1 + m_{22} v_2 = \varphi_2.$$

Pour des λ suffisamment grands en module dans notre bande, on a l'évaluation

$$|v_1^*(x, \lambda)| < \frac{N}{|\lambda|},$$

$$|v_2^*(x, \lambda)| < \frac{N}{|\lambda|}.$$

2) $v_1^{(1)}(x, \lambda)$, $v_2^{(1)}(x, \lambda)$ vérifient le système homogène ($\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$) et les données initiales

$$v_1^{(1)}(0, \lambda) = 1, \quad v_2^{(1)}(0, \lambda) = 0.$$

Cette solution est ainsi évaluée :

$$|v_1^{(1)}(x, \lambda) - e^{-\lambda\gamma_1(x) - \mu_1(x)}| < \frac{N}{|\lambda|},$$

$$|v_2^{(1)}(x, \lambda)| < \frac{N}{|\lambda|}.$$

3) $v_1^{(2)}(x, \lambda)$, $v_2^{(2)}(x, \lambda)$ vérifient aussi le système homogène ($\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$). Données initiales de cette solution :

$$v_1^{(2)}(0, \lambda) = 0, \quad v_2^{(2)}(0, \lambda) = 1.$$

On a pour elle l'évaluation

$$|v_1^{(2)}(x, \lambda)| < \frac{N}{|\lambda|},$$

$$|v_2^{(2)}(x, \lambda) - e^{\lambda\gamma_2(x) + \mu_2(x)}| < \frac{N}{|\lambda|}.$$

Notons encore l'importante propriété suivante des fonctions $v_i^*(x, \lambda)$, $v_i^{(k)}(x, \lambda)$: elles sont des fonctions analytiques entières du paramètre λ. Cette analyticité est une conséquence du théorème suivant, qu'on pourra trouver, par exemple, dans le manuel de I. Pétrovski « Conférences sur la théorie des équations différentielles ordinaires ».

Supposons que, pour $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$, les coefficients $a_{ik}(x, \lambda)$ et les seconds membres $f_i(x, \lambda)$ soient des fonctions suffisamment régulières de x et des fonctions analytiques de λ pour $|\lambda - \lambda_0| < b$. Supposons aussi analytiques les $y_{i0}(\lambda)$ pour $|\lambda - \lambda_0| < b$. Alors la solution du système

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_k a_{ik} y_k + f_i,$$

$$y_i(x_0, \lambda) = y_{i0}(\lambda)$$

est, pour chaque x ($x_0 \leqslant x \leqslant x_1$), une fonction analytique de λ pour $|\lambda - \lambda_0| < b$. Si $a_{ik}(x, \lambda)$, $y_i(0, \lambda)$ sont des fonctions entières de λ, alors $y_i(x, \lambda)$ en est aussi une.

Il est évident que notre système et les données initiales pour v^*, $v^{(1)}$, $v^{(2)}$ vérifient les conditions de ce théorème, si bien que l'analyticité de $v_1^*(x, \lambda)$, $v_2^*(x, \lambda)$, $v_1^{(1)}(x, \lambda)$, $v_2^{(1)}(x, \lambda)$, $v_1^{(2)}(x, \lambda)$, $v_2^{(2)}(x, \lambda)$ découle de ce théorème. Le paramètre λ peut alors décrire le plan complexe tout entier. C'est dire que toutes les fonctions qui viennent d'être énumérées sont des fonctions entières.

La solution v_1, v_2 du système

$$\lambda v_1 + k_1 \frac{dv_1}{dx} + m_{11} v_1 + m_{12} v_2 = \varphi_1,$$

$$\lambda v_2 - k_2 \frac{dv_2}{dx} + m_{21} v_1 + m_{22} v_2 = \varphi_2,$$

prenant pour $x = 0$ les valeurs initiales (A_1, A_2), s'écrit sous la forme

$$v_1 = v_1^* + A_1 v_1^{(1)} + A_2 v_1^{(2)},$$
$$v_2 = v_2^* + A_1 v_2^{(1)} + A_2 v_2^{(2)}.$$

Voyons quels doivent être A_1, A_2 pour que v_1, v_2 vérifient les conditions aux limites

$$\alpha_1 v_1(0, \lambda) + \alpha_2 v_2(0, \lambda) = 0,$$
$$\beta_1 v_1(l, \lambda) + \beta_2 v_2(l, \lambda) = 0.$$

Pour cela, A_1, A_2 doivent vérifier le système

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 = 0,$$

$$[\beta_1 v_1^{(1)}(l, \lambda) + \beta_2 v_2^{(1)}(l, \lambda)] A_1 + [\beta_1 v_1^{(2)}(l, \lambda) + \beta_2 v_2^{(2)}(l, \lambda)] A_2 = -\beta_1 v_1^*(l, \lambda) - \beta_2 v_2^*(l, \lambda).$$

Désignant par $D(\lambda)$ le déterminant de ce système :

$$D(\lambda)=\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 v_1^{(1)}(l,\lambda)+\beta_2 v_2^{(1)}(l,\lambda) & \beta_1 v_1^{(2)}(l,\lambda)+\beta_2 v_2^{(2)}(l,\lambda) \end{vmatrix},$$

nous sommes conduits aux formules pour A_1, A_2 :

$$A_1=\frac{\alpha_2[\beta_1 v_1^*(l,\lambda)+\beta_2 v_2^*(l,\lambda)]}{D(\lambda)}=\frac{\alpha_2 a(\lambda)}{D(\lambda)},$$

$$A_2=\frac{-\alpha_1[\beta_1 v_1^*(l,\lambda)+\beta_2 v_2^*(l,\lambda)]}{D(\lambda)}=\frac{-\alpha_1 a(\lambda)}{D(\lambda)}.$$

Il est évident que $a(\lambda)$, $D(\lambda)$ sont des fonctions analytiques entières de λ. Dans la bande $|\operatorname{Re}\lambda|<\text{const}$ on a l'évaluation

$$|a(\lambda)|<\frac{N}{|\lambda|}(|\beta_1|+|\beta_2|).$$

Il est évident de même que $|D(\lambda)|<\text{const}$ dans notre bande. Ceci permet d'écrire que la solution du problème aux limites peut être mise sous la forme

$$v_1=v_1^*+A_1v_1^{(1)}+A_2v_1^{(2)}=\frac{1}{D(\lambda)}\hat{v}_1(x,\lambda),$$

$$v_2=v_2^*+A_1v_2^{(1)}+A_2v_2^{(2)}=\frac{1}{D(\lambda)}\hat{v}_2(x,\lambda)$$

avec les fonctions analytiques entières (en λ) $\hat{v}_1(x,\lambda)$, $\hat{v}_2(x,\lambda)$ vérifiant pour les $|\lambda|$ suffisamment grands ($|\operatorname{Re}\lambda|<\text{const}$) les inégalités $|\hat{v}_i|<\frac{\text{const}}{|\lambda|}$. On a pour $D(\lambda)$ dans cette même bande

$$D(\lambda)=\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 v_1^{(1)}(l,\lambda)+\beta_2 v_2^{(1)}(l,\lambda) & \beta_1 v_1^{(2)}(l,\lambda)+\beta_2 v_2^{(2)}(l,\lambda) \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 e^{-\lambda\nu_1(l)-\mu_1(l)} & \beta_2 e^{\lambda\nu_2(l)+\mu_2(l)} \end{vmatrix}+O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right)=$$

$$=\alpha_1\beta_2 e^{\lambda\nu_2(l)+\mu_2(l)}-\alpha_2\beta_1 e^{-\lambda\nu_1(l)-\mu_1(l)}+O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right).$$

Rappelons que $\alpha_1\neq 0$, $\alpha_2\neq 0$, $\beta_1\neq 0$, $\beta_2\neq 0$.

Nous dirons que le *vecteur fonction* $(v_1(x), v_2(x))$ *est vecteur fonction propre avec la valeur propre* λ_0 si v_1, v_2, *non identiquement nulles, vérifient le système homogène*

$$\lambda_0 v_1+k_1\frac{dv_1}{dx}+m_{11}v_1+m_{12}v_2=0,$$

$$\lambda_0 v_2-k_2\frac{dv_2}{dx}+m_{21}v_1+m_{22}v_2=0$$

et les conditions aux limites

$$\alpha_1 v_1(0)+\alpha_2 v_2(0)=0,$$

$$\beta_1 v_1(l)+\beta_2 v_2(l)=0.$$

Les vecteurs fonctions identiquement nuls ne sont pas considérés comme des vecteurs propres. Montrons que si $D(\lambda_0) = 0$, *il existe un vecteur fonction propre de valeur propre* λ_0. En effet, égalant à zéro le déterminant du système

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 = 0,$$

$$[\beta_1 v_1^{(1)}(l, \lambda_0) + \beta_2 v_2^{(1)}(l, \lambda_0)]\, a_1 + [\beta_1 v_1^{(2)}(l, \lambda_0) + \beta_2 v_2^{(2)}(l, \lambda_0)]\, a_2 = 0,$$

on voit que ce système a une solution non nulle a_1, a_2, c'est-à-dire qu'il existe un vecteur fonction

$$v_1(x) = a_1 v_1^{(1)}(x, \lambda_0) + a_2 v_1^{(2)}(x, \lambda_0),$$
$$v_2(x) = a_2 v_2^{(1)}(x, \lambda_0) + a_2 v_2^{(2)}(x, \lambda_0),$$

vérifiant le système homogène, les conditions aux limites et prenant au point $x = 0$ les valeurs initiales (a_1, a_2) formant un vecteur non nul.

Supposons maintenant, au contraire, $D(\lambda_0) \neq 0$. Toute solution du système homogène s'écrit sous la forme

$$v_1 = A_1 v_1^{(1)} + A_2 v_1^{(2)},$$
$$v_2 = A_1 v_2^{(1)} + A_2 v_2^{(2)}.$$

Si l'on sait que cette solution vérifie des conditions aux limites homogènes, les égalités suivantes seront alors vérifiées pour A_1 et A_2

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 = 0,$$

$$[\beta_1 v_1^{(1)}(l, \lambda_0) + \beta_2 v_2^{(1)}(l, \lambda_0)]\, A_1 + [\beta_1 v_1^{(2)}(l, \lambda_0) + \beta_2 v_2^{(2)}(l, \lambda_0)]\, A_2 = 0.$$

Etant donné que le déterminant de ce système $D(\lambda_0) \neq 0$, il en résulte que $A_1 = A_2 = 0$. Par conséquent, $v_1 \equiv v_2 \equiv 0$, et λ_0 n'est pas valeur propre.

Ainsi donc, nous avons montré que les *valeurs propres (et seulement elles) sont les zéros d'une fonction analytique entière* $D(\lambda)$. Montrons encore que pour $|\operatorname{Re}\lambda| > K$, et donc *a fortiori* pour $|\operatorname{Re}\lambda| \geqslant K^* \geqslant K$, il n'existe pas de zéros de $D(\lambda)$, c'est-à-dire de valeurs propres. Cette déduction sera faite par le raisonnement suivant, qui peut être rendu tout à fait rigoureux. Il ne sera pas mené avec rigueur ici jusqu'à la fin, et nous dirons plus tard en quoi consiste le manque de rigueur.

Soit $\lambda = \lambda_0$ un zéro de $D(\lambda)$. Comme on l'a montré, il résulte de là l'existence d'un vecteur fonction $(v_1(x), v_2(x))$ vérifiant les équations

$$\lambda_0 v_1 + k_1 \frac{dv_1}{dx} + m_{11} v_1 + m_{12} v_2 = 0,$$

$$\lambda_0 v_2 - k_2 \frac{dv_2}{dx} + m_{21} v_1 + m_{22} v_2 = 0$$

et les conditions aux limites

$$\alpha_1 v_1(0) + \alpha_2 v_2(0) = 0,$$
$$\beta_1 v_1(l) + \beta_2 v_2(l) = 0.$$

On peut s'assurer par une vérification directe que les fonctions

$$u_i(x, t) = e^{\lambda_0 t} v_i(x)$$

vérifient le système initial d'équations et ses conditions aux limites. Cette solution croît lorsque $t \to \infty$ comme $e^{t \operatorname{Re} \lambda_0}$, chose impossible pour $\operatorname{Re} \lambda_0 > K$. On déduit précisément de là que $\operatorname{Re} \lambda_0 \leqslant K$. Le manque de rigueur de cette déduction, auquel on peut d'ailleurs remédier, est que l'évaluation de la croissance des solutions comme e^{Kt} a été déduite seulement pour les données initiales suffisamment régulières, régulièrement accordées avec les conditions aux limites. Pour la solution participant à notre raisonnement on doit prendre pour données initiales

$$\varphi_i(x) = v_i(x, \lambda_0).$$

L'étude de la régularité des fonctions propres et de l'accord de cette régularité avec les conditions aux limites n'a pas été faite ici.

On démontre exactement de la même façon que $\operatorname{Re} \lambda_0 > -K$ si l'on observe que la solution

$$e^{\lambda_0 t} v_i(x, \lambda_0)$$

ne croît pas plus vite que $e^{K|t|} = e^{-Kt}$ quand $t \to -\infty$.

De la sorte, nous avons démontré que tous les zéros de $D(\lambda)$ se trouvent dans la bande $|\operatorname{Re} \lambda| < K^*$.

Nous verrons par la suite que $D(\lambda)$ n'est pas identiquement nul. On pourra déduire déjà de là que les zéros de $D(\lambda)$ sont discrètement distribués dans le plan des λ, sans points limites à distance finie, et chacun de ces zéros a une multiplicité finie. S'il n'en était pas ainsi, en vertu du théorème d'unicité des fonctions analytiques $D(\lambda)$ serait identiquement nul. Ainsi, dans chaque domaine fini de la bande des λ on a un nombre fini de zéros de $D(\lambda)$. (Chaque zéro est compté avec sa multiplicité.) Le fait que $D(\lambda) \not\equiv 0$ résulte de la formule asymptotique déduite pour les λ grands en module situés dans la bande $|\operatorname{Re} \lambda| < \text{const}$. On déduira aussi de cette formule la loi asymptotique de distribution des valeurs propres situées dans cette bande.

La formule asymptotique pour $D(\lambda)$ a été obtenue sous la forme:

$$D(\lambda) = \alpha_1 \beta_2 e^{\lambda \nu_2(l) + \mu_2(l)} - \alpha_2 \beta_1 e^{-\lambda \nu_1(l) - \mu_1(l)} + O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right)$$

$$(\alpha_1 \neq 0,\ \beta_2 \neq 0,\ \alpha_2 \neq 0,\ \beta_1 \neq 0).$$

Posant $\frac{\alpha_1\beta_2}{\alpha_2\beta_1} = e^{\nu}$ (ν est réel ou complexe suivant le signe de la fraction), on peut écrire

$$D(\lambda) = \alpha_2\beta_1 e^{-\lambda y_1(l)-\mu_1(l)}\{e^{\lambda[y_1(l)+y_2(l)]+[\mu_2(l)+\mu_1(l)]+\nu} - 1\} + \\ + O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right) = \Delta(\lambda)(e^{\lambda\varkappa+\mu+\nu} - 1) + O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right),$$

où l'on a posé

$$\Delta(\lambda) = \alpha_2\beta_1 e^{-\lambda y_1(l)-\mu_1(l)},$$

$$\varkappa = y_1(l) + y_2(l) = \int_0^l \frac{dx}{k_1(x)} + \int_0^l \frac{dx}{k_2(x)},$$

$$\mu = \mu_1(l) + \mu_2(l) = \int_0^l \frac{m_{11}(x)}{k_1(x)}\,dx + \int_0^l \frac{m_{22}(x)}{k_2(x)}\,dx,$$

$$\nu = \ln\frac{\alpha_1\beta_2}{\alpha_2\beta_1}.$$

Dans la bande $|\operatorname{Re}\lambda| < \text{const}$ le facteur $\Delta(\lambda)$ est borné en module supérieurement et inférieurement:

$$0 < \Delta_0 < |\Delta(\lambda)| < \Delta_1.$$

Envisageons à présent (dans notre bande) l'équation

$$D(\lambda) = 0,$$

$$D(\lambda) = \Delta(\lambda)(e^{\lambda\varkappa+\mu+\nu} - 1) + O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right) = 0.$$

On a d'évidence à ses racines

$$e^{\lambda\varkappa+\mu+\nu} = 1 + O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right)$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\lambda\varkappa + \mu + \nu = i2\pi p + O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right) = i2\pi p + O\left(\frac{1}{|p|}\right), \quad p = 0, \pm 1, \ldots$$

En d'autres termes,

$$\lambda_p = \frac{2ip\pi - \mu - \nu}{\varkappa} + O\left(\frac{1}{|p|}\right).$$

Nous avons montré que pour les $|\lambda|$ suffisamment grands, les zéros de $D(\lambda)$ dans notre bande ne peuvent être situés qu'au voisinage des points $\frac{2p\pi i - \mu - \nu}{\varkappa}$.

Montrons que pour p suffisamment grand on a effectivement un zéro, et un seul, de $D(\lambda)$ au voisinage d'un tel point. Prenons un rayon suffisamment petit ρ tel qu'on ait dans la circonférence

$\left|\lambda-\frac{-\mu-\nu}{\varkappa}\right|=\rho\left(\lambda=\frac{-\mu-\nu}{\varkappa}+\rho e^{i\theta}\right)$ un seul zéro de la fonction $e^{\lambda\varkappa+\mu+\nu}-1$. Il est évident que ce zéro correspond à la valeur $\lambda=\frac{-\mu-\nu}{\varkappa}$. Il est évident que dans chacune des circonférences

$$\lambda=\frac{2p\pi i-\mu-\nu}{\varkappa}+\rho e^{i\theta}$$

on aura quel que soit p entier un seul zéro $\lambda=\frac{2p\pi i-\mu-\nu}{\varkappa}$ de la fonction $\Delta(\lambda)\{e^{\lambda\varkappa+\mu+\nu}-1\}$. Sur ces circonférences l'expression entre accolades

$$e^{\lambda\varkappa+\mu+\nu}-1=e^{\varkappa\rho e^{i\theta}}-1$$

ne dépend pas de p, de sorte qu'elle est inférieurement bornée en module par une constante positive. La fonction $\Delta(\lambda)$ est elle aussi inférieurement bornée en module ($|\Delta(\lambda)|>\Delta_0$). Dès lors (sur les circonférences) tout le produit

$$|\Delta(\lambda)\{e^{\lambda\varkappa+\mu+\nu}-1\}|\geqslant b.$$

Par conséquent, d'après le théorème de Rouché, ce produit, qui diffère de $D(\lambda)$ par $O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right)$, aura pour les p suffisamment grands dans une telle circonférence autant de zéros que $D(\lambda)$. Il en résulte l'existence et la simplicité des racines de $D(\lambda)$ dans ces circonférences pour les p suffisamment grands en module.

Supposons que pour $|\lambda|=|\sigma+i\tau|=\sqrt{\sigma^2+\tau^2}>R$ tous les zéros soient simples dans la bande $|\operatorname{Re}\lambda|=|\sigma|<\text{const}$ et qu'on n'en ait qu'un seul dans les circonférences

$$\lambda=\frac{2p\pi i-\mu-\nu}{\varkappa}+\rho e^{i\theta}.$$

Dans la partie finie de la bande découpée par l'inégalité

$$|\lambda|\leqslant R$$

on a un nombre fini de zéros, étant tenu compte de leur multiplicité. Ainsi donc, le nombre de zéros dans le rectangle

$$-K^*\leqslant\sigma\leqslant K^*,$$

$$\frac{-(2p+1)\pi-\operatorname{Im}\nu}{\varkappa}\leqslant\tau\leqslant\frac{(2p+1)\pi-\operatorname{Im}\nu}{\varkappa}$$

est égal à (pour les p suffisamment grands) $2p+p_0$ (p_0 est un certain nombre entier fixe).

Soit à présent $\lambda=\sigma+i\frac{(2p+1)\pi-\operatorname{Im}\nu}{\varkappa}$ ($-K^*\leqslant\sigma\leqslant K^*$), c'est-à-dire supposons que λ parcourt un segment horizontal situé (pour les grands p) presque «au milieu» entre les deux zéros

$$\lambda_p=\frac{2ip\pi-\mu-\nu}{\varkappa}+O\left(\frac{1}{|p|}\right)\quad\text{et}\quad\lambda_{p+1}=\frac{2i(p+1)\pi-\mu-\nu}{\varkappa}+O\left(\frac{1}{|p|}\right).$$

Sur ce segment horizontal

$$e^{\lambda\varkappa+\mu+\nu}-1=e^{\sigma\varkappa+\mu}e^{\mathrm{Re}\,\nu}e^{i(2p+1)\pi}-1=-e^{\sigma\varkappa+\mathrm{Re}\,\nu+\mu}-1,$$

$$|e^{\lambda\varkappa+\mu+\nu}-1|>1,$$

$$|D(\lambda)|=|\Delta(\lambda)|\,|e^{\lambda\varkappa+\mu+\nu}-1|+O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right)>\Delta_0+O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right)\geqslant\frac{\Delta_0}{2}$$

(pour les $|p|$ suffisamment grands). A présent, rappelons-nous la représentation

$$v_l(x,\ \lambda)=\frac{\hat{v}_l(x,\ \lambda)}{D(\lambda)},\quad |\hat{v}_l(x,\ \lambda)|<\frac{\mathrm{const}}{|\lambda|},$$

obtenue au début de ce paragraphe.

Il résulte de cette représentation et de l'inégalité pour $D(\lambda)$ que sur les segments horizontaux étudiés

$$\left(\mathrm{Im}\,\lambda=\frac{(2p+1)\pi-\mathrm{Im}\,\nu}{\varkappa};\quad |\mathrm{Re}\,\lambda|\leqslant K^*\right)$$

$$v_i(x,\ \lambda)|<\frac{\mathrm{const}}{|\lambda|}.$$

Sur ce, nous terminons l'étude des fonctions $v_i(x,\ \lambda)$ déterminées dans la bande $|\mathrm{Re}\,\lambda|\leqslant K^*$ à l'aide du système d'équations différentielles dépendant du paramètre λ

$$\lambda v_1+k_1\frac{dv_1}{dx}+m_{11}v_1+m_{12}v_2=\varphi_1,$$

$$\lambda v_2-k_2\frac{dv_2}{dx}+m_{21}v_1+m_{22}v_2=\varphi_2,$$

$$0\leqslant x\leqslant l,$$

$$\alpha_1v_1(0,\ \lambda)+\alpha_2v_2(0,\ \lambda)=0,$$

$$\beta_1v_1(l,\ \lambda)+\beta_2v_2(l,\ \lambda)=0.$$

Rappelons-nous maintenant qu'au § 28, considérant la solution du système hyperbolique réversible

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}+k_1(x)\frac{\partial u_1}{\partial x}+m_{11}(x)u_1+m_{12}(x)u_2=0,$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t}-k_2(x)\frac{\partial u_2}{\partial x}+m_{21}(x)u_1+m_{22}(x)u_2=0,$$

$$u_i(x,\ 0)=\varphi_i(x),$$

$$\alpha_1u_1(0,\ t)+\alpha_2u_2(0,\ t)=0,$$

$$\beta_1u_1(l,\ t)+\beta_2u_2(l,\ t)=0,$$

croissant, avec ses dérivées, non plus vite que e^{Kt}, et ses transformées de Laplace

$$v_i(x, \lambda) = \int_0^{\infty} u_i(x, t)\, e^{-\lambda t}\, dt \qquad (\operatorname{Re}\lambda > K),$$

$$v_i(x, \lambda) = \int_0^{-\infty} u_i(x, t)\, e^{-\lambda t}\, dt \qquad (\operatorname{Re}\lambda < -K),$$

nous avons établi que ces transformées $v_i(x, \lambda)$ sont des fonctions analytiques de λ dans les demi-plans indiqués et qu'elles y vérifient les équations que nous avons étudiées pour $|\operatorname{Re}\lambda| < K^*$. Rappelons que K^* a été choisi plus grand que K. Il en résulte que la bande $|\operatorname{Re}\lambda| < K^*$ coupe chacun des demi-plans $(\operatorname{Re}\lambda > K)$, $(\operatorname{Re}\lambda < -K)$. Dans ces intersections la solution du problème aux limites pour les équations différentielles ordinaires est unique, si bien qu'elle coïncide avec la transformée de Laplace correspondante. Etant donné que les transformées de Laplace et la solution des équations différentielles ordinaires sont des fonctions analytiques de λ, et que les fonctions analytiques sont déterminées de façon unique par leurs valeurs sur n'importe quel ensemble ayant au moins un point d'accumulation à distance finie, la solution des équations différentielles ordinaires et la transformée de Laplace pour $\operatorname{Re}\lambda < -K$ peuvent être considérées comme le prolongement analytique de la transformée de Laplace pour $\operatorname{Re}\lambda > K$.

Nous avons à présent étudié minutieusement les propriétés de ce prolongement analytique. Nous avons établi que pour $\operatorname{Re}\lambda < -K^*$ ce prolongement $v_i(x, \lambda)$ satisfait à l'évaluation $|v_i(x, \lambda)| < \frac{\text{const}}{|\lambda|}$, et avons déduit pour $v_i(x, \lambda)$ dans la bande $|\operatorname{Re}\lambda| \leqslant K^*$ des formules asymptotiques suffisamment précises. A partir de ces formules, nous avons notamment montré que pour

$$|\operatorname{Re}\lambda| < K^*, \quad \operatorname{Im}\lambda = \frac{(2p+1)\pi - \operatorname{Im} v}{\varkappa}$$

les fonctions $v_i(x, \lambda) = O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right)$. Comme on l'a démontré antérieurement, ces faits entraînent la légitimité de la formule suivante d'inversion de la transformée de Laplace, écrite sous forme d'intégrale de contour

$$u_i(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Pi_p} e^{\lambda t} v_i(x, \lambda)\, d\lambda + O\left(\frac{1}{p}\right).$$

Ici le contour Π_p est la frontière du rectangle

$$|\operatorname{Re}\lambda| \leqslant K^*,$$

$$\frac{-(2p+1)\pi - \operatorname{Im} v}{\varkappa} \leqslant \operatorname{Im}\lambda \leqslant \frac{(2p+1)\pi - \operatorname{Im} v}{\varkappa},$$

qui contient, comme on le sait, $2p + p_0$ pôles de $v_i(x, \lambda)$. L'évaluation du reste $O\left(\frac{1}{p}\right)$ est ici uniforme pour tous les $0 \leqslant x \leqslant l$ et pour tout intervalle de variation du temps fini fixé $0 < t_0 \leqslant t \leqslant T$, inférieurement borné par un instant positif t_0.

§ 31. Complétude du système de fonctions propres

Rappel des faits démontrés aux paragraphes précédents sur les propriétés des $v_i(x, \lambda)$, fonctions analytiques de λ, et sur la représentation approchée de la solution du problème mixte par une intégrale de contour. Calculs de divers résidus.

La solution est approchée par la somme d'un nombre fini d'« ondes stationnaires ». Modifications dans le cas de pôles multiples. Remarques sur la possibilité d'étendre la théorie à des systèmes non réduits à la forme canonique.

Théorème de complétude des fonctions propres. Exemples montrant l'importance de la réversibilité du problème pour l'application de la méthode de Fourier.

Ayant étudié aux paragraphes précédents les propriétés analytiques de la transformée de Laplace des solutions de systèmes hyperboliques, nous disposons maintenant d'un puissant instrument pour l'étude qualitative de ces solutions. Nous allons montrer ici son utilisation.

Nous considérons le problème réversible pour le système (à coefficients réguliers)

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + k_1(x)\frac{\partial u_1}{\partial x} + m_{11}(x)u_1 + m_{12}(x)u_2 = 0,$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} \quad k_2(x)\frac{\partial u_2}{\partial x} + m_{21}(x)u_1 + m_{22}(x)u_2 = 0$$

$$k_i(x) > 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l$$

Ce problème est déterminé par les conditions aux limites

$$\alpha_1 u_1(0, t) + \alpha_2 u_2(0, t) = 0, \ \alpha_1 \neq 0, \ \alpha_2 \neq 0,$$

$$\beta_1 u_1(l, t) + \beta_2 u_2(l, t) = 0, \ \beta_1 \neq 0, \ \beta_2 \neq 0$$

et les données initiales

$$u_i(x, 0) = \varphi_i(x),$$

supposées suffisamment régulières et régulièrement accordées avec les conditions aux limites.

Nous avons montré qu'il existe un K tel que, pour $\operatorname{Re}\lambda > K$, est déterminée la transformée de Laplace $v_i(x, \lambda)$ de la solution $u_i(x, t)$:

$$v_i(x, \lambda) = \int_0^\infty u_i(x, t)\, e^{-\lambda t}\, dt.$$

Les fonctions $v_i\,(x,\ \lambda)$ admettent, en tant que fonctions analytiques de λ, un prolongement dans tout le plan de la variable complexe percé aux pôles discrètement distribués. Tous ces pôles sont situés dans la bande $|\operatorname{Re}\lambda| \leqslant K$; tous, excepté un nombre fini, sont des pôles simples, et sans points d'accumulation à distance finie. Ils sont décrits par la formule asymptotique suivante :

$$\lambda_p = \frac{2\pi i p - \mu - \nu}{\varkappa} + O\left(\frac{1}{|p|}\right), \quad \text{les } p \to \pm\infty \text{ étant des entiers.}$$

Les paramètres μ, ν, $\varkappa$ se calculent d'après les coefficients des équations et des conditions aux limites. Nous avons démontré la « formule d'inversion »

$$u_i\,(x,\ t) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Pi_p} e^{\lambda t} v_i\,(x,\ \lambda)\, d\lambda + O\left(\frac{1}{p}\right),$$

Π_p désignant la frontière du rectangle

$$|\operatorname{Re}\lambda| \leqslant K^*, \quad \frac{-(2p+1)\pi - \operatorname{Im}\nu}{\varkappa} \leqslant \operatorname{Im}\lambda \leqslant \frac{(2p+1)\pi - \operatorname{Im}\nu}{\varkappa}.$$

On a dans chaque rectangle de ce genre un nombre fini $(2p + p_0)$ de pôles des fonctions $v_i(x, \lambda)$. Ceci étant, l'intégrale sur le contour Π_p peut être remplacée par une somme finie de $2p + p_0$ termes au plus le long de contours Γ_k dont chacun contient seulement un pôle de $v_i(x, \lambda)$:

$$u_i\,(x,\ t) = \frac{1}{2\pi i} \sum_k \oint\limits_{\Gamma_k} e^{\lambda t} v_i\,(x,\ \lambda)\, d\lambda + O\left(\frac{1}{p}\right).$$

L'évaluation du reste $O\left(\frac{1}{p}\right)$ est uniforme pour tout segment temporel $[t_0,\ T]$ tel que $0 < t_0 \leqslant T$ et pour $0 \leqslant x \leqslant l$.

Pour calculer les intégrales le long des contours Γ_k, on a intérêt à appliquer la théorie des résidus. Soit $\lambda = \lambda_k$ un pôle simple de $v_i\,(x,\ \lambda)$, c'est-à-dire que $D(\lambda_k) = 0$, $D'(\lambda_k) \neq 0$. Comme on l'a démontré au paragraphe précédent, la solution du problème aux limites pour le système d'équations différentielles ordinaires peut être mise sous la forme

$$v_i\,(x,\ \lambda) = \frac{\hat{v}_i\,(x,\ \lambda)}{D\,(\lambda)},$$

les $\hat{v}_i(x, \lambda)$ étant des fonctions analytiques entières de λ. Comme les $v_i(x, \lambda)$ vérifient un système d'équations avec des seconds membres $\varphi_i(x)$, il en résulte que les $\hat{v}_i(x, \lambda)$ vérifient le système

$$\lambda\hat{v}_1 + k_1 \frac{d\hat{v}_1}{dx} + m_{11}\hat{v}_1 + m_{12}\hat{v}_2 = D\,(\lambda)\,\varphi_1,$$

$$\lambda\hat{v}_2 - k_2 \frac{d\hat{v}_2}{dx} + m_{21}\hat{v}_1 + m_{22}\hat{v}_2 = D\,(\lambda)\,\varphi_2.$$

Ceci montre que si $D(\lambda_k) = 0$, le couple $\hat{v}_1(x, \lambda)$, $\hat{v}_2(x, \lambda)$ vérifie le système homogène et les conditions aux limites.

On a montré aussi au paragraphe précédent que sous la condition $D(\lambda_k) = 0$ il existe un vecteur fonction propre — solution non nulle du système homogène vérifiant les conditions aux limites homogènes. Comme, par hypothèse, λ_k est racine simple, on a, à un facteur près, un seul vecteur fonction propre (ce qu'on observe aussitôt à partir des considérations du paragraphe précédent). Nous le désignerons, en le normalisant par un procédé quelconque, par $(v_1^{(k)}(x), v_2^{(k)}(x))$. Ainsi,

$$\hat{v}_i(x, \lambda_k) = c_k v_i^{(k)}(x).$$

A présent, il n'est guère difficile de calculer l'intégrale le long de Γ_k :

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_k} e^{\lambda t} v_i(x, \lambda)\, d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_k} \frac{e^{\lambda t} \hat{v}_i(x, \lambda)}{D(\lambda)}\, d\lambda =$$

$$= \frac{e^{\lambda_k t} \hat{v}_i(x, \lambda_k)}{D'(\lambda_k)} = \frac{c_k}{D'(\lambda_k)} e^{\lambda_k t} v_i^{(k)}(x).$$

Posons $\frac{c_k}{D'(\lambda_k)} = d_k$. De la sorte, si $D(\lambda)$ n'a pas de zéros multiples, la solution $u_i(x, t)$ de notre problème peut être mise sous la forme :

$$u_i(x, t) = \sum_{\substack{(2p+p_0 \\ \text{termes})}} d_k v_i^{(k)}(x)\, e^{\lambda_k t} + O\left(\frac{1}{p}\right)$$

l'évaluation du reste étant uniforme par rapport à x et t,

$$0 \leqslant x \leqslant l, \quad 0 < t_0 \leqslant t \leqslant T.$$

En substituant directement dans le système

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + k_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + m_{11} u_1 + m_{12} u_2 = 0,$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} - k_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} + m_{21} u_1 + m_{22} u_2 = 0$$

et dans les conditions aux limites

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 \,|_{x=0} = 0, \quad \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 \,|_{x=l} = 0$$

il est facile de s'assurer que les fonctions

$$u_i^{(k)} = v_i^{(k)}(x)\, e^{\lambda_k t}$$

sont des solutions particulières de ce système et qu'elles vérifient les conditions aux limites. De telles solutions particulières sont dites

« ondes stationnaires ». Cette appellation est due à ce que la « forme de l'onde » $v_i^{(k)}(x)$ ne dépend pas du temps, alors que son « amplitude » est déterminée par le facteur $e^{\lambda_k t}$ qui ne dépend que du temps.

On dit laconiquement que la solution peut être approchée par une somme finie d'ondes stationnaires. Sur l'exemple simple des équations de l'acoustique, la représentation de la solution par une série de fonctions propres a été démontrée dans les préliminaires (chap. I, § 7).

Nous ne préciserons pas jusqu'au bout l'énoncé dans le cas où $D(\lambda)$ a des zéros multiples. Bornons-nous à un exemple de racine double $D(\lambda_k) = 0$, $D'(\lambda_k) = 0$, $D''(\lambda_k) \neq 0$. On a alors

$$D(\lambda) = \frac{D''(\lambda_k)}{2}(\lambda - \lambda_k)^2 + \frac{D'''(\lambda_k)}{6}(\lambda - \lambda_k)^3 + \dots;$$

$$\frac{1}{D(\lambda)} = \frac{2}{D''(\lambda_k)}\frac{1}{(\lambda-\lambda_k)^2} - \frac{2D'''(\lambda_k)}{3[D''(\lambda_k)]^2}\frac{1}{\lambda-\lambda_k} + \text{fonction analytique};$$

$$e^{\lambda t} = e^{\lambda_k t} + (\lambda - \lambda_k)\, t e^{\lambda_k t} + \frac{(\lambda-\lambda_k)^2 t^2}{2} e^{\lambda_k t} + \dots;$$

$$\frac{e^{\lambda t}}{D(\lambda)} = \frac{2}{D''(\lambda_k)}\frac{e^{\lambda_k t}}{(\lambda-\lambda_k)^2} + \left[\frac{2t}{D''(\lambda)} - \frac{2D'''(\lambda_k)}{3[D''(\lambda_k)]^2}\right]\frac{e^{\lambda_k t}}{\lambda-\lambda_k} + \\ + \text{fonction analytique};$$

$$\hat{v}_i(x, \lambda) = \hat{v}_i(x, \lambda_k) + (\lambda - \lambda_k)\left[\frac{\partial \hat{v}_i(x, \lambda)}{\partial \lambda}\right]_{\lambda=\lambda_k} + \dots$$

Multiplions entre elles les deux dernières séries

$$\frac{e^{\lambda t}\hat{v}_i(x, \lambda)}{D(\lambda)} = \frac{2\hat{v}_i(x, \lambda_k)}{D''(\lambda_k)}\frac{e^{\lambda_k t}}{(\lambda-\lambda_k)^2} + \left\{\left[\frac{2t}{D''(\lambda_k)} - \frac{2D'''(\lambda_k)}{3[D''(\lambda_k)]^2}\right]\times\right.$$

$$\left.\times\, \hat{v}_i(x, \lambda_k)\, e^{\lambda_k t} + \frac{2}{D''(\lambda_k)}\frac{\partial \hat{v}_i(x, \lambda_k)}{\partial \lambda_k} e^{\lambda_k t}\right\}\frac{1}{\lambda-\lambda_k} + \\ + \text{fonction analytique de } \lambda = \frac{\text{fonction de } x,\ t}{(\lambda-\lambda_k)^2} + \\ + [te^{\lambda_k t}\tilde{v}_i^{(k)}(x) + e^{\lambda_k t}\overset{\approx}{v}_i^{(k)}(x)]\frac{1}{\lambda-\lambda_k} + \text{fonction analytique}.$$

D'où

$$u_i^{(k)}(x, t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_k} \frac{e^{\lambda t}\hat{v}_i(x, \lambda)}{D(\lambda)}\, d\lambda = te^{\lambda_k t}\tilde{v}_i^{(k)}(x) + e^{\lambda_k t}\overset{\approx}{v}_i^{(k)}(x).$$

Nous avons introduit ici les notations

$$\frac{2\hat{v}_i(x, \lambda_k)}{D''(\lambda_k)} = \tilde{v}_i^{(k)}(x),$$

$$-\frac{2D'''(\lambda_k)}{3[D''(\lambda_k)]^2}\hat{v}_i(x, \lambda_k) + \frac{2}{D''(\lambda_k)}\frac{\partial \hat{v}_i(x, \lambda_k)}{\partial \lambda_k} = \overset{\approx}{v}_i^{(k)}(x).$$

Problème 1. Démontrez que $\tilde{v}_i^{(k)}, \overset{\approx}{v}_i^{(k)}$ vérifient le système différentiel suivant:

$$\lambda_k \tilde{v}_1^{(k)} + k_1 \frac{d\tilde{v}_1^{(k)}}{dx} + m_{11}\tilde{v}_1^{(k)} + m_{12}\tilde{v}_2^{(k)} = 0,$$

$$\lambda_k \tilde{v}_2^{(k)} - k_2 \frac{d\tilde{v}_2^{(k)}}{dx} + m_{21}\tilde{v}_1^{(k)} + m_{22}\tilde{v}_2^{(k)} = 0,$$

$$v_1^{(k)} + \lambda_k \overset{\approx}{v}_1^{(k)} + k_1 \frac{d\overset{\approx}{v}_1^{(k)}}{dx} + m_{11}\overset{\approx}{v}_1^{(k)} + m_{12}\overset{\approx}{v}_2^{(k)} = 0.$$

$$\tilde{v}_2^{(k)} + \lambda_k \overset{\approx}{v}_2^{(k)} - k_2 \frac{d\overset{\approx}{v}_2^{(k)}}{dx} + m_{21}\overset{\approx}{v}_1^{(k)} + m_{22}\overset{\approx}{v}_2^{(k)} = 0$$

et les conditions aux limites

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 \tilde{v}_1^{(k)} + \alpha_2 \tilde{v}_2^{(k)} &= 0, \\ \alpha_1 v_1^{(k)} + \alpha_2 \overset{\approx}{v}_2^{(k)} &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ pour } x = 0.$$

$$\left.\begin{aligned} \beta_1 \tilde{v}_1^{(k)} + \beta_2 \tilde{v}_2^{(k)} &= 0, \\ \beta_1 \overset{\approx}{v}_1^{(k)} + \beta_2 \overset{\approx}{v}_2^{(k)} &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ pour } x = l.$$

Les fonctions $\tilde{v}_i^{(k)}$ sont à nouveau des fonctions propres, et les $\tilde{v}_i^{(k)}$ sont appelées *fonctions propres associées.*

Problème 2. Si λ_0 est racine double de l'équation caractéristique $D(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0$, n'importe quelle solution du système différentiel

$$\frac{du_1}{dt} = a_{11}u_1 + a_{12}u_2,$$

$$\frac{du_2}{dt} = a_{21}u_1 + a_{22}u_2$$

peut se mettre sous la forme

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = te^{\lambda_0 t}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + e^{\lambda_0 t}\begin{pmatrix} \tilde{v}_1 \\ \tilde{v}_2 \end{pmatrix},$$

v_i, $\tilde{v}_i$ étant la solution du système linéaire

$$\lambda_0 v_1 = a_{11}v_1 + a_{12}v_2,$$

$$\lambda_0 v_2 = a_{21}v_1 + a_{22}v_2,$$

$$v_1 + \lambda_0 \tilde{v}_1 = a_{11}\tilde{v}_1 + a_{12}\tilde{v}_2,$$

$$v_2 + \lambda_0 \tilde{v}_2 = a_{21}\tilde{v}_1 + a_{22}\tilde{v}_2.$$

Montrez que v_1, v_2 ne sont différents de zéro que si la matrice $\| a_{ik} \|$ ne peut être réduite à la forme diagonale par une transformation de similitude.

Les problèmes 1 et 2 permettent de suivre aussi bien dans le cas où $D(\lambda)$ a des racines multiples l'analogie entre nos systèmes hyperboliques et les systèmes d'équations différentielles ordinaires linéaires à coefficients constants.

L'affirmation démontrée qu'il est possible d'approcher avec la précision voulue la solution par des sommes finies d'« ondes stationnaires », c'est-à-dire par des sommes de solutions spéciales qui,

dans le cas où $D(\lambda)$ a des racines simples, ont la forme $u_i = v_i^{(k)}(x) - e^{\lambda_k t}$, constitue le résultat fondamental de ce chapitre.

La méthode de recherche de la solution du problème aux limites sous forme de superposition de telles solutions spéciales porte le nom de méthode de Fourier. De cette façon, nous avons démontré la méthode de Fourier pour un système hyperbolique réversible dans le cas de deux variables indépendantes, des restrictions déterminées ayant été imposées aux coefficients et aux conditions aux limites. C'est pour cela que nous avons développé la théorie de la transformée de Laplace dans les paragraphes de ce chapitre.

La méthode de Fourier a été étudiée en détail pour le système de l'acoustique dans les préliminaires. Pour ce système, nous avons non seulement démontré qu'une vibration arbitraire peut être représentée par la superposition d'ondes stationnaires, mais nous avons montré encore comment on peut calculer à partir des données initiales les coefficients de la décomposition.

Nous referons la même chose au paragraphe suivant pour des systèmes spéciaux de forme plus générale. Ici même nous ferons plusieurs remarques au sujet du théorème de décomposition démontré.

Rappelons que le problème étudié est supposé réversible, et que les données initiales $u_i(x, 0) = \varphi_i(x)$ doivent être suffisamment régulières et accordées avec les conditions aux limites.

Le système pour lequel la démonstration a été menée était écrit sous forme canonique. En fait, une telle affirmation subsiste pour l'approximation des solutions par des ondes stationnaires pour un système non réduit à la forme canonique, pourvu que ses coefficients ne dépendent que de x, et que sa réduction à la forme canonique (avec toutes les restrictions imposées à $k_1(x)$, $k_2(x)$ et aux conditions aux limites) soit possible. Notons encore que si les coefficients du système ne dépendent que de x, les éléments de la matrice de transformation des fonctions cherchées, ramenant ce système à la forme canonique, peuvent eux aussi être choisis de manière à ne dépendre que de x. On peut s'en assurer si l'on se rappelle le processus de réduction déjà envisagé au second chapitre. Ici nous ne nous arrêterons pas plus en détail sur cette question.

Nous allons à présent déduire du théorème d'approximation des solutions une conséquence très importante, dénommée habituellement *théorème de complétude de l'ensemble des fonctions propres (et des fonctions propres associées)*.

Supposons que le système

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + k_1(x)\frac{\partial u_1}{\partial x} + m_{11}(x)u_1 + m_{12}(x)u_2 = 0,$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} - k_2(x)\frac{\partial u_2}{\partial x} + m_{21}(x)u_1 + m_{22}(x)u_2 = 0$$

de conditions aux limites

$$\alpha_1 u_1(0, t) + \alpha_2 u_2(0, t) = 0, \quad \beta_1 u_1(l, t) + \beta_2 u_2(l, t) = 0$$

vérifie toutes les conditions d'application du théorème précédent.

En tout cas, c'est dire que pour des $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ suffisamment régulières accordées avec les conditions aux limites il existe une solution du système $(u_1(x, t), u_2(x, t))$ telle que

$$u_1(x, 0) = \varphi_1(x), \quad u_2(x, 0) = \varphi_2(x).$$

Une telle solution existe pour $t > 0$ aussi bien que pour $t < 0$. Pour $t = -\tau$ (τ est un nombre positif) cette solution prend les valeurs déterminées

$$u_1(x, -\tau) = \psi_1(x),$$
$$u_2(x, -\tau) = \psi_2(x).$$

Notons à présent que si $(u_1(x, t), u_2(x, t))$ est solution, il en est de même de

$$\tilde{u}_1 = \tilde{u}_1(x, t) = u_1(x, t-\tau),$$
$$\tilde{u}_2 = \tilde{u}_2(x, t) = u_2(x, t-\tau),$$

Cette solution vérifie pour $t = 0$ les conditions initiales

$$\tilde{u}_1(x, 0) = \psi_1(x), \quad \tilde{u}_2(x, 0) = \psi_2(x)$$

et prend pour $t = \tau$ la valeur

$$\tilde{u}_1(x, \tau) = \varphi_1(x), \quad \tilde{u}_2(x, \tau) = \varphi_2(x).$$

Il est évident qu'on peut appliquer à la solution $(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$, qui ne diffère de (u_1, u_2) que par une translation du temps, toute la théorie envisagée de la transformée de Laplace, avec toutes les conclusions découlant de cette théorie. En particulier, nous nous servirons du fait que sur tout segment temporel $0 < t_0 \leqslant t \leqslant T$ la solution $\tilde{u}_1$, $\tilde{u}_2$ peut être approchée avec la précision voulue (uniformément par rapport à x et t) par une combinaison linéaire de fonctions propres (et de fonctions propres associées), avec des coefficients qui dépendent du temps. Nous poserons $t_0 = \tau/2$, $T = 3\tau/2$. Il résulte alors de cette assertion que $(\tilde{u}_1(x, \tau), \tilde{u}_2(x, \tau))$ peut être approchée avec la précision voulue par une combinaison linéaire de fonctions propres (et de fonctions propres associées). Rappelons-nous à présent que $\tilde{u}_1(x, \tau) = \varphi_1(x)$, $\tilde{u}_2(x, \tau) = \varphi_2(x)$.

Ainsi, *quel que soit le vecteur fonction* $(\varphi_1(x), \varphi_2(x))$ *suffisamment régulier accordé avec les conditions aux limites, il peut être approché avec la précision voulue (uniformément par rapport à* x*) par une combinaison linéaire de vecteurs fonctions propres (lorsque le problème est réversible). Si l'on a des valeurs propres multiples, on devra parfois ajouter aux fonctions propres des fonctions propres associées.*

On a assez rarement affaire aux valeurs propres multiples. Ainsi, nous avons déjà montré que toutes les valeurs propres de module suffisamment grand sont simples.

Nous allons montrer à présent sur un exemple que si pour un système hyperbolique le problème étudié est irréversible, alors la solution ne peut être approchée par des « ondes stationnaires ». (Il en est aussi ainsi dans le cas général, et non seulement dans cet exemple particulier.) A titre d'exemple, envisageons le système simple constitué par une seule équation

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}=0,$$

considérée pour $0 \leqslant x \leqslant 1$, $t > 0$, avec les conditions aux limites $u(0, t) = 0$. Nous nous donnerons les conditions initiales pour $t = 0$ par la formule $u(x, 0) = x^3$. Considérant les caractéristiques $x - t = \text{const}$ de ce système, on verrait facilement que si l'on voulait résoudre le problème avec les mêmes conditions initiales pour $t < 0$, on devrait se donner les conditions aux limites non plus pour $x = 0$, mais pour $x = 1$. En outre, il est clair que, la solution ayant la forme $u = f(x - t)$, pour $t > x$ la fonction cherchée sera nulle ($u(x, t) = 0$ pour $t > x$).

Les fonctions propres d'un tel problème doivent vérifier l'équation

$$\lambda v+\frac{\partial v}{\partial x}=0$$

et la condition aux limites $v(0, \lambda) = 0$.

La solution générale de l'équation a la forme

$$v(x, \lambda) = ce^{-\lambda x}.$$

On déduit de la condition aux limites $c = 0$. Ainsi, nous avons montré que notre équation n'a pas de fonctions propres non triviales.

Supposons un instant qu'on ait trouvé un telle fonction propre et qu'elle corresponde à la valeur propre λ_0. Alors l'équation aux dérivées particlles aurait une solution de la forme

$$u(x, t) = e^{\lambda_0 t} v(x, \lambda_0),$$

correspondant à l'instant $t = 0$ à la condition initiale $u(x, 0) = v(x, \lambda_0) \not\equiv 0$. Le comportement des caractéristiques montre que pour $t > x$ $u(x, t) = 0$ (en tout cas $u(x, t) \equiv 0$ pour $t > 1$). Or, ceci contredit la représentation $u(x, t) = e^{\lambda_0 t} v(x, \lambda_0)$.

Dans le cas de problèmes irréversibles plus généraux, pour les équations hyperboliques le système peut avoir des valeurs propres, mais on ne peut approcher n'importe quelle solution par une combinaison linéaire d'« ondes stationnaires » liées à ces valeurs propres.

Cette impossibilité est due en particulier à l'absence de l'éva-

luation

$$|v_l(x, \lambda)| < \frac{\text{const}}{|\lambda|} \quad \text{pour} \quad \operatorname{Re}\lambda < -K.$$

Nous allons montrer, toujours sur cet exemple, que cette évaluation fait effectivement défaut. La fonction $v(x, \lambda)$ correspondant aux données initiales $u(x, 0) = x^3$ est solution de l'équation

$$\lambda v + \frac{dv}{dx} = x^3,$$

$$v(0, \lambda) = 0$$

et s'écrit

$$v(x, \lambda) = \frac{6e^{-\lambda x} + \lambda^3 x^3 - 3\lambda^2 x^2 + 6\lambda x - 6}{\lambda^4}.$$

Cette formule montre que lorsque $\operatorname{Re}\lambda \to -\infty$ la fonction $v(x, \lambda)$ croît exponentiellement (nous avons $x > 0$), ce qui prouve que l'évaluation $|v(x, \lambda)| < \text{const}/|\lambda|$ n'existe pas.

§ 32. Série de Fourier pour un système conservatif

Problème hyperbolique conservatif pour un système de deux équation. Intégrale d'énergie pour les solutions réelles et complexes. Espaces euclidiens complexes tendus sur les vecteurs fonctions propres. Unitarité de la transformation liée à la translation du temps. Propriétés des transformations unitaires. Déduction à partir de ces propriétés de l'orthogonalité des fonctions propres et démonstration du fait que les λ_k sont imaginaires pures. Utilisation de l'orthogonalité lors de l'approximation des données initiales par des ondes stationnaires. Formule pour les coefficients dans le développement de la solution en série de Fourier. Exemple.

Nous allons examiner dans ce paragraphe certaines propriétés remarquables des valeurs propres et des fonctions propres dans des problèmes où intervient la loi de conservation de l'énergie. Nous appellerons *conservatifs* de tels problèmes. Le problème aux limites pour le système d'équations de l'acoustique, étudié dans les préliminaires (chap. I, § 7), constitue un exemple de problème conservatif.

Considérons le système

$$a_{11}(x)\frac{\partial u_1}{\partial t} + a_{12}(x)\frac{\partial u_2}{\partial t} + b_{11}\frac{\partial u_1}{\partial x} + b_{12}\frac{\partial u_2}{\partial x} + 0 \cdot u_1 + c(x)u_2 = 0,$$

$$a_{21}(x)\frac{\partial u_1}{\partial t} + a_{22}(x)\frac{\partial u_2}{\partial t} + b_{21}\frac{\partial u_1}{\partial x} + b_{22}\frac{\partial u_2}{\partial x} - c(x)u_1 + 0 \cdot u_2 = 0$$

de matrices symétriques $\|a_{ik}(x)\|$, $\|b_{ik}\|$ ($\|a_{ik}(x)\|$ est définie positive, $\|b_{ik}\|$ est indépendante de x et est constante). La matrice $\|c_{ik}(x)\| = \begin{pmatrix} 0 & c(x) \\ -c(x) & 0 \end{pmatrix}$ est supposée antisymétrique.

Multipliant la première équation par u_1, la seconde par u_2 et ajoutant, nous sommes conduits à la forme différentielle suivante de la loi de conservation de l'énergie

$$\frac{\partial\left(\frac{a_{11}u_1^2+2a_{12}u_1u_2+a_{22}u_2^2}{2}\right)}{\partial t}+\frac{\partial\left(\frac{b_{11}u_1^2+2b_{12}u_1u_2+b_{22}u_2^2}{2}\right)}{\partial x}=0.$$

Intégrant cette égalité dans le rectangle

$$0\leqslant x\leqslant l,\quad 0\leqslant t\leqslant \tau,$$

on obtient la relation suivante

$$\frac{1}{2}\int_0^l (a_{11}u_1^2+2a_{12}u_1u_2+a_{22}u_2^2)_{t=\tau}\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^l (a_{11}u_1^2+2a_{12}u_1u_2+a_{22}u_2^2)_{t=0}\,dx-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^\tau (b_{11}u_1^2+2b_{12}u_1u_2+b_{22}u_2^2)_{x=b}\,dt+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^\tau (b_{11}u_1^2+2b_{12}u_1u_2+b_{22}u_2^2)_{x=0}\,dt.$$

Supposons en outre que les conditions aux limites $\alpha_1u_1+\alpha_2u_2=0$ pour $x=0$ et $\beta_1u_1+\beta_2u_2=0$ pour $x=l$ sont telles qu'elles entraînent l'annulation pour $x=0$, $x=l$ de la forme quadratique $b_{11}u_1^2+2b_{12}u_1u_2+b_{22}u_2^2$. En d'autres termes, supposons que les conditions aux limites assurent l'absence de flux d'énergie à travers la frontière. Ceci est possible si la forme $b_{11}u_1^2+2b_{12}u_1u_2+b_{22}u_2^2$ peut être décomposée en deux facteurs linéaires et si les conditions aux limites expriment la nullité de l'un des facteurs. Pour de telles conditions aux limites

$$\int_0^l [a_{11}u_1^2+2a_{12}u_1u_2+a_{22}u_2^2]_{t=\tau}\,dx=\int_0^l [a_{11}u_1^2+2a_{12}u_1u_2+a_{22}u_2^2]_{t=0}\,dx,$$

c'est-à-dire que l'énergie du système envisagé se conserve. Il est naturel d'appeler *conservative* la classe des problèmes décrite.

Supposons que le vecteur fonction $\{u_1, u_2\}$ soit solution complexe de notre système, vérifiant les conditions aux limites

$$\alpha_1u_1+\alpha_2u_2=0 \text{ pour } x=0,$$

$$\beta_1u_1+\beta_2u_2=0 \text{ pour } x=l.$$

Soient v_k et w_k les parties réelle et imaginaire de la fonction

$$u_k = v_k + iw_k.$$

On suppose réels les coefficients de l'équation et les coefficients des conditions aux limites. Par conséquent, en même temps que $\{u_1, u_2\}$, seront aussi solutions de notre système les vecteurs fonctions $\{v_1, v_2\}$ et $\{w_1, w_2\}$. Ils vérifient aussi les conditions aux limites considérées. Alors, comme on l'a établi, les intégrales

$$\int_0^l (a_{11}v_1^2 + 2a_{12}v_1v_2 + a_{22}v_2^2)\,dx$$

et

$$\int_0^l (a_{11}w_1^2 + 2a_{12}w_1w_2 + a_{22}w_2^2)\,dx$$

ne varient pas au cours du temps t.

Comme la somme de ces intégrales vaut

$$\int_0^l (a_{11}u_1\bar{u}_1 + a_{12}(u_1\bar{u}_2 + u_2\bar{u}_1) + a_{22}u_2\bar{u}_2)\,dx, \qquad (1)$$

nous avons par là même démontré que la forme hermitienne (1), qui est l'analogue de l'intégrale d'énergie des solutions réelles, ne varie pas au cours du temps sur les solutions complexes des problèmes conservatifs.

Montrons que la nullité de cette forme pour le vecteur fonction continu $\{u_1(x), u_2(x)\}$ entraîne les égalités $u_1(x) \equiv 0$, $u_2(x) \equiv 0$. En effet,

$$a_{11}u_1\bar{u}_1 + a_{12}(u_1\bar{u}_2 + u_2\bar{u}_1) + a_{22}u_2\bar{u}_2 = a_{11}v_1^2 + 2a_{12}v_1v_2 + a_{22}v_2^2 + a_{11}w_1^2 + 2a_{12}w_1w_2 + a_{22}w_2^2,$$

où $u_i = v_i + iw_i$. Comme, par hypothèse, la matrice a_{kl} est définie positive, la nullité de la forme (1) entraîne celle des intégrales d'énergie pour les vecteurs fonctions $\{v_1, v_2\}$ et $\{w_1, w_2\}$. Par conséquent, $v_k \equiv 0$, $w_k \equiv 0$ et

$$u_k(x) = v_k(x) + iw_k(x) \equiv 0.$$

Nous avons montré que la forme hermitienne de l'intégrale d'énergie peut être considérée comme définie positive sur les solutions complexes si elle est définie positive sur les solutions réelles.

La matrice b_{kl} a été supposée telle que l'observation de l'une des conditions aux limites entraîne l'annulation de la forme quadratique $b_{11}u_1^2 + 2b_{12}u_1u_2 + b_{22}u_2^2$. Nous avons déjà observé qu'il faut pour cela que ladite forme se décompose en deux facteurs.

Supposons de plus que ces facteurs soient différents, si bien que la signature de la forme quadratique est (1, —1). Les caractéristiques $\frac{dx}{dt} = k_1(x)$, $\frac{dx}{dt} = k_2(x)$ du système conservatif sont déterminées au moyen de l'équation

$$\det \| B - kA \| = 0 \quad (B = \| b_{ik} \|, \ A = \| a_{ik} \|).$$

On a vu en algèbre qu'il existe une matrice non dégénérée S telle que

$$S^* A S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (A \text{ est définie positive}),$$

$$S^* B S = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}.$$

Comme la signature des formes quadratiques est conservée dans un changement de base, les racines $k_1 = k_1(x)$, $k_2 = k_2(x)$ ont des signes différents. Par conséquent, si les coefficients sont suffisamment réguliers, le système conservatif peut être réduit à la forme canonique utilisée pour justifier la méthode de Fourier. On peut de même montrer que les conditions aux limites du problème conservatif vérifient les conditions requises pour l'application de la théorie développée dans les conférences précédentes. Nous ne nous arrêterons pas sur ce point.

Considérons l'espace linéaire vectoriel tendu sur N vecteurs fonctions propres de notre système conservatif. Chaque élément $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ de cet espace peut se mettre sous la forme

$$\varphi_1 = \sum_{k=1}^{N} c_k v_1^{(k)}(x),$$

$$\varphi_2 = \sum_{k=1}^{N} c_k v_2^{(k)}(x).$$

Ici $\{v_1^{(k)}(x), \ v_2^{(k)}(x)\}$ est le vecteur fonction propre correspondant à la valeur propre λ_k. Nous supposerons pour simplifier le système sans valeurs propres multiples, bien que la multiplicité ne saurait ici gêner en rien.

Faisons correspondre à l'élément $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ l'élément $\{\psi_1, \psi_2\}$ d'après la formule

$$\psi_1 = \sum_{k=1}^{N} c_k e^{\lambda_k t} v_1^{(k)}(x),$$

$$\psi_2 = \sum_{k=1}^{N} c_k e^{\lambda_k t} v_2^{(k)}(x).$$

Cette correspondance peut s'interpréter comme suit. Construisons d'après les données initiales (pour $t = 0$) φ_1, φ_2 la solution du système étudié, puis considérons la valeur de cette solution pour

$t = \tau$. Cette valeur sera précisément le vecteur fonction $\{\psi_1, \psi_2\}$. Nous avons démontré que

$$\int_0^t [a_{11}\varphi_1\bar{\varphi}_2 + a_{12}(\varphi_1\bar{\varphi}_2 + \varphi_2\bar{\varphi}_1) + a_{22}\varphi_2\bar{\varphi}_2]\,dx =$$

$$= \int_0^l [a_{11}\psi_1\bar{\psi}_2 + a_{12}(\psi_1\bar{\psi}_2 + \bar{\psi}_1\psi_2) + a_{22}\psi_2\bar{\psi}_2]\,dx.$$

On peut aussi facilement se rendre compte que $e^{\lambda_k\tau} \neq e^{\lambda_p\tau}$ pour les τ suffisamment petits si $\lambda_k \neq \lambda_p$. En effet, comme $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N$ sont un nombre fini de valeurs propres distinctes, il existe $\max |\lambda_p - \lambda_k| = \Delta$. Prenons $\tau < \frac{2\pi}{\Delta}$. Alors $|\lambda_p\tau - \lambda_k\tau| < 2\pi$, et par conséquent,

$$\frac{e^{\lambda_p\tau}}{e^{\lambda_k\tau}} = e^{\lambda_p\tau - \lambda_k\tau} \neq 1, \quad e^{\lambda_p\tau} \neq e^{\lambda_k\tau}.$$

La transformation $\{\varphi_1, \varphi_2\} \to \{\psi_1, \psi_2\}$ est une transformation linéaire, et les nombres $e^{\lambda_k\tau}$ sont ses valeurs propres. Les vecteurs propres qui leur correspondent sont les vecteurs fonctions propres correspondants.

Introduisons dans notre espace vectoriel à dimension finie le produit scalaire complexe

$$(\theta, \varphi) = \int_0^l [a_{11}\theta_1\bar{\varphi}_1 + a_{12}(\theta_1\bar{\varphi}_2 + \theta_2\bar{\varphi}_1) + a_{22}\theta_2\bar{\varphi}_2]\,dx.$$

Il est facile de s'assurer que

1° $(\theta, \varphi) = \overline{(\varphi, \theta)}$,

2° $(\lambda\theta, \varphi) = \lambda(\theta, \varphi)$,

3° $(\theta + \tilde{\theta}, \varphi) = (\theta, \varphi) + (\tilde{\theta}, \varphi)$,

4° $(\theta, \theta) \geqslant 0$, la nullité n'ayant lieu que pour $\theta \equiv 0$.

Nous avons récemment vérifié la dernière assertion.

Les propriétés 1°-4° sont les axiomes du produit scalaire dans l'espace euclidien complexe. La loi de conservation de l'énergie lors de la transformation

$$\varphi = \{\varphi_1, \varphi_2\} \to \psi = \{\psi_1, \psi_2\}$$

peut être interprétée à présent comme la conservation du carré scalaire d'un vecteur dans la transformation linéaire envisagée: $(\varphi, \varphi) = (\psi, \psi)$. Une transformation possédant cette propriété est dite unitaire. Il est facile de vérifier que les valeurs propres d'une trans-

formation unitaire U sont égales à 1 en module. En effet, soit $U\varphi = \mu\varphi$. Alors, en vertu de l'unitarité, $(U\varphi, U\varphi) = (\varphi, \varphi)$. Par ailleurs,

$$(U\varphi, U\varphi) = (\mu\varphi, \mu\varphi) = \mu\,(\varphi, \mu\varphi) = \mu\,\overline{(\mu\varphi, \varphi)} = \mu\cdot\bar{\mu}\,\overline{(\varphi, \varphi)}.$$

Le carré scalaire (φ, φ) est réel et positif, si bien que $\overline{(\varphi, \varphi)} = (\varphi, \varphi)$. On voit que $(\varphi, \varphi) = \mu\cdot\bar{\mu}\,(\varphi, \varphi)$, et donc $\mu\cdot\bar{\mu} = 1$, $|\mu| = 1$.

Dans notre cas les valeurs propres sont $e^{\tau p^{\lambda}}$. Il résulte de la condition $|e^{\lambda p^{\tau}}| = 1$ que $\lambda_p\tau$ est un nombre imaginaire pur. Il est évident que λ_p sera aussi purement imaginaire. Nous avons démontré que pour les systèmes conservatifs envisagés toutes les valeurs propres λ_p sont situées sur l'axe imaginaire.

Montrons encore que les fonctions propres correspondant à des valeurs propres distinctes sont orthogonales au sens du produit scalaire introduit. Notons d'abord que les égalités

$$(U\varphi, U\varphi) = (\varphi, \varphi), \quad (U\psi, U\psi) = (\psi, \psi)$$

entraînent

$$(U\varphi, U\psi) = (\varphi, \psi).$$

En effet,

$$(U(\varphi + \psi), U(\varphi + \psi)) = (U\varphi, U\varphi) + (U\psi, U\psi) + (U\varphi, U\psi) + (U\psi, U\varphi),$$

$$(U(\varphi + i\psi), U(\varphi + i\psi)) = (U\varphi, U\varphi) + (U\psi, U\psi) - i(U\varphi, U\psi) + i(U\psi, U\varphi).$$

Par ailleurs,

$$(U(\varphi + \psi), U(\varphi + \psi)) = (\varphi + \psi, \varphi + \psi) = (\varphi, \varphi) + (\psi, \psi) + (\varphi, \psi) + (\psi, \varphi),$$

$$(U(\varphi + i\psi), U(\varphi + i\psi)) = (\varphi + i\psi, \varphi + i\psi) = (\varphi, \varphi) + (\psi, \psi) - i(\varphi, \psi) + i(\psi, \varphi),$$

$$(U\varphi, U\varphi) = (\varphi, \varphi), \quad (U\psi, U\psi) = (\psi, \psi).$$

On trouve en rapprochant toutes ces égalités

$$(U\varphi, U\psi) + (U\psi, U\varphi) = (\varphi, \psi) + (\psi, \varphi), \tag{2}$$

$$-i(U\varphi, U\psi) + i(U\psi, U\varphi) = -i(\varphi, \psi) + i(\psi, \varphi). \tag{3}$$

Ajoutant à l'identité (2) l'identité (3) multipliée par i, on obtient l'égalité

$$2(U\varphi, U\psi) = 2(\varphi, \psi).$$

L'assertion $(U\varphi, U\psi) = (\varphi, \psi)$ est démontrée. Soit à présent $U\varphi = \mu_1\varphi$, $U\psi = \mu_2\psi$, avec $\mu_1 \neq \mu_2$. On sait déjà que $\mu_1\bar{\mu}_1 = 1$, $\mu_2\bar{\mu}_2 = 1$.

L'inégalité $\frac{\mu_1}{\mu_2} \neq 1$ peut s'écrire sous la forme $\mu_1\bar{\mu}_2 \neq 1$. Utilisons l'identité

$$(U\varphi,\ U\psi) = (\varphi,\ \psi).$$

Par hypothèse,

$$(U\varphi,\ U\psi) = (\mu_1\varphi,\ \mu_2\psi) = \mu_1\bar{\mu}_2\,(\varphi,\ \psi) = (\varphi,\ \psi).$$

Cette égalité n'est possible que si $\mu_1\bar{\mu}_2 = 1$ ou si $(\varphi,\ \psi) = 0$. Par hypothèse, on ne peut avoir $\mu_1\bar{\mu}_2 = 1$, si bien que $(\varphi,\ \psi) = 0$. L'orthogonalité des fonctions propres est démontrée.

Lorsque le problème conservatif a des valeurs propres multiples, la transformation $u_i(x,\ 0) \to u_i(x,\ \tau)$ ne cesse pas d'être unitaire. On peut montrer à l'aide des procédés usuels de l'algèbre linéaire qu'on n'a pas dans ce cas de fonctions associées, et qu'à chaque valeur propre de multiplicité r correspondent r vecteurs fonctions linéairement indépendants. Etant donné que n'importe quelle combinaison linéaire de vecteurs fonctions propres correspondant à une même valeur propre est aussi vecteur fonction propre avec la même valeur propre, on peut prendre pour ces vecteurs fonctions propres une base orthogonale. Rappelons en l'occurrence que les valeurs propres multiples sont en nombre fini et que chacune d'elles est de multiplicité finie. Les vecteurs fonctions propres correspondant à des valeurs propres distinctes sont, d'après la démonstration faite ci-dessus, automatiquement orthogonaux.

Il est commode de se servir de l'orthogonalité de la base formée avec les vecteurs fonctions propres pour l'approximation des données initiales. Supposons qu'on veuille approcher le vecteur propre initial $\varphi = \{\varphi_1(x),\ \varphi_2(x)\}$ au moyen d'une combinaison linéaire finie de vecteurs fonctions propres $\sum_{k=1}^{N} c_k v^{(k)}(x)$ $(v^{(k)} = \{v_1^{(k)},\ v_2^{(k)}\})$. Il est naturel de déterminer les coefficients c_k à partir de la condition de minimum d'incompatibilité $\delta = \varphi - \sum_{k=1}^{N} c_k v^{(k)}$. Pour mesurer la grandeur de l'incompatibilité Δ il est commode d'utiliser notre produit scalaire:

$$\Delta = \|\delta\|^2 = (\delta,\ \delta) = (\varphi,\ \varphi) - \sum \bar{c}_k\,(\varphi,\ v^{(k)}) -$$
$$- \sum c_k\,(v^{(k)},\ \varphi) + \sum c_i\bar{c}_k\,(v^{(i)},\ v^{(k)}) =$$
$$= (\varphi,\ \varphi) - \sum_{k=1}^{N} \bar{c}_k\,(\varphi,\ v^{(k)}) - \sum_{k=1}^{N} c_k\,\overline{(\varphi,\ v^{(k)})} + \sum_{k=1}^{N} c_k\bar{c}_k\,(v^{(k)},\ v^{(k)}) =$$
$$= (\varphi,\varphi) + \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{(v^{(k)},\ v^{(k)})}\,|c_k\,(v^{(k)},\ v^{(k)}) - (\varphi,\ v^{(k)})|^2 - \sum_{k=1}^{N} \frac{|(\varphi,\ v^{(k)})|^2}{(v^{(k)},\ v^{(k)})}.$$

Ceci montre que Δ prend sa valeur minimum pour

$$c_k = \frac{(\varphi, v^{(k)})}{(v^{(k)}, v^{(k)})}.$$

Nous pouvons à présent retourner à la question de la détermination des coefficients dans le développement de la solution en série de Fourier, laquelle série a été obtenue au paragraphe précédent. Nous y avons montré qu'on a pour la solution la formule

$$u(x, t) = \sum_1^N d_k v^{(k)}(x)\, e^{\lambda_k t} + O\left(\frac{1}{N}\right),$$

les $v^{(k)}(x) = \{v_1^{(k)}(x), v_2^{(k)}(x)\}$ étant les fonctions propres et les λ_k les valeurs propres de notre problème. Le reste, il est vrai, n'a été évalué que pour $0 < t_0 \leqslant t \leqslant T$. Mais si l'on tient compte de la réversibilité du problème, on peut prendre pour origine des temps $t = -\tau$ avec les données initiales $u(x, -\tau)$, de sorte qu'on peut considérer que l'évaluation est uniforme pour $0 \leqslant t \leqslant T$. Notamment,

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \sum_1^N d_k v^{(k)}(x) + O\left(\frac{1}{N}\right).$$

Si le problème est conservatif, multipliant cette inégalité scalairement par $v^{(k)}(x)$ (au sens de notre produit scalaire), on obtient

$$(\varphi, v^{(k)}) = d_k (v^{(k)}, v^{(k)}) + O\left(\frac{1}{N}\right)$$

ou, N étant arbitraire,

$$d_k = \frac{(\varphi, v^{(k)})}{(v^{(k)}, v^{(k)})}.$$

En d'autres termes, les d_k sont les coefficients de Fourier du développement du vecteur fonction initial suivant les fonctions propres de la transformation unitaire U.

On obtient au total la formule définitive pour la solution du problème avec les données initiales régulières accordées $\varphi(x) = \{\varphi_1(x), \varphi_2(x)\}$:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^N \frac{(\varphi, v^{(k)})}{(v^{(k)}, v^{(k)})} v^{(k)}(x)\, e^{\lambda_k t} + O\left(\frac{1}{N}\right).$$

Le système acoustique considéré dans les préliminaires

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x}=0,$$

$$\frac{\partial p}{\partial t}+\rho_0 c_0^2\frac{\partial u}{\partial x}=0,$$

$$u(0,\ t)=u(l,\ t)=0$$

est un cas particulier de problème conservatif. Ses vecteurs fonctions propres sont $\left\{i\sin\frac{k\pi x}{l},\ -\rho_0 c_0\cos\frac{k\pi x}{l}\right\}$, ses valeurs propres sont $\lambda_k=i\frac{k\pi}{l}c_0$, le produit scalaire est $\int\limits_0^l\left(\rho_0 u_1\overline{u}_2+\frac{p_1\overline{p}_2}{\rho_0 c_0^2}\right)dx$, et la formule de la solution a la forme

$$u(x,\ t)=\sum_{k=1}^{N}c_k i\sin\frac{k\pi x}{l}e^{i\frac{k\pi}{l}c_0 t}+O\left(\frac{1}{N}\right),$$

$$p(x,\ t)=\sum_{k=1}^{N}c_k\left(-\rho_0 c_0\cos\frac{k\pi x}{l}\right)e^{i\frac{k\pi}{l}c_0 t}+O\left(\frac{1}{N}\right),$$

où

$$c_k=-\frac{1}{l}\int\limits_0^l\left\{i\sin\frac{k\pi x}{l}u(x,\ 0)+\frac{1}{\rho_0 c_0}\cos\frac{k\pi x}{l}p(x,\ 0)\right\}dx.$$

§ 33. Système auto-adjoint du second ordre

Sa réduction à un système symétrique du premier ordre. Ce système est conservatif. Energies « cinétique » et « potentielle » pour les solutions de ce système. Vecteurs fonctions propres et valeurs propres du problème aux limites correspondant pour le système d'équations différentielles ordinaires. Les fonctions propres sont orthogonales en métrique « potentielle » et en métrique « cinétique ». Formules pour la solution approchée du problème. Remarques sur la méthode de Ritz.

Nous terminerons l'étude de la méthode de Fourier en examinant une certaine classe de problèmes typiques auxquels cette méthode s'applique. Cet examen montrera une des directions importantes dans lesquelles peut être élargie la théorie illustrée sur un exemple simple.

Nous allons envisager un système symétrique auto-adjoint du second ordre

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}(x)\frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{k=1}^{n}b_{ik}(x)\frac{\partial u_k}{\partial x}\right),\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Les matrices $\| a_{ik}(x) \|$, $\| b_{ik}(x) \|$ sont supposées ici symétriques et (toutes deux) définies positives.

Nous supposerons les conditions aux limites pour $x = 0$ et $x = l$ données sous la forme suivante :

$$\sum_k b_{ik}(0) \frac{\partial u_k}{\partial x} = \sum_k \sigma_{ik} u_k \quad \text{pour} \quad x = 0,$$

$$\sum_k b_{ik}(l) \frac{\partial u_k}{\partial x} = -\sum_k \varepsilon_{ik} u_k \quad \text{pour} \quad x = l$$

avec des matrices carrées σ_{ik}, ε_{ik} définies non négatives.

Les données initiales pour $t = 0$ doivent être choisies pour ce système comme suit :

$$u_{(k)}(x, 0) = \varphi_k(x),$$

$$\left.\frac{\partial u_k}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi_k(x).$$

Nous nous proposons maintenant de montrer comment on peut ramener ce problème à un problème conservatif pour un système d'équations du premier ordre contenant deux fois plus d'équations que le système initial du second ordre. La propriété de ce système d'être conservatif sera la garantie de sa réversibilité, moyennant laquelle on pourra montrer que la méthode de Fourier s'applique.

Introduisons les notations

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} = v_k,$$

$$\sum_k b_{ik}(x) \frac{\partial u_k}{\partial x} = w_i. \tag{1}$$

Désignons la matrice $\| b_{ik} \|^{-1}$ par $\| c_{ik}(x) \|$. Il est facile de vérifier que $\| c_{ik} \|$ est aussi symétrique et définie positive. Son utilisation permet d'écrire les identités

$$\sum_i c_{ri} b_{ik} = \delta_k^r \text{ (symbole de Kronecker)},$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial x} = \sum_k c_{ik}(x) w_k.$$

Dérivées par rapport à t, ces dernières égalités conduisent aux équations

$$\sum_k c_{ik}(x) \frac{\partial w_k}{\partial t} = \frac{\partial v_i}{\partial x}.$$

Les équations initiales, elles, se recopient sous la forme suivante :

$$\sum_k a_{ik}(x) \frac{\partial v_k}{\partial t} = \frac{\partial w_i}{\partial x}.$$

Réunissant les équations de ces deux types, nous sommes conduits au système symétrique

$$\sum_k a_{ik}(x)\frac{\partial v_k}{\partial t}=\frac{\partial w_i}{\partial x},$$

$$\sum_k c_{ik}(x)\frac{\partial w_k}{\partial t}=\frac{\partial v_i}{\partial x},$$

qui, compte tenu de la substitution (1), équivaut au système initial. Après multiplication des équations du système obtenu par v_i et w_i respectivement, addition et intégration sur un domaine de frontière Γ régulière par morceaux, on obtient l'intégrale d'énergie (cf. § 9):

$$\oint_\Gamma \frac{1}{2}\left(\sum_{i,k} a_{ik}v_iv_k+\sum_{i,k} c_{ik}w_iw_k\right)dx+\left(\sum_i v_iw_i\right)dt=0.$$

La forme quadratique $\frac{1}{2}\sum_{i,k} a_{ik}v_iv_k=\frac{1}{2}\sum_{i,k} a_{ik}\frac{\partial u_i}{\partial t}\frac{\partial u_k}{\partial t}$ correspond, pour ainsi dire, à l'énergie «cinétique», et la forme

$$\frac{1}{2}\sum_{i,k} c_{ik}w_iw_k=\frac{1}{2}\sum_i w_i\left(\sum_r c_{ir}w_r\right)=\frac{1}{2}\sum_i w_i\frac{\partial u_i}{\partial x}=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i,k} b_{ik}\frac{\partial u_i}{\partial x}\cdot\frac{\partial u_k}{\partial x}$$

à l'énergie « potentielle ». Nous avons écrit « cinétique » et « potentielle » entre guillemets pour souligner qu'il s'agit d'équations d'une certaine classe générale pour laquelle les notions d'énergies cinétique et potentielle ne peuvent avoir qu'un sens conventionnel.

Il résulte des conditions aux limites pour $x=0$ que

$$\sum_k b_{ik}(0)\frac{\partial u_k}{\partial x}\Big|_{x=0}=w_i\Big|_{x=0}=\sum_k \sigma_{ik}u_k\Big|_{x=0},$$

$$\sum_i w_iv_i\,|_{x=0}=\sum_{i,k}\sigma_{ik}u_k\frac{\partial u_i}{\partial t}\Big|_{x=0}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\sum_{i,k}\sigma_{ik}u_iu_k\Big|_{x=0}.$$

On déduit de même des conditions aux limites pour $x=l$

$$\sum_i w_iv_i\Big|_{x=l}=-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\sum_{i,k} e_{ik}u_i\cdot u_k\Big|_{x=l}.$$

D'où

$$\int_{t_1}^{t_2}\sum_i v_iw_i\Big|_{x=0}dt=\left(\frac{1}{2}\sum_{i,k}\sigma_{ik}u_iu_k\right)_{\substack{x=0\\t=t_2}}-\left(\frac{1}{2}\sum_{i,k}\sigma_{ik}u_iu_k\right)_{\substack{x=0\\t=t_1}},$$

$$-\int_{t_1}^{t_2}\sum v_iw_i\Big|_{x=l}dt=\left(\frac{1}{2}\sum_{i,k}e_{ik}u_iu_k\right)_{\substack{x=l\\t=t_1}}-\left(\frac{1}{2}\sum_{i,k}e_{ik}u_iu_k\right)_{\substack{x=l\\t=t_2}}.$$

Utilisant ces identités dans l'intégrale d'énergie pour le rectangle $0 \leqslant x \leqslant l$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, on aboutit à la loi de conservation suivante :

$$\frac{1}{2}\sum_{i,k}\sigma_{ik}u_iu_k\Big|_{\substack{x=0\\t=t_2}} + \frac{1}{2}\int_0^l \Big(\sum_{i,k}a_{ik}v_iv_k + \sum_{i,k}c_{ik}w_iw_k\Big)_{t=t_2}dx + \\ + \frac{1}{2}\sum_{i,k}\varepsilon_{ik}u_iu_k\Big|_{\substack{x=l\\t=t_2}} = \frac{1}{2}\sum_{i,k}\sigma_{ik}u_iu_k\Big|_{\substack{x=0\\t=t_1}} + \frac{1}{2}\sum_{i,k}\varepsilon_{ik}u_iu_k\Big|_{\substack{x=l\\t=t_1}} + \\ + \frac{1}{2}\int_0^l \Big(\sum_{i,k}a_{ik}v_iv_k + \sum_{i,k}c_{ik}w_iw_k\Big)_{t=t_1}dx.$$

Dans cette loi, à l'énergie «potentielle» ont été ajoutés les termes $\frac{1}{2}\sum_{i,k}\sigma_{ik}u_iu_k\Big|_{x=0}$, $\frac{1}{2}\sum\varepsilon_{ik}u_iu_k\Big|_{x=l}$, qui représentent la «réserve d'énergie élastique» des conditions aux limites.

L'identité obtenue peut être interprétée comme une certaine condition généralisée de conservation, assurant l'unitarité de la transformation de la solution lors de la transition de $t = t_1$ à $t = t_2$. A partir de là, ainsi qu'au paragraphe précédent, il n'est pas difficile de démontrer que les valeurs propres des équations différentielles

$$\lambda\sum_k a_{ik}v_k = \frac{dw_i}{dx},$$

$$\lambda\sum_k c_{ik}w_k = \frac{dv_i}{dx},$$

$$\lambda u_k = v_k$$

sont, pour nos conditions aux limites, purement imaginaires, le système des fonctions propres étant orthonormé au sens de la métrique donnée par la formule hermitienne

$$\frac{1}{2}\sum_{i,k}\sigma_{ik}u_i\bar{u}_k\Big|_{x=0} + \frac{1}{2}\int_0^l\Big(\sum_{i,k}a_{ik}v_i\bar{v}_k + \sum_{i,k}c_{ik}w_i\bar{w}_k\Big)dx + \\ + \frac{1}{2}\sum_{i,k}\varepsilon_{ik}u_i\bar{u}_k\Big|_{x=l}.$$

Cependant, cette orthogonalité n'est pas ordinairement utilisée lors de l'approximation des données initiales par des combinaisons de fonctions propres. Le fait est que les fonctions propres peuvent être considérées comme étant orthogonales dans une métrique plus simple, qui n'est liée qu'à la matrice de l'énergie « cinétique » $\|a_{ik}\|$. Nous allons montrer à l'instant comment on peut aboutir à une telle conclusion.

Recopiant les équations

$$\sum_k c_{ik}\lambda w_k = \frac{dv_i}{dx}$$

sous la forme

$$\lambda w_i = \sum_k b_{ik}\frac{dv_k}{dx},$$

puis substituant cette expression de λw_i dans les égalités

$$\lambda^2 \sum_k a_{ik}v_k = \frac{d\lambda w_i}{dx},$$

on obtient les équations du second ordre :

$$\lambda^2 \sum_k a_{ik}v_k = \frac{d}{dx}\left(\sum_k b_{ik}\frac{dv_k}{dx}\right).$$

Les valeurs propres λ étant purement imaginaires, λ^2 doit être réel négatif. Posons $\lambda^2 = -\mu$.

Nous avons établi que les fonctions propres doivent vérifier les équations aux coefficients réels

$$\frac{d}{dx}\left[\sum_{i,\,k} b_{ik}(x)\frac{dv_k}{dx}\right] + \mu \sum_k a_{ik}(x)\,v_k = 0.$$

Les conditions aux limites

$$\sum_k b_{ik}(0)\frac{du_k}{dx} = \sum \sigma_{ik}u_k \quad (\text{pour } x=0),$$

$$\sum_k b_{ik}(l)\frac{du_k}{dx} = -\sum_k \varepsilon_{ik}u_k \quad (\text{pour } x=l)$$

peuvent s'écrire pour nos fonctions propres, compte tenu des égalités $\lambda u_k = v_k$, comme suit :

$$\sum_k b_{ik}(0)\frac{dv_k}{dx} = \sum_k \sigma_{ik}v_k \quad (\text{pour } x=0),$$

$$\sum_k b_{ik}(l)\frac{dv_k}{dx} = -\sum_k \varepsilon_{ik}v_k \quad (\text{pour } x=l).$$

On voit que les équations pour les vecteurs fonctions propres $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ et leurs conditions aux limites sont réelles. D'où la possibilité de considérer comme réels les $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$.

Montrons que les vecteurs fonctions propres

$$v^{(1)} = \{v_1^{(1)}, v_2^{(1)}, \ldots, v_n^{(1)}\},$$

$$v^{(2)} = \{v_1^{(2)}, v_2^{(2)}, \ldots, v_n^{(2)}\}$$

correspondant à différentes valeurs propres μ_1, μ_2 ($\mu_1 \neq \mu_2$) sont orthogonaux au sens du produit scalaire

$$(v^{(1)}, v^{(2)}) = \int_0^l \left(\sum_{i,\,k} a_{ik} v_i^{(1)} v_k^{(2)} \right) dx.$$

Ecrivons pour cela les équations vérifiées par $v^{(1)}$, $v^{(2)}$:

$$\frac{d}{dx}\left[\sum_k b_{ik} \frac{dv_k^{(1)}}{dx} \right] + \mu_1 \sum_k a_{ik} v_k^{(1)} = 0,$$

$$\frac{d}{dx}\left[\sum_k b_{ik} \frac{dv_k^{(2)}}{dx} \right] + \mu_2 \sum_k a_{ik} v_k^{(2)} = 0.$$

Multiplions la i-ème équation pour $v^{(1)}$ par $v_i^{(2)}$ et la i-ème équation pour $v^{(2)}$ par $v_i^{(1)}$, retranchons-les l une de l'autre et faisons la sommation sur tous les i :

$$\sum_i \left[v_i^{(2)} \frac{d}{dx}\left(\sum_k b_{ik} \frac{dv_k^{(1)}}{dx} \right) - v_i^{(1)} \frac{d}{dx}\left(\sum_k b_{ik} \frac{dv_k^{(2)}}{dx} \right) \right] +$$

$$+ (\mu_1 - \mu_2) \sum_{i,\,k} a_{ik} v_i^{(1)} v_k^{(2)} = 0.$$

L'expression entre crochets peut être transformée comme suit :

$$\left[v_i^{(2)} \frac{d}{dx}\left(\sum_k b_{ik} \frac{dv_k^{(1)}}{dx} \right) - v_i^{(1)} \frac{d}{dx}\left(\sum_k b_{ik} \frac{dv_k^{(2)}}{dx} \right) \right] =$$

$$= \frac{d}{dx}\left[v_i^{(2)} \sum_k b_{ik} \frac{dv_k^{(1)}}{dx} - v_i^{(1)} \sum_k b_{ik} \frac{dv_k^{(2)}}{dx} \right] -$$

$$- \sum_k b_{ik} \frac{dv_k^{(1)}}{dx} \frac{dv_i^{(2)}}{dx} + \sum_k b_{ik} \frac{dv_k^{(2)}}{dx} \frac{dv_i^{(1)}}{dx}.$$

Après la sommation sur i les deux dernières sommes se réduisent et il vient

$$\frac{d}{dx}\left[\sum_{i,\,k} b_{ik} \left(v_i^{(2)} \frac{dv_k^{(1)}}{dx} - v_i^{(1)} \frac{dv_k^{(2)}}{dx} \right) \right] + (\mu_1 - \mu_2) \sum_{i,\,k} a_{ik} v_i^{(1)} v_k^{(2)} = 0.$$

Intégrons cette égalité sur x de 0 à l :

$$(\mu_1 - \mu_2) \int_0^l \sum_{i,\,k} a_{ik} v_i^{(1)} v_k^{(2)}\, dx + \left[\sum_{i,\,k} b_{ik} \left(v_i^{(2)} \frac{dv_k^{(1)}}{dx} - v_i^{(1)} \frac{dv_k^{(2)}}{dx} \right) \right]_0^l = 0.$$

En vertu des conditions aux limites, pour $x=0$

$$\sum_{i,\ k} b_{ik}v_i^{(2)}\frac{dv_k^{(1)}}{dx}=\sum_i v_i^{(2)}\sum_k b_{ik}\frac{dv_k^{(1)}}{dx}=\sum_i v_i^{(2)}\sum_k \sigma_{ik}v_k^{(1)}=\sum_{i,\ k}\sigma_{ik}v_i^{(2)}v_k^{(1)},$$

$$\sum_{i,\ k} b_{ik}v_i^{(1)}\frac{dv_k^{(2)}}{dx}=\sum_{i,\ k}\sigma_{ik}v_i^{(1)}v_k^{(2)}=\sum_{i,\ k}\sigma_{ik}v_i^{(2)}v_k^{(1)},$$

$$\left[\sum_{i,\ k} b_{ik}\left(v_i^{(2)}\frac{dv_k^{(1)}}{dx}-v_i^{(1)}\frac{dv_k^{(2)}}{dx}\right)\right]_{x=0}=0.$$

On établit exactement de la même façon que

$$\left[\sum_{i,\ k} b_{ik}\left(v_i^{(2)}\frac{dv_k^{(1)}}{dx}-v_i^{(1)}\frac{dv_k^{(2)}}{dx}\right)\right]_{x=l}=0.$$

Par conséquent,

$$(\mu_1-\mu_2)\int_0^l\sum_{i,\ k}a_{ik}v_i^{(1)}v_k^{(2)}\,dx=0,$$

$$\int_0^l\sum_{i,\ k}a_{ik}v_i^{(1)}v_k^{(2)}\,dx=0.$$

L'orthogonalité des fonctions propres est démontrée. Utilisant cette orthogonalité, il n'est pas difficile de donner les formules à l'aide desquelles les vecteurs fonctions $u_k(x,\ 0)=\varphi_k(x)$, $\left.\frac{\partial u_k}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi_k(x)$ peuvent être approchées par des sommes de la forme

$$\varphi_k^{(N)}=\sum_{p=1}^N A_p v_k^{(p)}(x),$$

$$\psi_k^{(N)}=\sum_{p=1}^N B_p v_k^{(p)}(x).$$

Les valeurs initiales $u_k(x,\ 0)$ et la dérivée $\left.\frac{\partial u_k}{\partial t}\right|_{t=0}$ s'approchent indépendamment. Dans notre écriture nous avons souligné ce fait en désignant leurs coefficients de Fourier par des lettres différentes. La solution exacte du système initial

$$\sum_k a_{ik}(x)\frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_k b_{ik}(x)\frac{\partial u_k}{\partial x}\right)$$

correspondant à ces données initiales approchées s'écrit sous la forme

$$u_k^{(N)}(x,\ t)=\sum_{p=1}^N\left[A_p\cos\left(\sqrt{\mu_p}\,t\right)+B_p\sin\left(\sqrt{\mu_p}\,t\right)\frac{1}{\sqrt{\mu_p}}\right]v_k^{(p)}(x).$$

Exercice. Vérifiez ce point en substituant directement dans les équations et dans les conditions initiales.

Nous avons déjà noté que les fonctions propres de notre problème sont aussi orthogonales au sens de la métrique donnée par la forme

$$F = \frac{1}{2}\sum_{i,k}\sigma_{ik}u_i\bar{u}_k\Big|_{x=0} + \frac{1}{2}\int_0^l \Big(\sum_{i,k}a_{ik}v_i\bar{v}_k + \sum_{i,k}c_{ik}w_i\bar{w}_k\Big)\,dx +$$

$$+ \frac{1}{2}\sum\varepsilon_{ik}u_i\bar{u}_k\Big|_{x=l} = \frac{1}{2}\sum_{i,k}\sigma_{ik}u_i\bar{u}_k\Big|_{x=0} + \frac{1}{2}\sum_{i,k}\varepsilon_{ik}u_i\bar{u}_k\Big|_{x=l} +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^l \Big(\sum_{i,k}a_{ik}v_i\bar{v}_k + \sum_{i,k}b_{ik}\frac{\partial u_i}{\partial x}\frac{\partial\bar{u}_k}{\partial x}\Big)\,dx.$$

Calculons la valeur de cette forme sur le vecteur fonction propre pour lequel

$$\lambda u_k = v_k, \qquad \lambda = -\bar{\lambda} = \sqrt{-\mu},$$

$$\overrightarrow{\lambda u_k} = \bar{v}_k = v_k, \qquad \lambda\cdot\bar{\lambda} = \mu.$$

L'utilisation directe de ces égalités donne

$$F = \frac{1}{2}\int_0^l \sum_{i,k}a_{ik}v_iv_k\,dx + \mu^{-1}\Big[\frac{1}{2}\sum_{i,k}\sigma_{ik}v_iv_k\Big|_{x=0} +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^l \sum_{i,k}b_{ik}\frac{dv_i}{dx}\frac{dv_k}{dx}\,dx + \frac{1}{2}\sum_{i,k}\varepsilon_{ik}v_iv_k\Big|_{x=l}\Big].$$

Transformons en intégrant par parties l'intégrale figurant dans les crochets :

$$\frac{1}{2}\int_0^l \sum_{i,k}b_{ik}\frac{dv_i}{dx}\frac{dv_k}{dx}\,dx = \frac{1}{2}\sum_{i,k}b_{ik}\frac{dv_k}{dx}v_i\Big|_0^l -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^l \sum_i v_i\frac{d}{dx}\Big(\sum_k b_{ik}\frac{dv_k}{dx}\Big)\,dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{i,k}\sigma_{ik}v_iv_k\Big|_{x=0} - \frac{1}{2}\sum_{i,k}\varepsilon_{ik}v_iv_k\Big|_{x=l} + \frac{\mu}{2}\int_0^l \sum_{i,k}a_{ik}v_iv_k\,dx.$$

Lors de la déduction de la dernière ligne nous nous sommes encore servis des équations

$$\frac{d}{dx}\Big(\sum_k b_{ik}\frac{dv_k}{dx}\Big) + \mu\sum_k a_{ik}v_k = 0$$

et des conditions aux limites

$$\sum_k b_{ik}\frac{du_k}{dx} - \sum_k \sigma_{ik}u_k = 0 \quad (\text{pour } x=0),$$

$$\sum_k b_{ik}\frac{du_k}{dx} + \sum_k \varepsilon_{ik}u_k = 0 \quad (\text{pour } x=l).$$

Finalement, on déduit que la forme envisagée prend sur le vecteur fonction propre la valeur

$$\frac{1}{2}\int_0^l \sum_{i,k} a_{ik}v_iv_k\,dx + \frac{1}{2}\int_0^l \sum_{i,k} a_{ik}v_iv_k\,dx.$$

Cette assertion équivaut à celle que sur le vecteur fonction propre correspondant à la valeur propre μ la forme quadratique « potentielle »

$$\mu^{-1}\left(\frac{1}{2}\sum_{i,k}\sigma_{ik}v_iv_k\Big|_{x=0} + \frac{1}{2}\int_0^l \sum_{i,k} b_{ik}\frac{dv_i}{dx}\frac{dv_k}{dx}\,dx + \frac{1}{2}\sum_{i,k}\varepsilon_{ik}v_iv_k\Big|_{x=l}\right)$$

est égale à la forme quadratique «cinétique»

$$\frac{1}{2}\int_0^l \sum_{i,k} a_{ik}v_iv_k\,dx.$$

Problème. Démontrez en intégrant par parties et en utilisant les équations différentielles pour les vecteurs fonctions propres $\{v_1^{(1)}, v_2^{(1)}, \ldots, v_n^{(1)}\}$, $\{v_1^{(2)}, v_2^{(2)}, \ldots, v_n^{(2)}\}$ correspondant à des valeurs propres différentes

$$\mu_1,\ \mu_2\ (\mu_1 \neq \mu_2)$$

que

$$\sum_{i,k}\sigma_{ik}v_i^{(1)}v_k^{(2)}\Big|_{x=0} + \int_0^l \sum_{i,k} b_{ik}\frac{dv_i^{(1)}}{dx}\cdot\frac{dv_k^{(2)}}{dx}\,dx + \sum_{i,k}\varepsilon_{ik}v_i^{(1)}v_k^{(2)}\Big|_{x=l} = 0.$$

Cette orthogonalité des fonctions propres en métrique « potentielle », jointe à l'orthogonalité en métrique « cinétique » auparavant démontrée, donne leur orthogonalité en métrique énergétique complète (« cinétique » + « potentielle »).

Posons, pour simplifier l'écriture :

$$\Pi(y, z) = \frac{1}{2}\sum_{i,k}\sigma_{ik}y_iz_k\Big|_{x=0} + \frac{1}{2}\int_0^l \sum_{i,k} b_{ik}\frac{\partial y_i}{\partial x}\frac{\partial z_k}{\partial x}\,dx + \frac{1}{2}\sum_{i,k}\varepsilon_{ik}z_iz_k\Big|_{x=l},$$

$$K(y, z) = \frac{1}{2}\int_0^l \sum_{i,k} a_{ik}y_iz_k\,dx.$$

Soient $v^{(1)}, v^{(2)}, \ldots, v^{(r)}$ les vecteurs fonctions propres correspondant aux valeurs propres $\mu_1 \leqslant \mu_2 \leqslant \ldots \leqslant \mu_r$, et soit

$$v = \xi_1 v^{(1)} + \xi_2 v^{(2)} + \ldots + \xi_r v^{(r)}$$

un vecteur fonction de l'espace tendu sur ces $v^{(i)}$.

Alors

$$\frac{\Pi(v, v)}{K(v, v)} = \frac{\sum \xi_i \xi_k \Pi(v^{(i)}, v^{(k)})}{\sum \xi_i \xi_k K(v^{(i)}, v^{(k)})} =$$

$$= \frac{\xi_1^2 \Pi(v^{(1)}, v^{(1)}) + \xi_2^2 \Pi(v^{(2)}, v^{(2)}) + \ldots + \xi_r^2 \Pi(v^{(r)}, v^{(r)})}{\xi_1^2 K(v^{(1)}, v^{(1)}) + \xi_2^2 K(v^{(2)}, v^{(2)}) + \ldots + \xi_r^2 K(v^{(r)}, v^{(r)})} =$$

$$= \frac{\mu_1 \xi_1^2 K(v^{(1)}, v^{(1)}) + \mu_2 \xi_2^2 K(v^{(2)}, v^{(2)}) + \ldots + \mu_r \xi_r^2 K(v^{(r)}, v^{(r)})}{\xi_1^2 K(v^{(1)}, v^{(1)}) + \xi_2^2 K(v^{(2)}, v^{(2)}) + \ldots + \xi_r^2 K(v^{(r)}, v^{(r)})}.$$

Si l'on suppose les fonctions propres normées de telle façon que $K(v^{(s)}, v^{(s)}) = 1$, on a alors

$$\frac{\Pi(v, v)}{K(v, v)} = \frac{\mu_1 \xi_1^2 + \mu_2 \xi_2^2 + \ldots + \mu_r \xi_r^2}{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_r^2} \geqslant \mu_1.$$

Si toutes les valeurs propres sont différentes, le minimum

$$\min \frac{\Pi(v, v)}{K(v, v)} = \mu_1$$

n'est atteint que sur les vecteurs fonctions proportionnels à $v^{(1)}$, c'est-à-dire sur la fonction propre correspondant à la plus petite valeur propre.

Cette assertion admet la généralisation majeure suivante. Supposons que, de façon générale, v décrive tous les vecteurs fonctions réguliers, et non seulement ceux d'entre eux qui sont des combinaisons linéaires d'un nombre fini de vecteurs fonctions propres. On peut démontrer que, pour de tels v,

$$\frac{\Pi(v, v)}{K(v, v)} \geqslant \mu_1,$$

μ_1 étant la plus petite des valeurs propres de notre problème, et le minimum est atteint seulement sur la fonction propre correspondant à μ_1.

Ce fait est posé à la base d'une méthode très importante pour les applications due à Ritz, proposée en 1908, utilisée pour calculer les fonctions propres et les valeurs propres.

Nous allons examiner cette méthode sur l'exemple d'un problème où la fonction cherchée $v(x)$ et les formes $K(v, v)$, $\Pi(v, v)$ sont données par les formules

$$K(v, v) = \int_0^1 a(x) v^2 \, dx,$$

$$\Pi(v, v) = \int_0^1 b(x) \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 dx + v^2(1).$$

Nous chercherons le minimum

$$\min \frac{\Pi(v, v)}{K(v, v)} = \min \Pi(v, v) \text{ (sous la condition } K(v, v) = 1)$$

non pas parmi tous les $v(x)$, mais seulement parmi les $v(x)$ qui sont des polynômes de degré p :

$$v(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_p x^p.$$

Pour ces $v(x)$

$$\Pi(v, v) = \sum_{i, k=0}^{p} \pi_{ik} a_i a_k, \quad \pi_{ik} = ik \int_0^1 b(x)\, x^{i+k-2}\, dx + 1,$$

$$K(v, v) = \sum_{i, k=0}^{p} \varkappa_{ik} a_i a_k, \quad \varkappa_{ik} = \int_0^1 a(x)\, x^{i+k}\, dx,$$

et nous sommes amenés à chercher le minimum de la forme quadratique $\sum_{i, k=0}^{p} \pi_{ik} a_i a_k$ sur les vecteurs $(a_0, a_1, \ldots, a_p)$ satisfaisant à la condition $\sum_{i, k=0}^{p} \varkappa_{ik} a_i a_k = 1$.

On sait que ce minimum μ est égal à la plus petite racine de l'équation caractéristique de degré $p+1$

$$\det \| \pi_{ik} - \mu \varkappa_{ik} \| = 0,$$

et le vecteur propre sur lequel ce minimum est atteint vérifie le système homogène

$$\sum_{k=0}^{p} (\pi_{ik} - \mu \varkappa_{ik})\, a_k = 0.$$

De sorte qu'on est amené à résoudre un problème algébrique. Il est naturel de s'attendre à ce que, en augmentant le degré p du polynôme, on approche avec une précision croissante la valeur propre et la fonction propre.

La méthode de Ritz a ceci de pratique qu'on arrive d'ordinaire à obtenir de bonnes approximations en ne considérant en tant que fonctions admissibles que les fonctions appartenant à des espaces de dimension non très grande. Ces espaces ne sont pas nécessairement des espaces de polynômes.

La méthode de Ritz s'applique avantageusement à la recherche des valeurs et fonctions propres dans le cas des problèmes à deux ou trois variables spatiales, où elle est virtuellement sans rivale. Observons encore que la méthode de Ritz donne une excellente précision pour les valeurs propres et une précision un peu moins bonne pour les fonctions propres.

En conclusion du chapitre IV consacré à la méthode de Fourier, faisons la remarque suivante. Souvent l'exposé de cette méthode consiste à construire la solution du problème aux limites (et donc à démontrer l'existence de la solution) à l'aide de solutions de forme spéciale : d'« ondes stationnaires ». Or, dans le chapitre préliminaire ainsi que dans celui-ci, nous avons préféré nous baser sur des théorèmes d'existence de la solution de problèmes aux limites, indépendamment démontrés, et après quoi seulement développer ces solutions suivant des fonctions de forme spéciale. Cependant, les formules que nous avons obtenues pour les coefficients du développement des solutions de problèmes symétriques conservatifs permettent d'écrire les expressions explicites pour les solutions d'après les données initiales si l'on connaît les fonctions propres du problème aux limites pour le système correspondant d'équations différentielles ordinaires.

CHAPITRE V

MÉTHODES AUX DIFFÉRENCES POUR RÉSOUDRE LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

§ 34. Problème de Dirichlet pour l'équation de Laplace dans un rectangle

Equation aux différences vérifiée par la solution exacte. Equation aux différences approchée. Majorantes et inégalités pour la solution de l'équation aux différences de Poisson. Résolubilité du système aux différences. Evaluation de l'erreur.

Nous en venons à l'étude des méthodes numériques de résolution des équations aux dérivées partielles. Notre but est de comprendre les questions fondamentales qui se posent lors de l'élaboration de ces méthodes. Nous examinerons de même les procédés actuellement les plus répandus pour résoudre ces questions.

Nous commencerons par l'étude d'un procédé aux différences pour résoudre le problème de Dirichlet dans un domaine rectangulaire. Ce problème est ainsi posé. On se donne sur la frontière d'un rectangle $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$ une fonction continue $\varphi(s)$. On demande de trouver dans le rectangle une fonction $u(x, y)$ harmonique continue jusqu'à la frontière telle que $u|_\Gamma = \varphi(s)$. Nous avons démontré au chapitre III, § 22 que le problème de Dirichlet est résoluble dans le rectangle quelle que soit la fonction continue $\varphi(s)$.

On sait qu'une fonction harmonique bornée dans un domaine a dans chaque sous-domaine intérieur des dérivées bornées de n'importe quel ordre fixe. (Lorsqu'on élève l'ordre des dérivées, leur maximum peut croître.) On peut démontrer, chose que nous n'avons pas faite, que si $\varphi(s)$ est suffisamment régulière, la fonction $u(x, y)$ aura des dérivées bornées jusqu'à un certain ordre en tous les points du rectangle, et non seulement aux points intérieurs. L'ordre de ces dérivées bornées dépend, bien entendu, du degré de régularité de $\varphi(s)$. La notion de régularité de $\varphi(s)$ implique certaines conditions d'accord de ses dérivées aux angles du rectangle. Nous ne préciserons pas ces conditions.

Ainsi, nous supposerons que la fonction harmonique envisagée $u(x, y)$ ($u|_\Gamma = \varphi$) a dans le rectangle fermé des dérivées quatrièmes bornées. Nous allons donner ci-après un procédé approché pour reconstituer les valeurs de $u(x, y)$ sur un réseau de points suffisam-

ment serré dans le domaine d'après les valeurs aux limites φ. Nous donnerons aussi l'évaluation de l'erreur de ce procédé.

Découpons le rectangle en des petites cellules rectangulaires de côtés $\Delta x = a/N$, $\Delta y = b/M$ (fig. 78). Nous allons chercher les valeurs de la solution aux sommets de ces cellules rectangulaires. Ces sommets ont été mis en évidence sur la figure par des points gras. Les points aux limites ont été spécifiés à part. En ces points, les valeurs $u = \varphi$ sont connues. Nous n'avons pas distingué les sommets du rectangle initial ((0, 0), $(a, 0)$, (a, b), $(0, b)$), étant donné qu'ils n'interviennent pas dans nos raisonnements ultérieurs.

Nous allons approcher sur le réseau construit l'équation de Laplace $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. Ayant en vue que les dérivées quatrièmes de $u(x, y)$ sont bornées, nous nous servirons de la formule de Taylor:

$$u(x+\Delta x, y) = u(x, y) + \Delta x \cdot u_x(x, y) + \frac{\Delta x^2}{2} u_{xx}(x, y) + \\ + \frac{\Delta x^3}{6} u_{xxx}(x, y) + \frac{\Delta x^4}{24} u_{xxxx}(\xi_1, y),$$

$$u(x-\Delta x, y) = u(x, y) - \Delta x \cdot u_x(x, y) + \frac{\Delta x^2}{2} u_{xx}(x, y) - \\ - \frac{\Delta x^3}{6} u_{xxx}(x, y) + \frac{\Delta x^4}{24} u_{xxxx}(\xi_2, y),$$

$$x \leqslant \xi_1 \leqslant x + \Delta x,$$

$$x - \Delta x \leqslant \xi_2 \leqslant x.$$

D'où

$$\frac{u(x+\Delta x, y) - 2u(x, y) + u(x-\Delta x, y)}{\Delta x^2} = \\ = u_{xx}(x, y) + \frac{\Delta x^2}{24}[u_{xxxx}(\xi_1, y) + u_{xxxx}(\xi_2, y)].$$

De même

$$\frac{u(x, y+\Delta y) - 2u(x, y) + u(x, y-\Delta y)}{\Delta y^2} = \\ = u_{yy}(x, y) + \frac{\Delta y^2}{24}[u_{yyyy}(x, \eta_1) + u_{yyyy}(x, \eta_2)],$$

$$y \leqslant \eta_1 \leqslant y + \Delta y,$$

$$y - \Delta y \leqslant \eta_2 \leqslant y.$$

Nous avons obtenu des formules approchées pour le calcul des dérivées secondes. Ajoutons-les

$$\frac{u(x+\Delta x, y) - 2u(x, y) + u(x-\Delta x, y)}{\Delta x^2} + \frac{u(x, y+\Delta y) - 2u(x, y) + u(x, y-\Delta y)}{\Delta y^2} = \\ = u_{xx} + u_{yy} + \Delta x^2 \cdot \gamma(x, y) + \Delta y^2 \delta(x, y).$$

Dans cette représentation, les quantités

$$\gamma(x, y) = \frac{u_{xxxx}(\xi_1, y) + u_{xxxx}(\xi_2, y)}{24},$$

$$\delta(x, y) = \frac{u_{yyyy}(x, \eta_1) + u_{yyyy}(x, \eta_2)}{24}$$

sont des fonctions bornées de x, y. Sur notre solution $u_{xx} + u_{yy} = 0$. Supposons que, par quelque procédé, on ait pu déterminer les valeurs γ et δ en tous les points intérieurs du réseau (x, y). Ecrivant pour chacun de ces points l'équation

$$\frac{u(x+\Delta x, y) - 2u(x, y) + u(x-\Delta x, y)}{\Delta x^2} + \frac{u(x, y+\Delta y) - 2u(x, y) + u(x, y-\Delta y)}{\Delta y^2} =$$

$$= \Delta x^2 \cdot \gamma(x, y) + \Delta y^2 \delta(x, y)$$

et notant que les valeurs de $u(x, y)$ aux points frontières (x, y) sont données, nous sommes conduits à un système linéaire d'équations

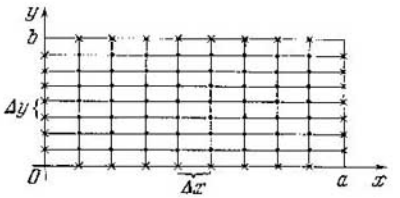

Fig. 78

algébriques. On a autant d'équations de ce genre que de nœuds intérieurs, soit $(N - 1)(M - 1)$. Le nombre d'inconnues coïncide manifestement avec le nombre d'équations. Nous démontrerons par la suite que le déterminant de ce système est différent de zéro, et donc qu'il est résoluble. En le résolvant, on obtient les valeurs de $u(x, y)$ en tous les points du réseau.

En fait, on ne saurait suivre à la lettre le procédé décrit, les quantités $\gamma(x, y)$ et $\delta(x, y)$ nous étant inconnues. Toutefois, notant que le second membre $\Delta x^2 \cdot \gamma(x, y) + \Delta y^2 \cdot \delta(x, y)$ peut être rendu aussi petit qu'on le voudra en prenant des pas suffisamment petits, on peut espérer obtenir une réponse suffisamment précise en remplaçant approximativement ce second membre par zéro.

De sorte qu'on est conduit au système approché suivant:

$$\frac{u(x+\Delta x, y) - 2u(x, y) + u(x-\Delta x, y)}{\Delta x^2} +$$

$$+ \frac{u(x, y+\Delta y) - 2u(x, y) + u(x, y-\Delta y)}{\Delta y^2} = 0.$$

Nous aurons à étudier la résolubilité de ce système et à évaluer l'erreur due au rejet du reste

$$\Delta x^2 \cdot \gamma(x, y) + \Delta y^2 \cdot \delta(x, y).$$

Une telle étude sera précisément faite dans ce paragraphe. En réalité, c'est peu que de démontrer la résolubilité. Il faut encore savoir indiquer un moyen de résolution non trop ardu. Le fait est que, pour des Δx, Δy petits, on obtient ici des systèmes d'équations d'ordres très élevés. Dans un des paragraphes suivants nous étudierons les procédés actuellement en usage pour résoudre de tels grands systèmes apparaissant lorsqu'on approche par différences finies les équations aux dérivées partielles.

Commençons par le lemme simple suivant.

L e m m e. *La fonction*

$$V(x, y) = \frac{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{2}\right)^2}{4} - \frac{a^2 + b^2}{16}$$

vérifie les équations:

$$\frac{V(x+\Delta x, y) - 2V(x, y) + V(x-\Delta x, y)}{\Delta x^2} + \frac{V(x, y+\Delta y) - 2V(x, y) + V(x, y-\Delta y)}{\Delta y^2} = 1$$

et les inégalités

$$0 \geqslant V(x, y) \geqslant -\frac{a^2+b^2}{16}$$

$$(0 \leqslant x \leqslant a, \quad 0 \leqslant y \leqslant b).$$

D é m o n s t r a t i o n. Les inégalités résultent avec évidence de la formule pour $V(x, y)$, et les équations résultent du fait que, d'après ce qui a été démontré,

$$\frac{V(x+\Delta x, y) - 2V(x, y) + V(x-\Delta x, y)}{\Delta x^2} + \frac{V(x, y+\Delta y) - 2V(x, y) + V(x, y-\Delta y)}{\Delta y^2} =$$

$$= \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\Delta x^2}{24}\left[V_{xxxx}(\xi_1, y) + V_{xxxx}(\xi_2, y)\right] + \frac{\Delta y^2}{24}\left[V_{yyyy}(x, \eta_1) + V_{yyyy}(x, \eta_2)\right].$$

En effet, pour notre fonction $V(x, y)$ les dérivées quatrièmes sont nulles et l'opérateur de Laplace

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 1.$$

Le lemme est démontré.

Théorème 1. *Le système d'équations aux différences, écrites pour tous les points* (x, y) *de notre réseau,*

$$\frac{u(x+\Delta x, y)-2u(x, y)+u(x-\Delta x, y)}{\Delta x^2}+$$

$$+\frac{u(x, y+\Delta y)-2u(x, y)+u(x, y-\Delta y)}{\Delta y^2}=\alpha(x, y),$$

$$u(x, y)|_\Gamma=\varphi(x, y)$$

ne peut avoir de solutions $u(x, y)$ *telles qu'en un point au moins du réseau* $u(x, y)>0$, *si ses seconds membres* φ, α *vérifient les inégalités*

$$\alpha(x, y)\geqslant 0,\ \varphi(x, y)\leqslant 0.$$

Démonstration. Considérons la fonction sur le réseau $\tilde{u}(x, y)=u(x, y)+\varepsilon v(x, y)$, où $\varepsilon>0$, et $v(x, y)$ ayant été décrite au lemme précédent. Il est évident que $\tilde{u}(x, y)$ vérifie les équations

$$\frac{\tilde{u}(x+\Delta x, y)-2\tilde{u}(x, y)+\tilde{u}(x-\Delta x, y)}{\Delta x^2}+\frac{\tilde{u}(x, y+\Delta y)-2\tilde{u}(x, y)+\tilde{u}(x, y-\Delta y)}{\Delta y^2}=$$

$$=\alpha(x, y)+\varepsilon=\tilde{\alpha}(x, y)>0,$$

$$\tilde{u}(x, y)|_\Gamma=\tilde{\varphi}(x, y)=\varphi(x, y)+\varepsilon v(x, y)\leqslant 0.$$

Ainsi donc, $\tilde{u}(x, y)$ vérifie toutes les conditions du théorème. Seulement, l'inégalité $\alpha(x, y)\geqslant 0$ pour les seconds membres a été renforcée et elle est devenue stricte

$$\tilde{\alpha}(x, y)\geqslant\varepsilon>0.$$

Si à présent, partant des conditions déduites, on établit que

$$\tilde{u}(x, y)\leqslant 0,$$

on aura par là même :

$$u(x, y)+\varepsilon v(x, y)\leqslant 0,$$

$$u(x, y)\leqslant -\varepsilon v(x, y)\leqslant\varepsilon\frac{a^2+b^2}{16}.$$

Du fait que ε est arbitraire, il résulte de là l'inégalité

$$u(x, y)\leqslant 0.$$

Passons à la démonstration de cette assertion. L'équation

$$\frac{\tilde{u}(x+\Delta x, y)-2\tilde{u}(x, y)+\tilde{u}(x-\Delta x, y)}{\Delta x^2}+$$

$$+\frac{\tilde{u}(x, y+\Delta y)-2\tilde{u}(x, y)+\tilde{u}(x, y-\Delta y)}{\Delta y^2}=\tilde{\alpha}>0$$

peut se recopier comme suit :

$$\hat{u}(x, y) =$$

$$= \frac{\frac{1}{\Delta x^2}[\hat{u}(x+\Delta x, y)+\hat{u}(x-\Delta x, y)]+\frac{1}{\Delta y^2}[\hat{u}(x, y+\Delta y)+\hat{u}(x, y-\Delta y)]-\hat{\alpha}}{\frac{1}{\Delta x^2}+\frac{1}{\Delta x^2}+\frac{1}{\Delta y^2}+\frac{1}{\Delta y^2}} <$$

$$< \frac{\frac{1}{\Delta x^2}[\hat{u}(x+\Delta x, y)+\hat{u}(x-\Delta x, y)]+\frac{1}{\Delta y^2}[\hat{u}(x, y+\Delta y)+\hat{u}(x, y-\Delta y)]}{\frac{1}{\Delta x^2}+\frac{1}{\Delta x^2}+\frac{1}{\Delta y^2}+\frac{1}{\Delta y^2}} \leqslant$$

$$\leqslant \max[\hat{u}(x+\Delta x, y),\ \hat{u}(x-\Delta x, y),\ \hat{u}(x, y+\Delta y),\ \hat{u}(x, y-\Delta y)].$$

L'inégalité stricte justifiée

$$\hat{u}(x, y) < \max[\hat{u}(x+\Delta x, y), \hat{u}(x-\Delta x, y), \hat{u}(x, y+\Delta y), \hat{u}(x, y-\Delta y)]$$

constitue l'analogue aux différences du principe du maximum. Elle entraîne que la fonction sur le réseau $\hat{u}(x, y)$ prend sa plus grande valeur en un point de la frontière. Or, on sait que $\hat{u}|_\Gamma = \hat{\varphi} \leqslant 0$. Par là, l'inégalité $\hat{u}(x, y) \leqslant 0$ est démontrée. La démonstration du théorème est achevée.

Conséquence 1. *Le système d'équations aux différences*

$$\begin{cases} \frac{u(x+\Delta x, y)-2u(x, y)+u(x-\Delta x, y)}{\Delta x^2}+ \\ \qquad +\frac{u(x, y+\Delta y)-2u(x, y)+u(x, y-\Delta y)}{\Delta y^2}=0, \\ u(x, y)|_\Gamma = 0 \end{cases}$$

a une solution unique $u(x, y) \equiv 0$.

En effet, le théorème démontré entraîne l'inégalité $u(x, y) \leqslant 0$. L'inégalité inverse $-u(x, y) \leqslant 0$ $(u(x, y) \geqslant 0)$ s'obtient si l'on observe que la fonction sur le réseau $-u(x, y)$ vérifie les mêmes équations que $u(x, y)$. Les inégalités $u(x, y) \geqslant 0$, $u(x, y) \leqslant 0$ entraînent $u(x, y) \equiv 0$. Que $u(x, y) \equiv 0$ vérifie les équations, c'est évident.

On a vu dans le cours d'algèbre qu'un système d'équations linéaires homogènes en nombre égal à celui des inconnues n'admet que la solution nulle que si le déterminant du système est différent de zéro. Si le déterminant du système d'équations est non nul, le système est résoluble quels que soient les seconds membres, et la solution est unique. Il en résulte la

Conséquence 2. *Le système d'équations aux différences*

$$\frac{u(x+\Delta x, y)-2u(x, y)+u(x-\Delta x, y)}{\Delta x^2}+$$

$$+\frac{u(x, y+\Delta y)-2u(x, y)+u(x, y-\Delta y)}{\Delta y^2}=\alpha(x, y),$$

$$u(x, y)|_\Gamma = \varphi(x, y)$$

est résoluble et a une solution unique quelles que soient les fonctions sur le réseau $\alpha(x, y)$, $\varphi(x, y)$.

On obtient pour cette solution l'évaluation à laquelle est consacré le théorème suivant.

Théorème 2. *Si* $|\alpha(x, y)| \leqslant A$, $|\varphi(x, y)| \leqslant B$, *la solution des équations aux différences vérifie l'inégalité*

$$|u(x, y)| \leqslant B + \frac{a^2+b^2}{16} A.$$

Démonstration. La fonction sur le réseau $\tilde{u}(x, y) = u(x, y) - B + AV(x, y)$ vérifie les équations aux différences

$$\frac{\tilde{u}(x+\Delta x, y) - 2\tilde{u}(x, y) + \tilde{u}(x-\Delta x, y)}{\Delta x^2} +$$

$$+ \frac{\tilde{u}(x, y+\Delta y) - 2\tilde{u}(x, y) + \tilde{u}(x, y-\Delta y)}{\Delta y^2} = \alpha(x, y) + A \geqslant 0,$$

$$\tilde{u}(x, y)|_\Gamma = \varphi(x, y)|_\Gamma - B + A \cdot v(x, y)|_\Gamma \leqslant \varphi(x, y)|_\Gamma - B \leqslant 0.$$

On a pris pour $V(x, y)$ la fonction construite dans le lemme. D'après ce lemme,

$$-\frac{a^2+b^2}{16} \leqslant V(x, y) \leqslant 0.$$

Le théorème 1 donne l'inégalité

$$u(x, y) - B + AV(x, y) - \tilde{u}(x, y) \leqslant 0.$$

En d'autres termes,

$$u(x, y) \leqslant B - A \cdot V(x, y) \leqslant B + \frac{a^2+b^2}{16} A.$$

La fonction sur le réseau $-u(x, y)$ vérifie les mêmes équations aux différences que $u(x, y)$, seulement les seconds membres $\alpha(x, y)$, $\varphi(x, y)$ doivent être à présent remplacés par $-\alpha(x, y)$, $-\varphi(x, y)$: les inégalités $|-\alpha(x, y)| \leqslant A$, $|-\varphi(x, y)|_\Gamma \leqslant B$ sont de nouveau vérifiées. Par conséquent,

$$-u(x, y) \leqslant B + \frac{a^2+b^2}{16} A.$$

Unissant cette inégalité à celle démontrée plus haut

$$u(x, y) \leqslant B + \frac{a^2+b^2}{16} A,$$

on est conduit à l'affirmation du théorème:

$$|u(x, y)| \leqslant B + \frac{a^2+b^2}{16} A.$$

Nous avons maintenant étudié assez en détail les propriétés des équations aux différences. A l'aide de ces propriétés, il est facile d'évaluer l'erreur de la solution approchée du problème de Dirichlet. En effet, la solution exacte $u(x, y)$ du problème de Dirichlet vérifie les inégalités aux différences

$$\frac{u(x+\Delta x, y)-2u(x, y)+u(x-\Delta x, y)}{\Delta x^2}+\frac{u(x, y+\Delta y)-2u(x, y)+u(x, y-\Delta y)}{\Delta y^2}=$$
$$=\Delta x^2\gamma(x, y)+\Delta y^2\delta(x, y),$$
$$|\gamma(x, y)|\leqslant\frac{K}{12}, \quad |\delta(x, y)|\leqslant\frac{K}{12},$$
$$u(x, y)|_\Gamma=\varphi(x, y),$$

K désignant le maximum du module des dérivées quatrièmes de la solution $u(x, y)$. Au lieu de ces équations exactes que nous ne pouvons pas résoudre, étant donné que les valeurs exactes de $\gamma(x, y)$, $\delta(x, y)$ nous sont inconnues, il a été proposé de résoudre les équations approchées

$$\frac{\tilde{u}(x+\Delta x, y)-2\tilde{u}(x, y)+\tilde{u}(x-\Delta x, y)}{\Delta x^2}+$$
$$+\frac{\tilde{u}(x, y+\Delta y)-2\tilde{u}(x, y)+\tilde{u}(x, y-\Delta y)}{\Delta y^2}=0,$$
$$\tilde{u}(x, y)|_\Gamma=\varphi(x, y).$$

Le différence entre les solutions exacte et approchée

$$w(x, y)=u(x, y)-\tilde{u}(x, y)$$

vérifie les équations aux différences

$$\frac{w(x+\Delta x, y)-2w(x, y)+w(x-\Delta x, y)}{\Delta x^2}+$$
$$+\frac{w(x, y+\Delta y)-2w(x, y)+w(x, y-\Delta y)}{\Delta y^2}=\Delta x^2\gamma(x, y)+\Delta y^2\delta(x, y)$$

et les conditions aux limites homogènes

$$w(x, y)|_\Gamma=0.$$

D'après le théorème 2

$$|u(x, y)-\tilde{u}(x, y)|=$$
$$=|w(x, y)|\leqslant 0+\frac{a^2+b^2}{16}\max_{x, y}[\Delta x^2\gamma(x, y)+\Delta y^2\delta(x, y)]\leqslant$$
$$\leqslant(\Delta x^2+\Delta y^2)\cdot\frac{K}{12}\,\frac{a^2+b^2}{16}.$$

On voit que pour Δx, Δy suffisamment petits l'erreur de la solution approchée est effectivement petite. Ainsi est justifiée l'appli-

cabilité de la méthode des réseaux à la recherche des solutions approchées du problème de Dirichlet avec des valeurs aux limites suffisamment régulières.

En pratique, lorsqu'on résout des problèmes concrets, on se borne ordinairement à des démonstrations ayant une importance de principe, du type de celle faite ici. Souvent même une telle démonstration se fait plus schématiquement. Les appréciations concrètes relativement à l'erreur s'obtiennent, en règle générale, non pas à partir d'évaluations théoriques, mais en comparant entre eux les résultats de calculs faits avec différents pas Δx, Δy du réseau.

Une fois les équations aux différences établies, il faut encore les résoudre. Dans l'exemple que nous avons étudié, la résolution des équations aux différences est un problème très compliqué et d'un intérêt certain, mais nous ne nous y attaquerons pas ici.

Dans les paragraphes suivants nous étudierons des approximations aux différences pour les solutions de plusieurs problèmes types de diverses classes d'équations (hyperboliques, paraboliques), de la même façon qu'on a procédé ici pour le problème de Dirichlet. Cette étude sera menée *grosso modo* suivant le même schéma que celui traité dans ce paragraphe. On vérifiera d'abord que telles ou telles équations aux différences sont vérifiées presque exactement par la solution exacte de l'équation aux dérivées partielles (qu'elles ont des seconds membres petits), puis on établira qu'une petite variation des seconds membres des équations aux différences entraîne une petite variation de leur solution. La première étape d'un tel schéma d'étude est dite étude de l'approximation, la seconde étant appelée étude de la stabilité des équations aux différences.

§ 35. Schéma aux différences pour un système hyperbolique à deux variables indépendantes

Le schéma antérieurement utilisé pour démontrer un théorème d'existence s'étudie à peu près de la même façon qu'au paragraphe précédent a été étudiée l'équation aux différences de Laplace. Nécessité de l'inégalité $\frac{\tau k}{h} \leqslant 1$. Comparaison des domaines d'influence des équations aux dérivées partielles et aux différences et condition nécessaire de convergence résultant de cette comparaison. Exemple montrant l'insuffisance de cette condition. Schéma rigide dont les solutions peuvent, les pas décroissant, converger vers les solutions de différentes équations.

Au paragraphe précédent nous avons étudié un schéma aux différences pour la solution du problème de Dirichlet. Ici, nous allons à nouveau nous occuper de schémas aux différences, mais cette fois-ci pour les équations hyperboliques.

Soit à résoudre le système hyperbolique

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + k_i(x, t)\frac{\partial u_i}{\partial x} + \sum_j m_{ij}(x, t)\, u_j = f_i(x, t),$$

écrit sous forme canonique. Ce système sera considéré dans le rectangle $0 \leqslant x \leqslant l$, $0 \leqslant t \leqslant T$. Les coefficients et les seconds membres sont supposés suffisamment réguliers, donc bornés.

Qui plus est, nous supposerons que sur chacune des frontières $x = 0$, $x = l$ aucune des vitesses caractéristiques $k_i(0, t)$, $k_i(l, t)$ ne s'annule, si bien que chacune de ces vitesses ne change pas de signe au cours du temps.

En tant que conditions aux limites sur la frontière de gauche $x = 0$, nous supposerons données celles des valeurs $u_i(0, t)$ pour lesquelles $k_i(0, t) > 0$. Sur la frontière de droite $x = l$ sont données les $u_i(l, t)$ pour lesquelles $k_i(l, t) < 0$. On pourrait envisager des conditions aux limites de forme plus générale, comme celles, par exemple, qui ont été envisagées lors de l'étude du théorème d'existence de la solution. Nous ne nous lancerons pas ici dans de telles complications, mineures pour la question étudiée.

Pour $t = 0$, on se donne pour conditions initiales les $u_i(x, 0)$ pour tous les $i = 1, 2, \ldots, n$. Les conditions initiales sont supposées accordées avec les conditions aux limites de façon qu'il existe une solution suffisamment régulière satisfaisant à toutes les exigences formulées. Il importera que cette solution soit bornée et qu'elle ait des dérivées premières et secondes bornées.

Nous n'avons pas supposé ici la conservation du signe de la vitesse caractéristique $k_i(x, t)$ des caractéristiques de la i-ème famille

$$\frac{dx}{dt} = k_i(x, t)$$

dans tout le rectangle, de sorte qu'en principe on peut se représenter une forme de famille de caractéristiques de vitesse $k_i(x, t)$ telle que la famille représentée sur la fig. 79.

Il est vrai qu'il n'est pas permis aux caractéristiques de tangenter les directions horizontales, car alors k_i deviendrait infinie. Ceci étant, l'image de comportement des caractéristiques donnée sur la fig. 80 est interdite.

Prenons dans le rectangle $0 \leqslant x \leqslant l$, $0 \leqslant t \leqslant T$ un réseau aux différences de pas $h = \Delta x$, $\tau = \Delta t$. Un tel réseau est montré sur la fig. 81.

Nous construirons le même schéma aux différences que lors de la démonstration du théorème d'existence pour les systèmes hyperboliques. Seulement, nous observerons attentivement la manière dont change la forme des équations aux différences lorsque le signe de $k_i(x, t)$ change.

Soit (x, t) un point du réseau. Nous écrirons l'équation aux différences qui lui correspond en fonction du signe de $k_i(x, t)$ suivant l'une des deux règles ci-après.

Si $k_i(x, t) \leqslant 0$, on écrit :

$$\frac{u_i(x, t+\tau)-u_i(x, t)}{\tau}+k_i(x, t)\frac{u_i(x+h, t)-u_i(x, t)}{h}+$$

$$+\sum_j m_{ij}(x, t)\,u_j(x, t)=f_i(x, t).$$

Si $k_i(x, t) > 0$, on écrit l'équation aux différences comme suit :

$$\frac{u_i(x, t+\tau)-u_i(x, t)}{\tau}+k_i(x, t)\frac{u_i(x, t)-u_i(x-h, t)}{h}+$$

$$+\sum_j m_{ij}(x, t)\,u_j(x, t)=f_i(x, t).$$

Pour chaque point (x, t) du réseau non situé sur les frontières de droite ou de gauche ($x \neq 0$, $x \neq l$), on peut écrire une telle équation.

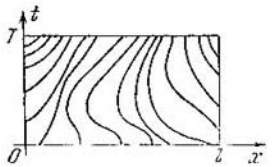

Fig. 79

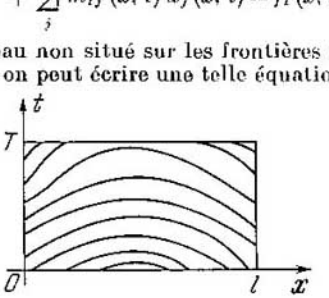

Fig. 80

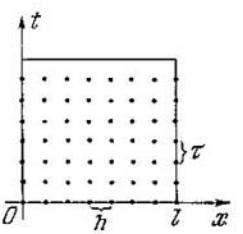

Fig. 81

Aux points de la frontière de droite, si $k_i(x, t) < 0$, l'équation ne saurait s'écrire suivant cette règle, le point $(l + h, t)$ n'appartenant pas au réseau. Mais dans ce cas elle peut être remplacée par l'égalité $u_i(l, t + \tau) =$ à la valeur donnée sur la frontière (nous avons convenu de ne pas envisager le cas $k_i(l, t) = 0$). De même, sur la frontière de gauche $x = 0$ l'équation aux différences ne saurait s'écrire

si $k_j\ (0,\ t) > 0$. Elle peut également être remplacée par l'égalité $u_i\ (0,\ t + \tau) =$ à la valeur donnée sur la frontière.

Aux égalités écrites doivent encore s'ajouter les conditions initiales : $u_i\ (x,\ 0) =$ aux conditions initiales données. Nous supposons réalisé l'accord des valeurs aux limites et des valeurs initiales aux points anguleux $(0,\ 0)$, $(l,\ 0)$.

A l'aide des règles qui viennent d'être écrites, on est conduit à un système d'équations algébriques linéaires pour les valeurs des fonctions sur le réseau $u_i(x,\ t)$. Dans ce système le nombre d'équations est égal à celui des inconnues. Nous devons démontrer que ce système d'équations est résoluble et que sa solution aux points du réseau, τ, h étant suffisamment petits, est voisine des valeurs de la solution exacte des équations aux dérivées partielles.

La démonstration que nous allons suivre rappelle en beaucoup, quant à son schéma, le raisonnement analogue à l'aide duquel a été étudié au paragraphe précédent le problème aux différences de Dirichlet.

Soit $u_i(x,\ t)$ la solution exacte des équations aux dérivées partielles qui a des dérivées premières et secondes bornées. D'après la formule de Taylor,

$$u_i\ (x,\ t+\tau) = u_i\ (x,\ t) + \tau\ \frac{\partial u_i\ (x,\ t)}{\partial t} + \frac{\tau^2}{2}\ \frac{\partial^2 u_i\ (x,\ t+\eta\tau)}{\partial t^2} =$$

$$= u_i\ (x,\ t) + \tau\ \frac{\partial u_i\ (x,\ t)}{\partial t} + \tau^2 \alpha_i\ (x,\ t,\ \tau)$$

$$(0 \leqslant \eta \leqslant 1,\ |\ \alpha_i\ | < \text{const}),$$

$$u_i\ (x+h,\ t) = u_i\ (x,\ t) + h\ \frac{\partial u_i\ (x,\ t)}{\partial x} + h^2 \beta_i\ (x,\ t,\ h)$$

$$(|\ \beta_i\ | < \text{const}),$$

$$u_i\ (x-h,\ t) = u_i\ (x,\ t) - h\ \frac{\partial u_i\ (x,\ t)}{\partial x} + h^2 \gamma_i\ (x,\ t,\ h)$$

$$(|\ \gamma_i\ | < \text{const}).$$

D'où

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{u_i\ (x,\ t+\tau) - u_i\ (x,\ t)}{\tau} - \tau \alpha_i\ (x,\ t,\ \tau),$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x} = \frac{u_i\ (x+h,\ t) - u_i\ (x,\ t)}{h} - h \beta_i\ (x,\ t,\ h),$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x} = \frac{u_i\ (x,\ t) - u_i\ (x-h,\ t)}{h} + h \gamma_i\ (x,\ t,\ h).$$

Nous supposerons que les pas τ, h ont toujours été choisis obéissant à l'inégalité $\frac{\tau}{h} \leqslant$ const.

Il résulte aussitôt des formules écrites que la solution exacte du système différentiel vérifie les équations aux différences dont les

seconds membres ont varié d'une quantité de l'ordre de h. Au lieu de $f_i(x, t)$, on doit à présent écrire au second membre $\tilde{f}_i(x, t) = f_i(x, t) + h\varphi_i(x, t, \tau, h)$ et supposer que

$$|\varphi_i(x, t, \tau, h)| < \text{const}.$$

Il nous faut à présent montrer que nos équations aux différences sont résolubles quels que soient les seconds membres, et que si les seconds membres varient d'une quantité de l'ordre de h, la solution aux différences varie en chaque point d'une quantité du même ordre.

La résolubilité des équations aux différences dans le cas ici examiné est triviale. En effet, il est facile de montrer que les conditions aux limites et les données initiales pour $t = 0$ permettent de déterminer la solution dans la première couche temporelle $t = \tau$, solution qui peut être prise pour données initiales pour déterminer la solution dans la couche $t = 2\tau$, etc. Supposons que dans la couche $t = t_0$ on ait déjà déterminé, en tous les points du réseau, la solution aux différences $u_i(x, t_0)$, et montrons comment on peut la déterminer dans la couche $t = t_0 + \tau$.

Au point de la frontière de gauche $(0, t_0 + \tau)$, si $k_i(0, t_0) > 0$, en vertu des conditions aux limites est donnée $u_i(0, t_0 + \tau)$. Sur la frontière de droite, si $k_i(l, t_0) < 0$, est donnée $u_i(l, t_0 + \tau)$. Dans tous les autres cas jouent les équations aux différences

$$\frac{u_i(x, t_0+\tau) - u_i(x, t_0)}{\tau} + k_i(x, t_0)\frac{u_i(x, t_0) - u(x-h, t_0)}{h} + \\ + \sum_j m_{ij}u_j(x, t_0) = f_i(x, t_0),$$

si $k_i(x, t_0) > 0$, ou

$$\frac{u_i(x, t_0+\tau) - u_i(x, t_0)}{\tau} + k_i(x, t_0)\frac{u_i(x+h, t_0) - u_i(x, t_0)}{h} + \\ + \sum_j m_{ij}u_j(x, t_0) = f_i(x, t_0),$$

si $k_i(x, t_0) \leqslant 0$.

De ces équations on tire

$$u_i(x, t_0+\tau) = \left(1 - \frac{\tau|k_i|}{h}\right)u_i(x, t_0) + \\ + \frac{\tau|k_i|}{h}u_i(x \pm h, t_0) - \tau\sum_j m_{ij}u_j(x, t_0) + \tau f_i(x, t_0).$$

Cette formule explicite démontre la résolubilité. Nous aurons encore besoin d'évaluations pour les solutions aux différences. Nous avons obtenu des évaluations analogues au chap. II lors de l'étude d'un théorème d'existence. Néanmoins, nous les déduirons à nouveau,

d'autant plus que nous avons maintenant besoin des évaluations sous une autre forme, beaucoup plus grossière.

Supposons que les quantités $u_i\ (0,\ t)$, $u_i\ (l,\ t)$ prises pour valeurs aux limites, les données initiales $u_i\ (x,\ 0)$ et les seconds membres $f_i\ (x,\ t)$ soient évalués par une constante F:

$$|u_i\ (0,\ t)| < F,\ \text{si}\ k_i\ (0,\ t) > 0,$$

$$|u_i\ (l,\ t)| < F,\ \text{si}\ k_i\ (l,\ t) < 0,$$

$$|u_i\ (x,\ 0)| < F,\ \ |f_i\ (x,\ t)| < F.$$

Utilisant ces évaluations et notre formule explicite pour le calcul de $u_i(x,\ t)$ dans les couches temporelles successives du réseau, nous allons maintenant déduire une inégalité pour la solution aux différences. Exigeons seulement encore qu'en tous les points du réseau $(x,\ t)$ soit vérifiée l'inégalité:

$$\frac{\tau |k_i\ (x,\ t)|}{h} \leqslant 1.$$

On verra plus loin à quel point cette restriction sur les pas est nécessaire.

Soit t_0 une certaine couche temporelle du réseau. Posons $U\ (t_0) = [\max_{x,\ i} |u_i\ (x,\ t_0)|,\ F]$. De notre formule explicite pour les quantités dans la couche $t_0 + \tau$ et des conditions aux limites données résultent les inégalités

$$|u_i\ (0,\ t_0 + \tau)| < F \leqslant U\ (t_0),\ \text{si}\ k_i\ (0,\ t_0 + \tau) > 0,$$

$$|u_i\ (l,\ t_0 + \tau)| < F \leqslant U\ (t_0),\ \text{si}\ k_i\ (l,\ t_0 + \tau) < 0,$$

$$|u_i\ (x,\ t_0 + \tau)| \leqslant \left[\left(1 - \frac{\tau |k_i|}{h}\right) U\ (t_0) + \frac{\tau |k_i|}{h} U\ (t_0) + \right.$$

$$\left. + \tau M U\ (t_0) + \tau F\right] = U\ (t_0) + \tau M U\ (t_0) + \tau F \leqslant (1 + \tau M + \tau)\, U\ (t_0),$$

$$|u_i\ (x,\ t)| \leqslant [1 + \tau\ (M + 1)]^{\frac{t}{\tau}} U\ (0) \leqslant [1 + \tau\ (M + 1)]^{\frac{t}{\tau}} F \leqslant$$

$$\leqslant [1 + \tau\ (M + 1)]^{\frac{T}{\tau}} F \leqslant M^* F$$

(on a $0 \leqslant t \leqslant T$, l'expression $[1 + \tau\ (M + 1)]^{\frac{T}{\tau}}$ pour $\tau \to 0$ tend vers la limite finie $e^{(M+1)T}$, si bien qu'elle est bornée). A l'aide de l'évaluation obtenue, il est facile de démontrer que, si les seconds membres des équations aux différences varient d'une quantité de l'ordre de h, la solution varie d'une quantité du même ordre.

En effet, soit

$$u_i(x, t+\tau) = \left(1 - \frac{\tau|k_i|}{h}\right) u_i(x, t) + \\ + \frac{\tau|k_i|}{h} u_i(x \pm h, t) - \tau \sum_j m_{ij} u_j(x, t) + \tau f_i(x, t),$$

$$\tilde{u}_i(x, t+\tau) = \left(1 - \frac{\tau|k_i|}{h}\right) \tilde{u}_i(x, t) + \frac{\tau|k_i|}{h} \tilde{u}_i(x \pm h, t) - \\ - \tau \sum_j m_{ij} \tilde{u}_j(x, t) + \tau \tilde{f}_i(x, t), \qquad |f_i - \tilde{f}_i| < \text{const} \cdot h,$$

et supposons que les conditions initiales et aux limites pour les fonctions u_i et $\tilde{u}_i$ sur le réseau coïncident. Alors la différence $u_i - \tilde{u}_i = w_i$ vérifie les équations aux différences analogues

$$w_i(x, t+\tau) = \left(1 - \tau \frac{|k_i(x, t)|}{h}\right) w_i(x, t) + \\ + \tau \frac{|k_i(x, t)|}{h} w_i(x \pm h, h) - \tau \sum_j m_{ij} w_j(x, t) + \tau |f_i(x, t) - \tilde{f}_i(x, t)|,$$

$$w_i(x, 0) = 0,$$

$$w_i(0, t) = 0, \text{ si } k_i(0, t) > 0,$$

$$w_i(l, t) = 0, \text{ si } k_i(l, t) < 0.$$

On sait que, partout,

$$|u_i - \tilde{u}_i| = |w_i(x, t)| \leqslant M^* \max_{x, t} |f_i(x, t) - \tilde{f}_i(x, t)| \leqslant \text{const}\, h.$$

La justification de cette inégalité termine l'étude du schéma aux différences dans le cas où les pas sont soumis à la restriction

$$\max \frac{\tau|k_i|}{h} \leqslant 1.$$

A présent, sur l'exemple du schéma pour une équation à coefficient constant k $(k > 0)$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + k \frac{\partial u}{\partial x} = f(x, t),$$

$$u|_{t=0} = f_0(x), \quad u|_{x=0} = f_1(t), \quad f_0(0) = f_1(t)$$

nous allons montrer que l'hypothèse $\tau k/h \leqslant 1$ n'a pas été introduite dans le seul but de simplifier la démonstration. Elle est fondamentale. Si elle n'est pas vérifiée, on ne peut obtenir pour les solutions du système aux différences ((x, t) parcourent les points du réseau)

$$\frac{u(x, t+\tau) - u(x, t)}{\tau} + k \frac{u(x, t) - u(x-h, t)}{h} = f(x, t),$$

$$u|_{t=0} = f_0(x), \quad u|_{x=0} = f_1(t) \quad (0 \leqslant x \leqslant l)$$

l'évaluation

$$\max_{x,\,t} |u(x, t)| \leqslant \text{const} \max [|f(x, t)|, |f_0(x)|, |f_1(t)|]$$

avec une constante indépendante de h.

En effet, posons

$$f(x, t) = 0,$$

$$f_1(t) = 0,$$

$$f_0(x) = \begin{cases} h^s(-1)^{x/h}, & \text{si } l \geqslant x > 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Pour calculer la solution dans la couche $t + \tau$ d'après la couche connue t, on trouve la formule

$$u(x, t+\tau) = \left(1 - \frac{\tau k}{h}\right) u(x, t) + \frac{\tau k}{h} u(x-h, t),$$

qui montre que les valeurs de $u(x, t)$ aux points situés à droite de la droite $x - ht/\tau = 0$ s'obtiennent seulement en utilisant les données initiales $f_0(x)$, et qu'elles ne dépendent d'aucune manière des

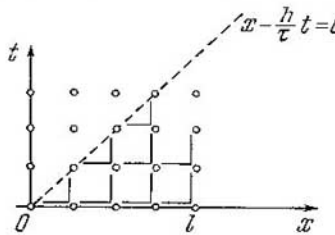

Fig. 82

valeurs aux limites $f_1(t)$. On s'en assure aussitôt en se reportant à la fig. 82. On y a réuni par des angles les points qui entrent dans une même formule aux différences, et la droite $x - ht/\tau = 0$ a été tracée en pointillé.

Il apparaît que la solution aux différences admet à droite de cette droite une représentation analytique de la forme:

$$u(x, t) = \lambda^{t/\tau} h^s (-1)^{x/h}.$$

En effet, cette fonction vérifie les conditions initiales, et en la substituant au premier et au second membre de l'équation aux différences

$$\lambda^{\frac{t+\tau}{\tau}} h^s (-1)^{\frac{x}{h}} = \left(1 - \frac{\tau k}{h}\right) \lambda^{\frac{t}{\tau}} h^s (-1)^{\frac{x}{h}} + \frac{\tau k}{h} \lambda^{\frac{t}{\tau}} h^s (-1)^{\frac{x-h}{h}},$$

on trouve, après simplification par $\lambda^{t/\tau}h^s(-1)^{x/h}$, que cette équation est vérifiée si

$$\lambda = \left(1 - \frac{\tau k}{h}\right) + \frac{\tau k}{h}(-1) = 1 - 2\frac{\tau k}{h}.$$

Ainsi donc, nous nous sommes assurés que pour $x > ht/\tau$ la solution de notre problème aux différences est donnée par la formule

$$u(x, t) = (-1)^{\frac{x}{h} - \frac{t}{\tau}}\left[2\frac{\tau k}{h} - 1\right]^{\frac{t}{\tau}} h^s.$$

Fixons à présent le rapport τ/h de telle façon que $\tau k/h$ soit supérieur à l'unité ($\tau k/h > 1$). Alors $2\tau k/h - 1 > 1$ et

$$\left[2\frac{\tau k}{h} - 1\right]^{\frac{t}{\tau}} h^s \to \infty \text{ quand } h \to 0$$

bien que

$$\max\{|f(x, t)|, |f_0(x)|, |f_1(t)|\} = \max_x |f_0(x)| = h^s \to 0.$$

L'impossibilité d'obtenir l'évaluation

$$\max_{x, t} |u(x, t)| \leqslant \text{const} \max\{|f(x, t)|, |f_0(x)|, |f_1(t)|\}$$

est ainsi démontrée. On convient de dire que notre schéma aux différences pour $\tau k/h > 1$ est *instable*. On entend par là que, par exemple, une petite variation des données initiales peut entraîner une variation catastrophiquement forte de la solution.

Nous allons maintenant apporter une considération simple et intuitive montrant que les solutions des équations aux différences ne convergent pas vers la solution des équations aux dérivées partielles lorsque $\tau k/h > 1$. Par là même, nous aurons montré une fois encore l'importance de l'inégalité $\tau k/h \leqslant 1$ pour l'applicabilité du schéma aux différences décrit.

En effet, la fig. 83 montre que la valeur $u(x_0, t_0)$ de la solution aux différences s'exprime d'après les valeurs $u(x, 0)$ aux points de la couche initiale $t = 0$ situés sur la base du triangle rectangle de côtés parallèles aux axes x, t et d'hypoténuse dont la pente par rapport à l'axe des x vaut τ/h. (Si une partie des points de la base de ce triangle se trouvent à gauche de la frontière $x = 0$, il faudra prendre à leur place les points frontières pour $x = 0$ situés dans ce triangle.) Le triangle que nous avons décrit constitue le domaine aux différences d'influence sur le point (x_0, t_0).

La solution de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial u}{\partial t} + k\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

au point (x_0, t_0) est égale, en vertu de la formule $u = u(x - kt)$, à la valeur de u pour $t = 0$ ou pour $x = 0$ au point d'intersection avec la frontière correspondante de la caractéristique $x - kt = x_0 - kt_0$ passant par notre point (x_0, t_0). Si $k\tau/h < 1$, cette caractéristique est située dans le domaine de dépendance aux différences (fig. 83), mais si $k\tau/h > 1$, elle est située en dehors (fig. 84).

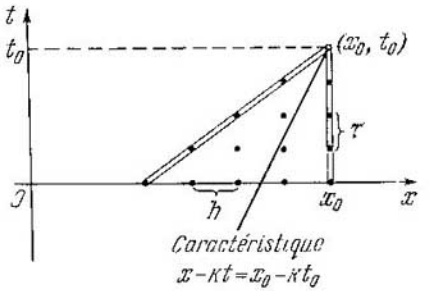

Fig. 83

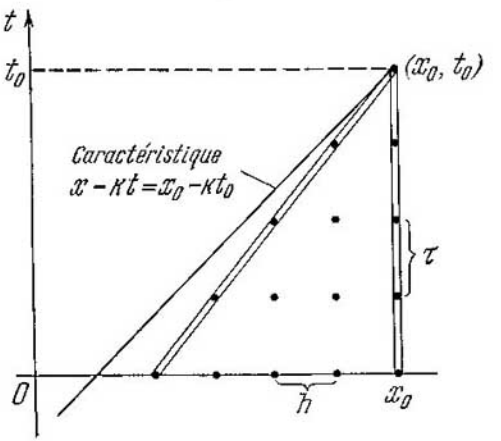

Fig. 84

Dans ce dernier cas, en changeant les données initiales seulement en dehors du domaine aux différences d'influence sur le point (x_0, t_0), on peut changer la valeur cherchée $u(x_0, t_0)$, alors que le schéma aux différences est insensible à ce changement. Il est clair que pour

$k\tau/h > 1$ il ne saurait être question de convergence des solutions des équations aux différences vers les solutions des équations aux dérivées partielles. Le raisonnement qui vient d'être décrit a été utilisé la première fois en 1928 par Courant, Friedrichs et Lewy sur un exemple voisin de celui envisagé ici.

Il est à noter toutefois que si le domaine aux différences d'influence contient le domaine d'influence de l'équation aux dérivées partielles, la solution de l'équation aux différences, lorsque $h \to 0$, ne converge pas forcément vers la solution de l'équation aux dérivées partielles qu'elle approche.

Ainsi, le schéma, le plus naturel semble-t-il,

$$\frac{u(x, t+\tau) - u(x, t)}{\tau} + \frac{u(x+h, t) - u(x-h, t)}{2h} = 0$$

pour l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

ne saurait être utilisé pour aucun $r = \tau/h$ fixé dans le cas des h suffisamment petits pour calculer la solution approchée. Il apparaît qu'on peut construire pour ce schéma une suite de données initiales rapidement décroissantes (quand $h \to 0$) telles que les solutions calculées d'après elles croissent très rapidement lorsque $h \to 0$. Le domaine aux différences d'influence pour ce schéma contient une caractéristique si $\tau/h \leqslant 1$. (Vérifiez-le!)

Prenons pour données initiales de ce genre

$$u(x, 0) = \operatorname{Re}[h^s e^{i\frac{\pi}{2}\cdot\frac{x}{h}}] = h^s \cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{x}{h}\right).$$

(Aux points de la couche initiale du réseau $u(x, 0)$ prend successivement les valeurs : h^s, 0, $-h^s$, 0, h^s, 0, . . .)

Il est facile de s'assurer que le schéma que nous avons apporté a pour solution

$$u(x, t) = \left(1 - i\frac{\tau}{h}\right)^{\frac{t}{\tau}} h^s e^{i\frac{\pi}{2}\cdot\frac{x}{h}},$$

si bien qu'est aussi solution sa partie réelle

$$\operatorname{Re}\left[\left(1 - i\frac{\tau}{h}\right)^{\frac{t}{\tau}} h^s e^{i\frac{\pi}{2}\cdot\frac{x}{h}}\right],$$

qui prend pour $t = 0$ les valeurs initiales données. De l'égalité

$$\left|\left(1 - i\frac{\tau}{h}\right)^{\frac{t}{\tau}} h^s e^{i\frac{\pi}{2}\cdot\frac{x}{h}}\right| = \left[\sqrt{1 + \frac{\tau^2}{h^2}}\right]^{\frac{t}{\tau}} h^s = (\sqrt{1+r^2})^{\frac{t}{\tau}} h^s$$

on déduit sans peine que ces solutions ne sont pas bornées au voisinage de n'importe quel point fixe (x, t) pour $h \to 0$.

Bien qu'on vienne de démontrer que le schéma tombe en défaut pour tout $\tau/h = r$ fixé, on peut quand même s'en servir si on fait les calculs avec un pas temporel τ très petit relativement à h. La convergence vers les solutions de l'équation $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ a lieu si $h \to 0$ et $\tau \approx h^2$.

Nous décrirons au paragraphe suivant des schémas pour les équations hyperboliques nous permettant de faire les calculs avec n'importe quel rapport fixe τ/h.

En conclusion, envisageons encore un exemple intéressant de schéma aux différences pour l'équation $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$. Il s'écrit comme suit :

$$\frac{u(x, t+\tau) - \frac{u(x+h, t)+u(x-h, t)}{2}}{\tau} + \frac{u(x+h, t)-u(x-h, t)}{2h} = 0.$$

Si l'on suppose que $u(x, t)$ est une fonction suffisamment régulière douée de dérivées quatrièmes bornées, on peut, comme d'ordinaire, obtenir à l'aide de la formule de Taylor l'égalité

$$\frac{u(x, t+\tau) - \frac{u(x+h, t)+u(x-h, t)}{2}}{\tau} + \frac{u(x+h, t)-u(x-h, t)}{2h} =$$

$$= u_t + u_x - \frac{h^2}{2\tau} u_{xx} + \frac{\tau}{2} u_{tt} + O\left(\tau^2, h^2, \frac{h^4}{\tau}\right).$$

Sur les solutions de l'équation $u_t + u_x = 0$, le reste, qui a la forme

$$-\frac{h^2}{2\tau} u_{xx} + \frac{\tau}{2} u_{tt} + O\left(\tau^2, h^2, \frac{h^4}{\tau}\right),$$

ne tend vers 0 quand $h \to 0$ que si $\frac{h^2}{\tau} \to 0$, $\tau \to 0$, $\frac{h^4}{\tau} \to 0$. A cet effet, il suffit, par exemple, de lier les pas τ, h par la dépendance $\tau = rh$ ($r = \text{const}$). S'il apparaît que $\tau = Rh^2$ ($R = \text{const}$) lorsque $h \to 0$, alors le reste ne tend pas vers 0. On peut montrer que dans ce cas les solutions des équations aux différences convergent vers la solution de l'équation parabolique

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2R} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

Les schémas qui, pour différents rapports entre les pas, approchent différentes équations sont dits rigides.

Dans le cas où $r = \tau/h = \text{const}$, il faut pour la convergence que r ne soit pas supérieur à l'unité. Ceci résulte de l'examen des domaines d'influence. Pour $r \leqslant 1$ il y a convergence. Brossons succinctement le schéma de la démonstration correspondante dans l'hypothèse qu'on cherche la solution du problème de Cauchy de l'équa-

tion $\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}=f(x,\ t)$ d'après les données initiales prises sur le segment $0 \leqslant x \leqslant 1$ pour $t=0$. Ces données initiales déterminent (pour $t>0$) la solution dans la demi-bande $0 \leqslant x-t \leqslant 1$, $t>0$. D'après notre schéma aux différences, nous pouvons espérer l'obtenir seulement dans le triangle $t \geqslant 0$, $t \leqslant x/r$, $t \leqslant (1-x)/r$, situé, pour $r \leqslant 1$, dans ladite demi-bande. Sur la fig. 85 où ce triangle

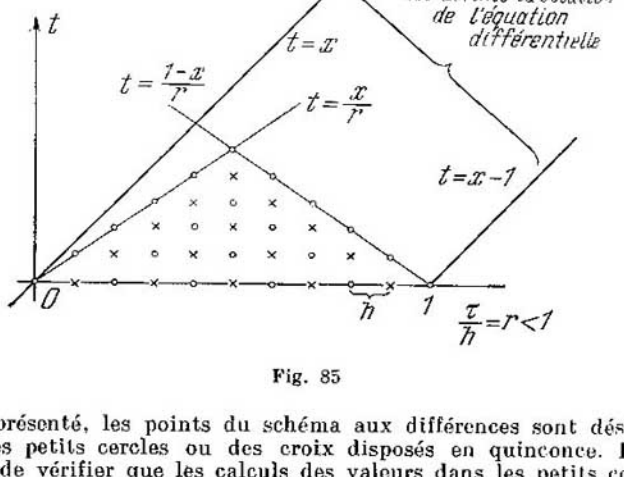

Fig. 85

est représenté, les points du schéma aux différences sont désignés par des petits cercles ou des croix disposés en quinconce. Il est facile de vérifier que les calculs des valeurs dans les petits cercles ne dépendent pas des valeurs de $u(x, y)$ aux croix, et inversement. Nous avons représenté différemment ces deux groupes afin de mettre en évidence ce fait intéressant, bien que d'importance mineure.

Ecrivant le schéma aux différences sous forme résolue par rapport à $u(x,\ t+\tau)$,

$$u(x,\ t+\tau)=\frac{1-r}{2}\,u(x+h,\ t)+\frac{1+r}{2}\,u(x-h,\ t)+\tau f(x,\ t),$$

et supposant $r \leqslant 1$, on déduit facilement les inégalités :

$$\max_x |u(x,\ t+\tau)| \leqslant \max_x |u(x,\ t)| + \tau \max_{x,\ t} |f(x,\ t)|,$$

$$\max\left[\max_x |u(x,\ t+\tau)|,\ \max_{x,\ t} |f(x,\ t)|\right] \leqslant$$

$$\leqslant (1+\tau)\max\left[\max_x |u(x,\ t)|;\ \max_{x,\ t} |f(x,\ t)|\right],$$

$$\max_x |u(x, t)| \leqslant (1+\tau)^{\frac{t}{\tau}} \max\left[\max_x |u(x, 0)|, \max_{x,t} |f(x, t)| \leqslant\right.$$

$$\left. \leqslant \text{const} \max\left[\max_x |u(x, 0)|, \max_{x,t} |f(x, t)|\right]\right.$$

En réunissant cette inégalité, évaluant la solution des équations aux différences d'après les données initiales et les seconds membres, avec l'évaluation du reste ($f = O(h)$), on est conduit précisément à la démonstration de la convergence. Je ne m'arrêterai pas plus longuement sur ce point, mais je pense qu'il sera utile au lecteur de faire la démonstration en toute rigueur.

§ 36. Schémas aux différences implicites

Lemme sur la résolubilité d'un système d'équations à matrice à trois diagonales. Schéma aux différences implicite pour l'équation hyperbolique et évaluation de ses solutions. Etude de la convergence. Schémas explicite et implicite pour l'équation de la chaleur. Description de la méthode du double parcours pour la résolution des équations aux différences qui apparaissent dans les schémas implicites les plus simples.

Les schémas aux différences pour les systèmes hyperboliques, étudiés au paragraphe précédent, avaient ceci de commode que la résolution du système algébrique linéaire lié à ces schémas ne présentait aucune difficulté. Les équations aux différences pouvaient être résolues successivement en passant d'une couche temporelle de points du réseau à la suivante, et pour un pas de ce processus de récurrence, c'est-à-dire pour le passage de la couche t à la couche $t + \tau$, on pouvait écrire les formules explicites d'après lesquelles le calcul doit être mené. De ce fait, on a convenu d'appeler *explicites* de tels schémas. Or, les schémas explicites pour les équations hyperboliques présentent un défaut majeur. *Ils ne se prêtent au calcul que si le pas temporel n'est pas trop grand.* Cette restriction imposée aux pas résulte de la comparaison des domaines d'influence exact et aux différences. Nous nous sommes arrêtés sur cette comparaison au paragraphe précédent.

Nous allons considérer ici des exemples de schémas implicites pour les équations hyperboliques ainsi que pour les équations paraboliques. Les équations aux différences engendrées par ces schémas ne se résolvent pas sous forme explicite simple par rapport à la couche temporelle de réseau $t + \tau$, alors qu'on a déjà trouvé toutes les inconnues sur la couche t.

Dans ce paragraphe, nous allons décrire et étudier quelques-uns de ces schémas, mais nous ne chercherons pas au début à résoudre effectivement les équations qui en résultent. Malgré cela, des évaluations d'erreur seront déduites pour les solutions des équations aux différences. Après quoi, nous passerons au processus de calcul habituellement utilisé pour résoudre de telles équations.

Avant de décrire la construction de schémas aux différences, nous allons démontrer un lemme simple, mais très important pour la suite, sur les solutions d'un système d'équations linéaires d'une certaine forme particulière.

Lemme. *Le système d'équations*

$$u_0 = \varphi,$$

$$a_n u_{n-1} + b_n u_n + c_n u_{n+1} = g_n \quad (n = 1, 2, \ldots, N-1),$$

$$u_N = \psi,$$

dont les coefficients vérifient les inégalités

$$|b_n| \geqslant 1 + |a_n| + |c_n|,$$

est résoluble quels que soient les seconds membres $\{\varphi, g_1, g_2, \ldots, g_{N-1}, \psi\}$, *et on a pour ses solutions l'évaluation*

$$|u_k| \leqslant \max\{|\varphi|, |g_1|, |g_2|, \ldots, |g_{N-1}|, |\psi|\}.$$

Démonstration. Fixant les coefficients a_p, b_p, c_p, supposons que $(u_0, u_1, u_2, \ldots, u_N)$ soit solution du système pour certains seconds membres. Si, parmi $|u_0|$, $|u_1|$, $|u_2|$, $\ldots, |u_{N-1}|, |u_N|$, est maximum ou bien $|u_0|$, ou bien $|u_N|$, l'inégalité

$$|u_k| \leqslant \max\{|\varphi|, |\psi|, |g_1|, \ldots, |g_{N-1}|\}$$

est évidente. S'il n'en est pas ainsi, est maximum l'un des modules $|u_1|, |u_2|, \ldots, |u_{N-1}|$. Supposons le maximum atteint par $|u_s|$. Alors,

$$|u_k| \leqslant |u_s|$$

pour tous les $k = 0, 1, 2, \ldots, N-1, N$, et, notamment,

$$|u_s| \geqslant |u_{s-1}|,$$

$$|u_s| \geqslant |u_{s+1}|.$$

De l'égalité

$$b_s u_s = g_s - a_s u_{s-1} - c_s u_{s+1}$$

et de l'hypothèse relativement aux coefficients résultent les inégalités

$$(1 + |a_s| + |c_s|)|u_s| \leqslant |b_s||u_s| \leqslant |g_s| + |a_s||u_{s-1}| + |c_s||u_{s+1}| \leqslant |g_s| + (|a_s| + |c_s|)|u_s|.$$

Il résulte maintenant avec évidence de celles-ci que

$$|u_s| \leqslant |g_s| \leqslant \max\{|\varphi|, |g_1|, |g_2|, \ldots, |g_{N-1}|, |\psi|\}.$$

Ainsi, on a dans tous les cas possibles l'inégalité qu'on se proposait de démontrer

$$|u_k| \leqslant \max\{|\varphi|, |g_1|, \ldots, |g_{N-1}|, |\psi|\},$$
$$k = 0, 1, 2, \ldots, N.$$

Supposant que pour certains seconds membres la solution existe, nous avons montré que cette solution ne saurait être trop grande. Reste à présent à démontrer que le système d'équations est effectivement toujours résoluble. Il est clair que si l'on prend des seconds membres nuls $\varphi = 0$, $g_1 = g_2 = \ldots = g_{N-1} = 0$, $\psi = 0$, le système homogène alors obtenu est résoluble, puisqu'il admet, par exemple, la solution triviale

$$u_0 = 0,\ u_1 = 0,\ u_2 = 0,\ \ldots,\ u_{N-1} = 0,\ u_N = 0.$$

Montrons qu'il n'a pas d'autres solutions. En effet, d'après ce qu'on a démontré, n'importe quelle solution $u_0, u_1, \ldots, u_N$ de ce système vérifie l'inégalité

$$|u_k| \leqslant \max\{|\varphi|, |g_1|, \ldots, |g_{N-1}|, |\psi|\}.$$

Ainsi, nous avons montré que le système homogène de $N+1$ équations linéaires à $N+1$ inconnues

$$u_0 = 0,$$
$$a_n u_{n-1} + b_n u_n + c_n u_{n+1} = 0, \quad n = 1, 2, \ldots, N-1,$$
$$u_N = 0$$

n'admet que la solution nulle. Il en résulte que le déterminant de ce système est différent de zéro. Dès lors, ce système est résoluble, et cela de façon unique, quels que soient ses seconds membres. L'évaluation pour sa solution a déjà été obtenue.

Venons-en à présent à la description de la construction du schéma aux différences. Pour la simplicité, nous nous bornerons à l'étude d'une seule équation hyperbolique

$$\frac{\partial u}{\partial t} + k(x, t)\frac{\partial u}{\partial x} + m(x, t)u = f(x, t)$$

à coefficients et second membre suffisamment réguliers. Nous considérerons cette équation dans le rectangle

$$0 \leqslant t \leqslant T,$$
$$0 \leqslant x \leqslant l.$$

Nous supposerons $k(0, t) > 0$, $k(l, t) < 0$, et nous prendrons les conditions aux limites et initiales sous la forme suivante:

$$u(x, 0) = \omega(x),$$
$$u(0, t) = \varphi(t),$$
$$u(l, t) = \psi(t).$$

On exige des seconds membres, des conditions initiales et aux limites que la solution construite à l'aide de ces grandeurs soit suffisamment régulière, à savoir qu'elle ait partout dans le rectangle et sur sa frontière des dérivées secondes bornées.

Nous disposerons les couches temporelles du schéma aux différences au moyen des valeurs $t = 0,\ t = \tau,\ t = 2\tau,\ \ldots,\ t = p\tau$, en choisissant pour points de réseau dans ces couches les points de coordonnées $x_0 = 0,\ x_1 = h,\ x_2 = 2h,\ \ldots,\ x_N = Nh = l$. Le pas de ce réseau $\Delta x = h = l/N$.

Nous prendrons les équations aux différences pour déterminer $u(x, t+\tau)$ aux points internes du réseau $(x = h,\ 2h,\ \ldots\ \ldots,\ (N-1)h)$ en fonction du signe de $k(x, t)$ sous l'une ou l'autre des deux formes

$$\frac{u(x, t+\tau)-u(x, t)}{\tau} + k(x, t)\frac{u(x, t+\tau)-u(x-h, t+\tau)}{h} + \\ + m(x, t)\,u(x, t) = f(x, t),$$

si $k(x, t) \geqslant 0$;

$$\frac{u(x, t+\tau)-u(x, t)}{\tau} + k(x, t)\frac{u(x+h, t+\tau)-u(x, t+\tau)}{h} + \\ + m(x, t)\,u(x, t) = f(x, t),$$

si $k(x, t) < 0$. En outre, nous supposerons données les valeurs initiales et aux limites :

$$u(nh, 0) = \omega(nh),$$
$$u(0, t+\tau) = \varphi(t+\tau),$$
$$u(Nh, t+\tau) = u(l, t+\tau) = \psi(t+\tau).$$

Nous montrerons que le système d'équations aux différences écrit est univoquement résoluble, si bien qu'il permet de déterminer successivement la solution approchée sur toutes les couches temporelles du réseau situées dans notre rectangle. Nous montrerons également que les valeurs de $u(x, t)$ calculées à partir de ce système vérifient en tous les points du réseau l'évaluation

$$|u(x, t)| \leqslant \text{const}\,[\max_{x,\,t}(|\varphi|, |\psi|, |f|, |\omega|)],$$

la constante ne dépendant pas de τ et h quand ces pas sont suffisamment petits.

A présent, supposant fondées la résolubilité des équations et l'évaluation pour la solution, indiquons brièvement le schéma pour vérifier que, les pas τ et h étant petits, la solution approchée est voisine de la solution exacte. Ce schéma est le même que celui utilisé lors de l'étude de l'équation de Laplace aux différences, et sa réalisation correcte ne soulève aucune difficulté.

En même temps que la solution approchée, notée $\hat{u}(x, t)$, envi-

sageons la solution exacte $u(x, t)$ de l'équation aux dérivées partielles. En la substituant dans les équations aux différences et utilisant la formule de Taylor, il n'est pas difficile de s'assurer que ces équations aux différences ne seront vérifiées exactement que si l'on remplace les seconds membres $f(x, t)$ par $f(x, t) + \alpha(x, t, \tau, h)$, $\alpha(x, t, \tau, h)$ étant l'erreur de l'approximation

$$|\alpha(x, t, \tau, h)| < \text{const}\,(\tau + h).$$

La différence $\tilde{u}(x, t) - u(x, t) = V(x, t)$ vérifie les équations

$$\frac{V(x, t+\tau) - V(x, t)}{\tau} + k(x, t)\,\frac{V(x, t+\tau) - V(x-h, t+\tau)}{h} + \\ + m(x, t)\,V(x, t) - \alpha(x, t, \tau, h),$$

si $k(x, t) \geqslant 0$;

$$\frac{V(x, t+\tau) - V(x, t)}{\tau} + k(x, t)\,\frac{V(x+h, t+\tau) - V(x, t+\tau)}{h} + \\ + m(x, t)\,V(x, t) = \alpha(x, t, \tau, h),$$

si $k(x, t) < 0$,

$$V(x, 0) = 0,$$
$$V(0, t+\tau) = 0,$$
$$V(Nh, t+\tau) = 0,$$

lesquelles équations ne diffèrent de notre schéma aux différences que par les seconds membres. Dès lors, on peut se servir pour $V(x, t)$ de l'évaluation de la solution aux différences que nous promettons de fonder :

$$|u(x, t) - \tilde{u}(x, t)| = |V(x, t)| \leqslant \\ \leqslant \text{const}\,[\max\,|\alpha(x, t, h, \tau)|] \leqslant \text{const}\,(\tau + h).$$

Sur ce, nous avons fini de démontrer que les solutions exacte et approchée sont voisines.

Problème. Comparez les domaines d'influence de l'équation aux dérivées partielles et des équations aux différences implicites. Explicitez la raison pour laquelle les grands $k\tau/h$ ne contredisent pas ici les raisonnements de Courant, Friedrichs, Lewy.

Passons à la démonstration de la résolubilité des équations aux différences et à l'évaluation de la solution.

Posant $x = nh$ et introduisant la notation $u(nh, t + \tau) = u_n$, les équations

$$u(0, t+\tau) = \varphi,$$

$$\frac{u(x, t+\tau) - u(x, t)}{\tau} + k(x, t)\,\frac{u(x, t+\tau) - u(x-h, t+\tau)}{h} + \\ + m(x, t)\,u(x, t) = f(x, t),$$

si $k(x,\ t) \geqslant 0$,

$$\frac{u(x,\ t+\tau)-u(x,\ t)}{\tau}+k(x,\ t)\frac{u(x+h,\ t+\tau)-u(x,\ t+\tau)}{h}+$$

$$+m(x,\ t)\,u(x,\ t)=f(x,\ t),$$

si $k(x,\ t)<0$,

$$u(Nh,\ t+\tau)=\psi$$

peuvent se recopier sous la forme

$$u_0=\varphi,$$

$$a_n u_{n-1}+b_n u_n+c_n u_{n+1}=g_n,$$

$$u_N=\psi,$$

où

$$a_n=\begin{cases}-\dfrac{k(x,\ t)\,\tau}{h}, & \text{si } k(x,\ t)\geqslant 0,\\ 0, & \text{si } k(x,\ t)<0,\end{cases}$$

$$b_n=1+\frac{|k(x,\ t)|\,\tau}{h},$$

$$c_n=\begin{cases}0, & \text{si } k(x,\ t)\geqslant 0,\\ \dfrac{k(x,\ t)\,\tau}{h}, & \text{si } k(x,\ t)<0,\end{cases}$$

$$g_n=[1-\tau m(x,\ t)]\,u(x,\ t)+\tau f(x,\ t).$$

Alors, sont manifestement remplies les conditions

$$|b_n|=1+|a_n|+|c_n|,$$

$$|g_n|\leqslant(1+\tau M)\max_x|u(x,\ t)|+\tau\max_{x,\ t}|f(x,\ t)|.$$

De ces conditions résultent la résolubilité des équations pour $u(x,\ t+\tau)$ et l'inégalité

$$u(x,\ t+\tau)|\leqslant\max\left[|\varphi|,\ |\psi|,\ (1+\tau M)\max_x|u(x,\ t)|+\right.$$

$$\left.+\tau\max_{x,\ t}|f(x,\ t)|\right].$$

Posant

$$F=\left|\max\left[\max_t|\varphi(t)|,\ \max_t|\psi(t)|,\ \max_x|\omega(x)|,\ \max_{x,\ t}|f(x,\ t)|\right]\right|,$$

$$U(t)=\max\left[F,\ \max_x|u(x,\ t)|\right],$$

on peut écrire :

$$U(t+\tau)\leqslant\max\left[F,\ (1+\tau M)\,U(t)+\tau F\right]\leqslant(1+\tau M+\tau)\,U(t),$$

$$U(t)\leqslant[1+\tau(M+1)]^{t/\tau}\,U(0)\leqslant[1+\tau(M+1)]^{T/\tau}\,F\leqslant M^*F.$$

Nous procédons maintenant exactement comme au paragraphe précédent pour évaluer la solution déduite suivant le schéma explicite. Comme t est ici un multiple quelconque de τ, mais non supérieur à T, nous avons démontré l'évaluation requise

$$|u(x, t)| \leqslant \text{const} \max_{x, t} [|\varphi|, |\psi|, |f|, |\omega|].$$

Nous allons encore considérer deux schémas simples pour l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t).$$

Nous nous bornons ici au cas où la diffusivité est constante et égale à 1.

Nous chercherons de nouveau la solution avec les conditions initiales et aux limites

$$u(0, t) = \varphi(t), \quad u(l, t) = \psi(t),$$
$$u(x, 0) = \omega(x)$$

dans le rectangle $0 \leqslant x \leqslant l$, $0 \leqslant t \leqslant T$ en utilisant le même réseau, de pas τ, $h = l/N$, que dans l'exemple précédent pour résoudre l'équation hyperbolique.

Considérons les deux schémas aux différences: l'explicite

$$\frac{u(x, t+\tau) - u(x, t)}{\tau} - \frac{u(x+h, t) - 2u(x, t) + u(x-h, t)}{h^2} = f(x, t)$$

et l'implicite

$$\frac{u(x, t+\tau) - u(x, t)}{\tau} - \frac{u(x+h, t+\tau) - 2u(x, t+\tau) + u(x-h, t+\tau)}{h^2} = f(x, t).$$

Chacun de ces schémas approche l'équation de la chaleur en ce sens qu'une solution suffisamment régulière de l'équation aux dérivées partielles, si elle est substituée dans l'équation aux différences, vérifie celle-ci, pourvu qu'on ajoute au second membre $f(x, t)$ la fonction de réseau $\alpha(x, t, \tau, h)$, qui tend vers zéro lorsque τ, h décroissent. Le lecteur pourra vérifier ce fait en utilisant la formule de Taylor.

Le schéma explicite, résolu par rapport à $u(x, t+\tau)$,

$$u(x, t+\tau) = \begin{cases} \varphi(t+\tau), & \text{si } x = 0, \\ \frac{\tau}{h^2} u(x+h, t) + \left(1 - 2\frac{\tau}{h^2}\right) u(x, t) + \\ + \frac{\tau}{h^2} u(x-h, t) + \tau f(x, t), & \text{si } x = nh \\ & (n = 1, 2, \ldots, N-1), \\ \psi(t+\tau), & \text{si } x = Nh, \end{cases}$$

pour $\tau/h^2 \leqslant 1/2$ conduit sans difficultés à l'inégalité

$$\max_x |u(x, t+\tau)| \leqslant \max[|\varphi(t+\tau)|, |\psi(t+\tau)|, \max_x |u(x, t)| + \tau \max_{x, t} |f|].$$

On peut obtenir une inégalité exactement pareille pour le schéma implicite aussi. Il suffit à cet effet de poser

$$u(nh, t+\tau) = u_n, \quad a_n = c_n = -\frac{\tau}{h^2}, \quad b_n = 1 + 2\frac{\tau}{h^2} \quad (x = nh),$$

$$g_n = u(x, t) + \tau f(x, t) \quad (|b_n| = 1 + |a_n| + |c_n|),$$

de recopier les équations sous la forme du système

$$u_0 = \varphi,$$

$$a_n u_{n-1} + b_n u_n + c_n u_{n+1} = g_n, \quad n = 1, 2, \ldots, N-1,$$

$$u_N = \psi$$

et d'appliquer le lemme démontré au début de ce paragraphe.

Le schéma implicite permet d'obtenir l'inégalité sans aucune restriction imposée à τ/h^2.

Ainsi, nous avons montré que

$$\max_x |u(x, t+\tau)| \leqslant \max[|\varphi|, |\psi|, \max_x |u(x, t)| + \tau \max_{x, t} |f|].$$

Cette inégalité diffère de celle déduite un peu avant dans le cas du schéma pour l'équation hyperbolique

$$\max_x |u(x, t+\tau)| \leqslant \max[|\varphi|, |\psi|, (1+\tau M) \max_x |u(x, t)| + \tau \max_{x, t} |f|],$$

par le seul fait qu'il faut poser $M = 0$.

Ainsi qu'il a déjà été montré, une telle inégalité mène à l'évaluation

$$\max_{x, t} |u(x, t)| \leqslant M^* \max_{x, t} [|\varphi|, |\psi|, |f|, |\omega|].$$

On déduit sans peine de cette évaluation et des évaluations pour les erreurs d'approximation $\alpha(x, t, \tau, h)$ que, pour τ, h petits, la solution aux différences est voisine de la solution exacte. Rappelons qu'on supposait remplie pour les pas du schéma explicite l'inégalité $\tau/h^2 \leqslant 1/2$. Aucune restriction n'est imposée aux pas du schéma implicite.

Il sera utile au lecteur de mener en détail les raisonnements ébauchés ici et d'obtenir une évaluation pour l'erreur.

La restriction $r = \tau/h^2 \leqslant 1/2$ pour le schéma explicite est essentielle. Il est facile de s'en assurer si l'on vérifie que $u(x, t) =$

$= (1 - 4r)^{t/\tau} h^s (-1)^{x/h}$ est solution de l'équation aux différences

$$\frac{u(x, t+\tau) - u(x, t)}{\tau} - \frac{u(x+h, t) - 2u(x, t) + u(x-h, t)}{h^2} = 0,$$

vérifiant pour $t = 0$ les données initiales

$$u(x, 0) = h^s (-1)^{x/h}.$$

A l'aide de cette solution, de la même façon qu'on a opéré pour le schéma explicite dans le cas de l'équation hyperbolique, on peut s'assurer qu'on ne peut trouver une constante M^* indépendante de h dans l'évaluation de la solution aux différences, si, pour $h \to 0$, le rapport $r = \tau/h^2$ reste constant et supérieur à $\frac{1}{2}$ (alors $|1 - 4r| > 1$). On dit que *pour $r = \tau/h^2 > 1/2$ le schéma aux différences explicite pour l'équation de la chaleur est instable.*

Les exemples apportés montrent que souvent il est plus commode d'utiliser les schémas aux différences implicites, plutôt que les schémas explicites. Ceci, certes, seulement dans le cas où les équations aux différences implicites se résolvent facilement. Il se trouve qu'il existe pour les systèmes d'équations de la forme

$$u_0 = \varphi$$
$$a_n u_{n-1} + b_n u_n + c_n u_{n+1} = g_n \quad n = 1, 2, \ldots, N-1,$$
$$u_N = \psi$$

une méthode simple et commode de résolution, méthode qui d'ailleurs, dans tous les cas déjà rencontrés, est peu sensible aux erreurs de calcul. C'est une des variantes de la méthode de Gauss bien connue d'élimination des inconnues.

Nous allons maintenant décrire cette méthode, et nous en ferons plus loin au § 38 une étude détaillée.

L'équation $u_0 = \varphi$ peut s'écrire, en posant

$$L_{1/2} = 0, \quad K_{1/2} = \varphi,$$

comme suit:

$$u_0 = L_{1/2} u_1 + K_{1/2}.$$

L'équation

$$a_1 u_0 + b_1 u_1 + c_1 u_2 = g_1,$$

d'où l'on élimine u_0, peut à présent s'écrire sous la forme

$$(a_1 L_{1/2} + b_1) u_1 + c_1 u_2 = g_1 - a_1 K_{1/2}.$$

Pourvu que $a_1 L_{1/2} + b_1 \neq 0$, ce que nous supposerons ici, on a

$$u_1 = -\frac{c_1}{a_1 L_{1/2} + b_1} u_2 + \frac{g_1 - a_1 K_{1/2}}{a_1 L_{1/2} + b_1}.$$

Une fois introduites les notations

$$L_{3/2} = -\frac{c_1}{a_1 L_{1/2} + b_1}, \quad K_{3/2} = \frac{g_1 - a_1 K_{1/2}}{a_1 L_{1/2} + b_1},$$

l'inconnue u_1 s'exprime d'après u_2 à l'aide de la relation

$$u_1 = L_{3/2} u_2 + K_{3/2}.$$

Le processus d'élimination des inconnues peut être poursuivi. Supposons qu'on ait déjà la relation

$$u_{n-1} = L_{n-1/2} u_n + K_{n-1/2}.$$

Eliminant en se servant de cette dernière u_{n-1} de l'équation

$$a_n u_{n-1} + b_n u + c_n u_{n+1} = g_n,$$

on est conduit à la relation

$$u_n = L_{n+1/2} u_{n+1} + K_{n+1/2},$$

où

$$L_{n+1/2} = \frac{-c_n}{a_n L_{n-1/2} + b_n},$$

$$K_{n+1/2} = \frac{g_n - a_n K_{n-1/2}}{a_n L_{n-1/2} + b_n}.$$

Pour pouvoir calculer $L_{n+1/2}$, $K_{n+1/2}$, il faut que le dénominateur $a_n L_{n-1/2} + b_n$ soit non nul.

Ayant obtenu la relation

$$u_{N-1} = L_{N-1/2} u_N + K_{N-1/2}$$

et notant que $u_N = \psi$, on peut calculer u_{N-1}. Après quoi, u_{N-2} est déterminée par l'égalité

$$u_{N-2} = L_{N-3/2} u_{N-1} + K_{N-3/2},$$

et ainsi de suite, tant qu'on n'a pas déterminé successivement toutes les inconnues

$$u_{N-3}, \ u_{N-4}, \ \ldots, \ u_3, \ u_2, \ u_1, \ u_0.$$

Il est intéressant de noter que lors du processus qui vient d'être décrit, la résolution du système de $N + 1$ équations exige un nombre d'opérations arithmétiques qui est seulement un nombre fini de fois plus grand que N, alors que la résolution d'un système linéaire arbitraire de N équations exige habituellement un nombre d'opérations arithmétiques de l'ordre de N^3. Une telle réduction du travail a été possible en raison du caractère spécifique des équations envisagées.

La méthode exposée, dite méthode du *double parcours* *), se divise en deux parties. Dans un premier temps, on calcule successivement les coefficients de parcours $L_{n+1/2}$, $K_{n+1/2}$ ($n = 1, 2, \ldots, N-1$) (parcours direct), puis on calcule par récurrence en rétrogradant les inconnues u_N, u_{N-1}, $\ldots$, u_1, u_0 (parcours inverse).

Nous montrerons au § 38 que, utilisant la méthode du parcours pour résoudre une large classe d'équations aux différences, on n'a jamais à diviser par zéro. Qui plus est, on montrera que cette méthode est peu sensible aux erreurs dans les calculs intermédiaires.

§ 37. Approximation et stabilité

Schématisation des études faites sur l'erreur des solutions aux différences. Notions d'approximation et de stabilité. De l'approximation et de la stabilité résulte la convergence. Exemple de schéma aux différences pour l'équation $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = f$, schéma qu'il est commode de considérer comme approchant non pas cette équation, mais une conséquence de cette équation. Etude sur l'exemple de ce même schéma de la non-trivialité de la notion d'approximation aux points frontières.

Etudiant les schémas aux différences pour l'équation de Laplace, pour les équations hyperboliques et paraboliques, nous avons toujours mené l'étude en la décomposant en deux étapes.

La première étape consiste à vérifier que la solution envisagée u de l'équation aux dérivées partielles $Lu = f$, une fois substituée dans l'équation aux différences approchante $L_h u = f$, vérifie presque exactement cette équation. En règle générale, on établit la légitimité des égalités du type

$$L_h u - Lu = O(h),$$

$$L_h u - Lu = O(h^2 + \tau^2), \text{ etc.}$$

(h, τ sont les pas du schéma aux différences). La vérification de la légitimation d'affirmations de ce genre est dite *vérification de l'approximation*.

La seconde étape consiste à vérifier la *stabilité*. *On entend par stabilité l'observation pour les solutions des équations aux différences $L_h u_h = f_h$ de l'inégalité*

$$\| u_h \| \leqslant M \| f_h \|.$$

Ici $\| u_h \|$, $\| f_h \|$ sont certaines normes pour mesurer la « grandeur » de la solution aux différences u_h et celle du second membre f_h; M est une constante indépendante des pas du schéma aux différences.

Si les équations aux différences approchent les équations aux

*) Cette méthode a été élaborée en 1952 par I. Guelfand et O. Lantsievski. Le terme « double parcours » est introduit par le traducteur: les coefficients sont parcourus dans l'ordre croissant, les inconnues, dans l'ordre décroissant. (*N.d.T.*)

dérivées particlles et s'il y a stabilité des équations aux différences, on démontre facilement que la solution exacte et la solution approchée sont voisines.

En effet, soit

$$Lu = f,\ L_h u_h = f_h,\ \| f - f_h \| = \varepsilon_1 (h) \quad (\varepsilon_1 (h) \to 0 \text{ quand } h \to 0).$$

Ici $\varepsilon_1 (h)$ désigne l'évaluation de l'approximation des seconds membres. On peut y rapporter, par exemple, les erreurs engendrées lors de la résolution approchée des équations aux différences. Pour que $\varepsilon_1 (h) \to 0$ lorsque $h \to 0$, il faut, le pas décroissant, augmenter la précision de la solution des équations aux différences, augmenter le nombre de décimales avec lesquelles sont calculées les valeurs u_h (pour réduire les erreurs d'arrondissement).

L'erreur d'approximation $\| L_h u - Lu \|$ sera notée $\varepsilon_2 (h)$ ($\varepsilon_2 (h) \to 0$ quand $h \to 0$). On peut déduire des égalités

$$\| L_h u - Lu \| = \varepsilon_2 (h), \quad \| Lu - f \| = 0, \quad \| f - f_h \| = \varepsilon_1 (h), \quad \| L_h u_h - f_h \| = 0$$

en utilisant le fait que la norme d'une somme est inférieure à la somme des normes, l'évaluation de $\| L_h (u - u_h) \|$:

$$\| L_h (u - u_h) \| = \| L_h u - L_h u_h \| = \| (L_h u - Lu) + (Lu - f) + (f - f_h) + (f_h - L_h u_h) \| \leqslant \| L_h u - Lu \| + \| Lu - f \| + \| f - f_h \| + \| f_h - L_h u_h \| = \varepsilon_2 (h) + \varepsilon_1 (h).$$

A présent, en nous servant de la stabilité :

$$\| u - u_h \| \leqslant M \| L_h (u - u_h) \|,$$

nous sommes conduits à l'inégalité

$$\| u - u_h \| \leqslant M [\varepsilon_1 (h) + \varepsilon_2 (h)] \to 0 \text{ quand } h \to 0.$$

Nous avons démontré que les solutions exacte et approchée sont voisines.

Toutes les démonstrations de convergence faites aux paragraphes précédents ont été menées précisément suivant ce schéma.

Nous ne donnerons pas le schéma formel complet. Observons seulement qu'il faut inclure dans la notion d'opérateurs L, L_h non seulement les opérateurs agissant dans le domaine, mais aussi ceux au moyen desquels sont données les conditions aux limites. Il est souvent commode de prendre différentes normes pour évaluer $u - u_h$ et pour évaluer les seconds membres f_h.

Il est aussi à noter que la division de l'étude de la convergence en l'étude de l'approximation et de la stabilité est conventionnelle, si bien que différents auteurs peuvent s'en servir différemment lors de l'étude d'un même schéma.

Nous allons maintenant examiner un exemple intéressant d'équations approchées aux différences avec une précision du second ordre pour l'équation $\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}=f$, exemple qui montrera le caractère des modifications du schéma d'étude décrit plus haut, auxquelles on a souvent recours.

Nous considérerons l'équation $\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}=f$ dans le rectangle $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant t\leqslant T$, et nous distinguerons la solution par les conditions initiales et aux limites

$$u(x, 0)=\varphi(x),\ u(0, t)=\psi(t).$$

On suppose que cette solution a des dérivées bornées jusqu'au troisième ordre inclus.

Divisons le segment $[0, 1]$ en N parties égales de longueur $h = 1/N$. Chacune d'entre elles sera le pas du réseau aux différences. Le pas temporel sera noté τ. Le réseau aux différences sera formé par les points

$$\begin{cases} t=n\tau, & 0\leqslant n\leqslant T/\tau, \\ x=mh, & 0\leqslant m\leqslant N \end{cases}$$

avec les entiers m, n.

Ecrivons pour les points (x, t) du réseau l'opérateur

$$\frac{u(x, t+\tau)-u(x, t)}{\tau}+\frac{u(x+h, t)-u(x-h, t)}{2h}-$$
$$-\frac{\tau}{2}\left[\frac{u(x+h, t)-2u(x, t)+u(x-h, t)}{h^2}\right]=(L_h u)_{x, t}.$$

Il est clair que les valeurs de cet opérateur peuvent être calculées en tous les points du réseau, sauf aux points appartenant aux frontières de gauche ($x=0$) et de droite ($x=1$), et sauf aux points de la couche aux différences supérieure $\left(t=\left[\frac{T}{\tau}\right]\right)$.

Pour étudier l'approximation, nous nous servirons, comme d'ordinaire, de la formule de Taylor:

$$u(x, t+\tau)=u(x, t)+\tau u_t+\frac{\tau^2}{2}u_{tt}+\frac{\tau^3}{6}u_{ttt}(x, t+\theta_1\tau),$$

$$u(x+h, t)=u(x, t)+hu_x+\frac{h^2}{2}u_{xx}+\frac{h^3}{6}u_{xxx}(x+\theta_2 h, t),$$

$$u(x-h, t)=u(x, t)-hu_x+\frac{h^2}{2}u_{xx}-\frac{h^3}{6}u_{xxx}(x-\theta_3 h, t).$$

Substituant ces développements dans l'opérateur aux différences, nous sommes conduits à l'égalité

$$\frac{u(x, t+\tau)-u(x, t)}{\tau}+\frac{u(x+h, t)-u(x-h, t)}{2h}-$$
$$-\frac{\tau}{2}\cdot\frac{u(x+h, t)-2u(x, t)+u(x-h, t)}{h^2}=$$
$$=u_t+u_x+\frac{\tau}{2}(u_{tt}-u_{xx})+O(\tau^2+h^2+h\tau),$$

qui montre le premier ordre d'approximation par notre expression aux différences de l'opérateur différentiel $\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}$.

Or, on peut aborder la question de l'approximation un peu différemment. A cet effet, observons que

$$u_t+u_x+\frac{\tau}{2}(u_{tt}-u_{xx})=\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\tau}{2}\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}\right),$$

si bien que sur les solutions de l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}=f$$

on peut affirmer que

$$\frac{u(x, t+\tau)-u(x, t)}{\tau}+\frac{u(x+h, t)-u(x-h, t)}{2h}-$$
$$-\frac{\tau}{2}\cdot\frac{u(x+h, t)-2u(x, t)+u(x-h, t)}{h^2}=$$
$$=f+\frac{\tau}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial t}-\frac{\partial f}{\partial x}\right)+O(\tau^2+h^2+h\tau).$$

Pour obtenir le second ordre d'approximation, il faut prendre pour second membre de l'équation aux différences au point (x, t) non pas $f(x, t)$, mais $f(x, t)+\frac{\tau}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial t}-\frac{\partial f}{\partial x}\right)$. L'équation aux différences ainsi construite approchera non pas l'équation initiale $u_t+u_x=f$, mais l'équation qui en résulte

$$u_t+u_x+\frac{\tau}{2}(u_{tt}-u_{xx})=f+\frac{\tau}{2}(f_t-f_x).$$

Si l'on envisage la solution de l'équation avec pour second membre $f(x, t)=0$, alors $f+\frac{\tau}{2}(f_t-f_x)=0$, et sur de telles solutions l'équation aux différences

$$\frac{u(x, t+\tau)-u(x, t)}{\tau}+\frac{u(x+h, t)-u(x-h, t)}{2h}-$$
$$-\frac{\tau}{2}\cdot\frac{u(x+h, t)-2u(x, t)+u(x-h, t)}{h^2}=0$$

approche l'équation $u_t + u_x = 0$ au second ordre. Par la suite, nous n'envisagerons exclusivement que ce cas particulier $f \equiv 0$.

Résolvons notre équation aux différences par rapport à $u(x, t+\tau)$:

$$u(x, t+\tau) = u(x, t) - \tau \frac{u(x+h, t) - u(x-h, t)}{2h} + \\ + \frac{\tau^2}{2} \cdot \frac{u(x+h, t) - 2u(x, t) + u(x-h, t)}{h^2}.$$

Si à un certain instant fixe t on connaît les valeurs $u(x, t)$ en tous les points x du réseau, on peut, à l'aide de cette formule, déterminer la solution aux différences à l'instant $t+\tau$ en tous les points x, outre le point le plus à droite ($x = 1$) et le plus à gauche ($x = 0$). On ne saurait se servir de cette formule en ces points, où ne sont pas déterminés $u(x+h, t)$ ou $u(x-h, t)$. Toutefois, à la frontière de gauche ($x = 0$) les valeurs $u(0, t+\tau)$ sont données à titre de condition aux limites. Il nous reste seulement à indiquer la règle pour le calcul de $u(1, t+\tau)$ pour les points $x = 1$ de la frontière de droite. Nous proposons d'utiliser sur cette frontière l'équation aux différences

$$\frac{u(1, t+\tau) - u(1, t)}{\tau} + \frac{u(1, t) - u(1-h, t)}{h} = 0.$$

A l'aide de la formule de Taylor, on peut s'assurer sans peine que, pour une fonction régulière $u(x, t)$ telle que $u_t + u_x = 0$ (et donc $u_{tt} = u_{xx}$), on a la relation

$$\frac{u(1, t+\tau) - u(1, t)}{\tau} + \frac{u(1, t) - u(1-h, t)}{h} = \\ = u_t + u_x + \frac{\tau}{2} u_{tt} - \frac{h}{2} u_{xx} + \frac{\tau^2}{6} u_{ttt}(1, t+\theta_1\tau) + \\ + \frac{h^2}{6} u_{xxx}(1-\theta_2 h, t) = \frac{\tau - h}{2} u_{tt}(1, t) + O(\tau^2 + h^2).$$

On voit que quand $h \to 0$, $\tau/h = r$ étant fixé avec $r \neq 1$ ($\tau \neq h$), cette relation aux différences aux limites est vérifiée sur les solutions seulement au premier ordre d'erreur $O(h)$. A première vue il peut sembler que cela doive aussi conduire à une erreur dans la solution de l'ordre de $O(h)$. Nous allons montrer qu'il n'en est rien. L'erreur de la solution aux différences sera de l'ordre de $O(h^2)$.

Nous commencerons l'étude par plusieurs constructions auxiliaires. Désignons par $S(t)$ le reste de la condition aux limites aux différences

$$S(t) = \frac{\tau - h}{2} u_{tt}(1, t) + \frac{\tau^2}{6} u_{ttt}(1, t+\theta_1\tau) + \frac{h^2}{6} u_{xxx}(1-\theta_2 h, t)$$

et observons que pour les fonctions $u(x, t)$ ayant des dérivées troisièmes bornées,

$$S(t+\tau) - S(t) = O(\tau^2) = O(h^2) \quad (\tau = rh),\ S(t) = O(h).$$

Construisons maintenant la fonction de réseau

$$V_h(x, t) = S(t) \cdot h \frac{1+r}{2} \left[\left(\frac{r-1}{r+1} \right)^{\frac{1}{h}} - \left(\frac{r-1}{r+1} \right)^{\frac{1-x}{h}} \right] = S(t) \cdot R(x).$$

Il est facile de vérifier les propriétés suivantes de $V_h(x, t)$ pour tous les points du réseau $0 \leqslant x \leqslant 1$:

1. $V_h(0, t) = 0$,
2. $V_h(x, t) = S(t) \cdot O(h) = O(h^2)$,
3. $\frac{V_h(x, t+\tau) - V_h(x, t)}{\tau} = \frac{S(t+\tau) - S(t)}{\tau} \cdot O(h) = O(h^2)$.

Avant de vérifier les propriétés 4 et 5 de $V_h(x, t)$, il est commode de s'assurer d'abord que le facteur figurant dans V_h

$$R(x) = h \frac{1+r}{2} \left[\left(\frac{r-1}{r+1} \right)^{\frac{1}{h}} - \left(\frac{r-1}{r+1} \right)^{\frac{1-x}{h}} \right] = O(h)$$

vérifie les équations aux différences

$$\frac{R(1) - R(1-h)}{h} = -1,$$

$$\frac{R(x+h) - R(x-h)}{2h} - \frac{\tau}{2} \frac{R(x+h) - 2R(x) + R(x-h)}{h^2} = 0.$$

On établit directement en substituant que ces égalités pour $R(x)$ sont vérifiées. A présent, il est facile de s'assurer que

$$\frac{V_h(1, t+\tau) - V_h(1, t)}{\tau} + \frac{V_h(1, h) - V_h(1-h, t)}{h} =$$

$$= \frac{S(t+\tau) - S(t)}{\tau} R(1) + S(t) \cdot \frac{R(1) - R(1-h)}{h} =$$

$$= O(h) \cdot O(h) + S(t) \cdot (-1) = -S(t) + O(h^2),$$

$$\frac{V_h(x, t+\tau) - V_h(x, t)}{\tau} + \frac{V_h(x+h, t) - V_h(x-h, t)}{2h} -$$

$$- \frac{\tau}{2} \left[\frac{V_h(x+h, t) - 2V_h(x, t) + V_h(x-h, t)}{h^2} \right] =$$

$$= \frac{S(t+\tau) - S(t)}{\tau} R(x) + S(t) \left[\frac{R(x+h) - R(x-h)}{2h} - \right.$$

$$\left. - \frac{\tau}{2} \frac{R(x+h) - 2R(x) + R(x-h)}{h^2} \right] =$$

$$= \frac{S(t+\tau) - S(t)}{\tau} R(x) = O(h) \cdot O(h) = O(h^2).$$

Les deux dernières égalités constituent précisément le contenu des propriétés 4, 5 de $V_h(x, t)$:

$$4.\ \frac{V_h(1, t+\tau)-V_h(1, t)}{\tau}+\frac{V_h(1, t)-V_h(1-h, t)}{h}=-S(t)+O(h^2),$$

$$5.\ \frac{V_h(x, t+\tau)-V_h(x, t)}{\tau}+\frac{V_h(x+h, t)-V_h(x-h, t)}{2h}-$$

$$-\frac{\tau}{2}\cdot\frac{V_h(x+h, t)-2V_h(x, t)+V_h(x-h, t)}{h^2}=O(h^2).$$

Nous avons représenté sur la fig. 86 le graphique de la fonction du réseau $V_h(x, t)$ pour un certain t fixe dans le voisinage du point

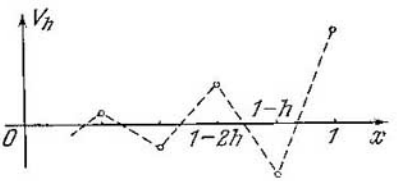

Fig. 86

$x = 1$. (Nous n'aurons à envisager par la suite que le cas $r < 1$, si bien que, construisant le graphique, nous nous sommes servis du fait que $r < 1$.) Dans la formule pour $V_h(x, t)$:

$$V_h(x, t)=S(t)\,h\cdot\frac{1+r}{2}\left[\left(\frac{r-1}{r+1}\right)^{\frac{1}{h}}-\left(\frac{r-1}{r+1}\right)^{\frac{1-x}{h}}\right]$$

le facteur $S(t)\ h\cdot\frac{1+r}{2}$ ne dépend pas de x et détermine l'« amplitude » du graphique. Il a pour ordre h^2.

Le premier terme entre crochets $\left(\frac{r-1}{r+1}\right)^{1/h}$ décroît, quand $h \to 0$, plus vite qu'une puissance quelconque de h, si bien qu'il n'est pas reflété sur le graphique pour les h suffisamment petits. Le second terme $-\left(\frac{r-1}{r+1}\right)^{\frac{1-x}{h}}$ est une progression géométrique de raison négative plus petite que 1 en module, amortie vers la gauche. Les points de cette progression ont été représentés pour $x = 1$, $x = 1 - h$, $x = 1 - 2h$, . . . sur la fig. 86.

Envisageons à présent la fonction de réseau

$$W_h(x, t) = u(x, t) + V_h(x, t) - u_h(x, t).$$

Ici $u(x, t)$ est une solution régulière de l'équation $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$, $u_h(x, t)$ est la solution des équations aux différences :

$$\frac{u_h(1, t+\tau) - u_h(1, t)}{\tau} + \frac{u_h(1, t) - u_h(1-h, t)}{h} = 0,$$

$$\frac{u_h(x, t+\tau) - u_h(x, t)}{\tau} + \frac{u_h(x+h, t) - u_h(x-h, t)}{2h} - \\ - \frac{\tau}{2}\left[\frac{u_h(x+h, t) - 2u_h(x, t) + u_h(x-h, t)}{h^2}\right] = 0,$$

qui vérifie les mêmes conditions initiales et prend les mêmes valeurs aux limites pour $x = 0$ que $u(x, t)$. Il est facile de voir que

a) $W_h(0, t) = 0$,

b) $W_h(x, 0) = O(h^2)$,

c) $$\frac{W_h(x, t+\tau) - W_h(x, t)}{\tau} + \frac{W_h(x+h, t) - W_h(x-h, t)}{2h} - \\ - \frac{\tau}{2}\frac{W_h(x+h, t) - 2W_h(x, t) + W_h(x-h, t)}{h^2} = O(h^2),$$

d) $$\frac{W_h(1, t+\tau) - W_h(1, t)}{\tau} + \frac{W_h(1, t) - W_h(1-h, t)}{h} = O(h^2).$$

Pour assimiler l'idée de la construction envisagée ici, le lecteur doit vérifier crayon en main que les égalités a), b), c) sont effectivement vraies.

On peut espérer déduire à partir de ces égalités l'évaluation

$$W_h(x, t) = O(h^2)$$

pour la fonction W_h. D'ici et du fait que $V_h = O(h^2)$, on déduit que

$$u(x, t) - u_h(x, t) = W_h(x, t) - V_h(x, t) = O(h^2).$$

Ainsi donc, l'étude tout entière faite par nous peut être considérée comme la vérification de l'approximation, et la déduction de l'évaluation $W_h(x, t) = O(h^2)$ à partir des équations aux différencee pour W_h, comme la démonstration de la stabilité du schéma. (Cette démonstration sera faite plus bas pour $r \leqslant 1$. Pour $r > 1$, le schéma est instable, comme cela résulte de considérations sur les domaines d'influence examinées au § 35.)

La vérification de l'approximation à laquelle nous avons procédé est très instructive. Primo, elle montre qu'il est parfois plus commode de considérer que le schéma aux différences approche non pas l'équation initiale $Lu = f$, mais quelque autre équation qui en est une conséquence. Ainsi, dans notre exemple, on a eu intérêt à envisager l'approximation non pas de l'équation $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = f$, mais de celle qui en résulte

$$u_t + u_x + \tau(u_{tt} - u_{xx}) = f + \tau(f_t - f_x).$$

Secundo, l'étude faite de l'approximation des conditions aux limites montre qu'il faut traiter avec réserve les déductions obtenues par application formelle du développement de Taylor. Dans notre exemple, par une telle voie formelle nous n'avons pu que nous assurer de l'approximation de l'ordre $O(h)$, alors que la précision effective de la solution approchée est $O(h^2)$.

En fait, on peut aussi dans notre exemple introduire la notion d'approximation de façon qu'elle donne l'ordre $O(h^2)$. Nous ne ferons pas l'étude correspondante, puisqu'en fait elle constitue un certain autre exposé de l'étude faite ici. Cet exposé n'est pas plus simple du tout et il est moins intuitif. Ceux qui le désirent pourront en prendre connaissance dans le livre (écrit par l'auteur en commun avec V. Riabenki) « Introduction à la théorie des schémas aux différences ». Nous en venons à l'étude de la stabilité. Nous allons montrer que la solution des équations aux différences

$$w(0,\ t) = 0,\ w(x,\ 0) = \varphi(x),$$

$$\frac{w(x,\ t+\tau)-w(x,\ t)}{\tau} + \frac{w(x+h,\ t)-w(x-h,\ t)}{2h} - \\ - \frac{\tau}{2}\cdot\frac{w(x+h,\ t)-2w(x,\ t)+w(x-h,\ t)}{h^2} = F(x,\ t),$$

$$\frac{w(1,\ t+\tau)-w(1,\ t)}{\tau} + \frac{w(1,\ t)-w(1-h,\ t)}{h} = \psi(t)$$

vérifie l'évaluation :

$$\max_t \| w(t) \| \leqslant \text{const} \left[\| w(0) \| + \max_t \| F(t) \| + \max_t | \psi(t) | \right].$$

Nous avons adopté ici les notations condensées :

$$| w(t) \| = \sqrt{h \sum_{x \leqslant 1-h} w^2(x,\ t) + \frac{h}{2} w^2(1,\ t)},$$

$$\| F(t) \| = \sqrt{h \sum_{h \leqslant x \leqslant 1-h} F^2(x,\ t)}.$$

Comme le montrent ces notations, nous allons démontrer la stabilité en norme aux différences euclidienne, qui est l'analogue de la norme de l'espace L_2 d'Hilbert. La démonstration pèche un peu par sa lourdeur, et si je la donne, c'est uniquement pour que la déduction soit complète.

D'évidence, il suffit de démontrer que

$$\| w(t+\tau) \| \leqslant \| w(t) \| + \tau \cdot M \left(\| F(t) \| + | \psi(t) | \right).$$

En effet, il résulte de cette inégalité que

$$\max \left(\| w(t+\tau) \|,\ \max_t \| F(t) \|,\ \max_t | \psi(t) | \right) \leqslant \\ \leqslant (1+2\tau M) \max \left(\| w(t) \|,\ \max_t \| F(t) \|,\ \max_t | \psi(t) | \right),$$

d'où

$$\| w(t) \| \leqslant (1 - 2\tau M)^{-\frac{t}{\tau}} \max \left(\| w(0) \|, \max_t \| F(t) \|, \max_t | \psi(t) | \right)$$

et donc

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant T} \| w(t) \| \leqslant \text{const} \left| \| w(0) \| + \max_t \| F(t) \| + \max_t | \psi(t) | \right|.$$

Si $w(x, 0) = O(h^2)$, $F(x, t) = O(h^2)$, $\psi(t) = O(h^2)$, alors $w(x, t)$ sera aussi de l'ordre de h^2 au sens de la norme

$$\max_t \sqrt{h \sum_{h \leqslant x \leqslant 1-h} w^2(x, t) + \frac{h}{2} w^2(0, t)}.$$

Passons à la démonstration de l'inégalité

$$\| w(t + \tau) \| \leqslant \| w(t) \| + \tau M \left(\| F(t) \| + | \psi(t) | \right).$$

Résolvons les équations aux différences par rapport à $w(x, t + \tau)$:

$$w(0, t + \tau) = 0,$$

$$w(x, t + \tau) = w(x, t) - \frac{\tau}{2h} [w(x + h, t) - w(x - h, t)] +$$

$$+ \frac{\tau^2}{2h^2} [w(x + h, t) - 2w(x, t) + w(x - h, t)] + \tau F(x, t)$$

$$(x = h, 2h, \ldots, 1 - h),$$

$$w(1, t + \tau) = w(1, t) - \frac{\tau}{h} [w(1, t) - w(1 - h, t)] + \tau \psi(t).$$

La fonction de réseau $w(x, t + \tau)$ peut être représentée sur la couche temporelle $t + \tau$ par la somme

$$w(x, t + \tau) = z(x, t + \tau) + \tau \widetilde{F}(x, t),$$

où

$$z(0, t + \tau) = 0,$$

$$z(x, t + \tau) = w(x, t) - \frac{\tau}{2h} [w(x + h, t) - w(x - h, t)] +$$

$$+ \frac{\tau^2}{2h^2} [w(x + h, t) - 2w(x, t) + w(x - h, t)] \quad (x = h, 2h, \ldots, 1 - h),$$

$$z(1, t + \tau) = w(1, t) - \frac{\tau}{h} [w(1, t) - w(1 - h, t)],$$

$$\widetilde{F}(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x = 0 \\ F(x, t) & \text{pour } h \leqslant x \leqslant 1 - h \\ \psi(t) & \text{pour } x = 1. \end{cases}$$

Il est évident que

$$\| \widetilde{F}(t) \| = \sqrt{\frac{h}{2} \psi^2(t) + h \sum_x F^2(x, t)} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{h \psi^2(t)} + \sqrt{h \cdot 2 \sum_x F^2(x, t)} = \sqrt{h} | \psi(t) | + \sqrt{2} \| F(t) \|.$$

Пусть h достаточно малы,

$$\| \hat{F}(t) \| \leqslant M (| \psi(t) | + \| F(t) \|) \quad (M = \sqrt{2}),$$

откуда

$$\| w(t+\tau) \| = \| z(t+\tau) + \tau \hat{F}(t) \| \leqslant \| z(t+\tau) \| + \tau \| \hat{F}(t) \| \leqslant$$
$$\leqslant \| z(t+\tau) \| + \tau M (| \psi(t) | + \| F(t) \|).$$

Остается доказать, что

$$\| z(t+\tau) \| \leqslant \| w(t) \|.$$

Введем упрощенные обозначения

$$z(x, t+\tau) = z_n, \quad n = x/h,$$
$$w(x, t) = w_n,$$
$$r = \tau/h.$$

В этих обозначениях

$$z_0 = 0, \quad w_0 = 0,$$

$$z_n = w_n - \frac{r}{2}(w_{n+1} - w_{n-1}) + \frac{r^2}{2}(w_{n+1} - 2w_n + w_{n-1}), \quad 1 \leqslant n \leqslant N-1, \quad N = 1/h,$$

$$z_N = (1-r) w_N + r w_{N-1},$$

$$\| z \| = \sqrt{h \sum_{n=1}^{N-1} z_n^2 + \frac{h}{2} z_N^2}, \qquad \| w \| = \sqrt{h \sum_{n=1}^{N-1} w_n^2 + \frac{h}{2} w_N^2}.$$

Итак, вопрос целиком сводится к доказательству неравенства ($r \leqslant 1$)

$$\sum_{n=1}^{N-1} z_n^2 + \frac{1}{2} z_N^2 \leqslant \sum_{n=1}^{N-1} w_n^2 + \frac{1}{2} w_N^2.$$

Для $1 \leqslant n \leqslant N-1$ $(0 < r \leqslant 1)$

$$z_n = \left(\frac{r}{2} + \frac{r^2}{2}\right) w_{n-1} + (1-r^2) w_n + \left(-\frac{r}{2} + \frac{r^2}{2}\right) w_{n+1},$$

$$z_n^2 = \left[\left(\frac{r}{2} + \frac{r^2}{2}\right) w_{n-1} + (1-r^2) w_n + \left(-\frac{r}{2} + \frac{r^2}{2}\right) w_{n+1} \right]^2 \leqslant$$
$$\leqslant \left[\left(\frac{r}{2} + \frac{r^2}{2}\right) w_{n-1} + (1-r^2) w_n + \left(-\frac{r}{2} + \frac{r^2}{2}\right) w_{n+1} \right]^2 +$$
$$+ \frac{r^2 (1-r^2)}{4} [w_{n-1} - 2w_n + w_{n+1}]^2 = \frac{r^2 (1+r)}{2} w_{n-1}^2 + (1-r^2) w_n^2 +$$
$$+ \frac{r^2 (1-r)}{2} w_{n+1}^2 - r (1-r^2) (w_n w_{n+1} - w_{n-1} w_n).$$

Просуммируем неравенства для z_n^2, учитывая, что $w_0 = 0$:

$$\sum_{n=1}^{N-1} z_n^2 \leqslant -\frac{r^2 (1-r)}{2} w_1^2 - \frac{r^2 (1+r)}{2} w_{N-1}^2 +$$
$$+ \left[\frac{r^2 (1-r)}{2} + (1-r^2) + \frac{r^2 (1+r)}{2} \right] \sum_{n=1}^{N-1} w_n^2 - r (1-r^2) (w_{N-1} w_N - 0 \cdot w_1) =$$

$$= -\frac{r^2(1-r)}{2} w_1^2 - \frac{r^2(1+r)}{2} w_{N-1}^2 - r(1-r^2) w_{N-1} w_N + \\ + \sum_{n=1}^{N-1} w_n^2 \leqslant -\frac{r^2(1+r)}{2} w_{N-1}^2 - r(1-r^2) w_{N-1} w_N + \sum_{n=1}^{N-1} w_n^2.$$

Puis,

$$\frac{1}{2} z_N^2 + \sum_{n=1}^{N-1} z_n^2 \leqslant \frac{z_N^2 - w_N^2}{2} - \frac{r^2(1+r)}{2} w_{N-1}^2 - \\ - r(1-r^2) w_{N-1} w_N + \frac{1}{2} w_N^2 + \sum_{n=1}^{N-1} w_n^2$$

Il suffit de démontrer que

$$\frac{z_N^2 - w_N^2}{2} - \frac{r^2(1+r)}{2} w_{N-1}^2 - r(1-r^2) w_{N-1} w_N \leqslant 0.$$

On doit alors utiliser l'égalité

$$z_N = (1-r) w_N + r w_{N-1}.$$

Transformons le premier membre de l'inégalité à démontrer :

$$\frac{z_N^2 - w_N^2}{2} - \frac{r^2(1+r)}{2} w_{N-1}^2 - r(1-r^2) w_{N-1} w_N = \\ = \frac{[(1-r) w_N + r w_{N-1}]^2 - w_N^2}{2} - \frac{r^2(1+r)}{2} w_{N-1}^2 - r(1-r^2) w_{N-1} w_N = \\ = -\frac{1-(1-r)^2}{2} w_N^2 - r^2(1-r) w_N w_{N-1} - \frac{r^3}{2} w_{N-1}^2 = \\ = -\frac{1-(1+r)(1-r)^2}{2} w_N^2 - \frac{r}{2} [(1-r) w_N + r w_{N-1}]^2 \leqslant 0.$$

Ceci termine la démonstration de la stabilité du schéma pour $r \leqslant 1$.

§ 38. Méthode du double parcours

Systèmes d'équations bien conditionnés résultant de schémas aux différences. Résolubilité et bon conditionnement de systèmes à coefficients voisins. Déduction des évaluations pour les coefficients de parcours pour les systèmes bien conditionnés. Ces évaluations sont vérifiées pour le système initial, ainsi que pour tous les systèmes voisins. Le dénominateur dans les formules de parcours est non nul. Schéma du processus de calcul réel. Sa réduction à la solution exacte d'un système voisin. L'erreur du résultat dépend du maximum des erreurs sur chacun des pas des calculs, mais elle ne dépend pas du nombre de pas.

Nous avons décrit la méthode du parcours pour résoudre les équations aux différences

$$a_n u_{n-1} + b_n u_n + c_n u_{n+1} = g_n \ (n = 1, 2, \ldots, N-1),$$
$$u_0 = \varphi, \qquad u_N = \psi.$$

Nous allons nous occuper maintenant de l'étude de la sensibilité de cette méthode aux erreurs de calcul.

Nous supposerons que le système d'équations aux différences est « bien conditionné ». On entend par là la réalisation pour les solutions du système des inégalités suivantes

$$|u_n| \leqslant M_{\max} [|\varphi|, |\psi|, |g_k|]. \tag{1}$$

D'ordinaire, quand on étudie des schémas aux différences, on doit envisager non pas un seul système d'équations aux différences, mais tout une famille de tels systèmes, obtenus pour différents pas du réseau. Lorsque les pas décroissent, le nombre N d'équations tend vers l'infini. Il est supposé dans les inégalités (1) que la constante M est la même pour tous les systèmes appartenant à la famille envisagée, autrement dit qu'elle ne croît pas lorsque N croît. On a vu que, pour les équations aux différences implicites obtenues en approchant des équations aux dérivées partielles hyperbolique et parabolique, cette circonstance était effectivement réalisée.

En même temps que le système fondamental

$$a_n u_{n-1} + b_n u_n + c_n u_{n+1} = g_n \qquad (n = 1, 2, \ldots, N-1),$$
$$u_0 = \varphi, \; u_N = \psi$$

nous envisagerons aussi tous les systèmes « tronqués »

$$a_n u_{n-1} + b_n u_n + c_n u_{n+1} = g_n \; (n = p+1, \; p+2, \; \ldots, \; q-1),$$
$$u_p = \widetilde{\varphi}_p, \; u_q = \widetilde{\psi}_q \qquad (q \geqslant p+2)$$

et nous supposerons que leurs solutions vérifient l'évaluation analogue avec la même constante M :

$$|u_n| \leqslant M_{\max} [|\widetilde{\varphi}_p|, \; |\widetilde{\psi}_q|, \; |g_k|].$$

Il n'est pas difficile de vérifier que dans les systèmes considérés cette hypothèse est remplie. Sans aucun doute, sont aussi vérifiées dans nos exemples les inégalités pour les coefficients :

$$|a_n| < M, \; |b_n| < M, \; |c_n| < M,$$

qui seront aussi utilisées dans notre étude.

En règle générale, par bon conditionnement on entend une chose un peu différente. A savoir, d'ordinaire un système est dit bien conditionné si sa solution varie peu lorsque les coefficients et les seconds membres varient peu. Nous montrerons que cette condition découle des exigences formulées ci-dessus.

Considérons le système

$$\widetilde{u}_0 = \varphi,$$
$$\widetilde{a}_n \widetilde{u}_{n-1} + \widetilde{b}_n \widetilde{u}_n + \widetilde{c}_n \widetilde{u}_{n+1} = g_n \qquad (n = 1, 2, \ldots, N-1),$$
$$\widetilde{u}_N = \psi$$

et tous les systèmes possibles qui s'en déduisent par « troncatures » :

$$\tilde{u}_p = \varphi,$$

$$\tilde{a}_n \tilde{u}_{n-1} + \tilde{b}_n \tilde{u}_n + \tilde{c}_n \tilde{u}_{n+1} = g_n \qquad (n = p+1,\ p+2,\ \ldots,\ q-1),$$

$$\tilde{u}_q = \psi, \qquad q \geqslant p+2.$$

Si l'on suppose que la perturbation des coefficients n'est pas trop forte, à savoir si

$$|\tilde{a}_n - a_n| < \varepsilon < \frac{1}{6M},$$

$$|\tilde{b}_n - b_n| < \varepsilon < \frac{1}{6M},$$

$$|\tilde{c}_n - c_n| < \varepsilon < \frac{1}{6M},$$

alors le système perturbé, ainsi que ses « troncatures » sont :

1° Résolubles quels que soient les seconds membres.

2° Bien conditionnés au sens de l'inégalité (1) (seulement, il faudra remplacer la constante M par $2M$).

3° A coefficients bornés :

$$|\tilde{a}_n| < M + \frac{1}{6M},$$

$$|\tilde{b}_n| < M + \frac{1}{6M},$$

$$|\tilde{c}_n| < M + \frac{1}{6M}.$$

4° Les solutions u_n et $\tilde{u}_n$ diffèrent peu l'une de l'autre :

$$|u_n - \tilde{u}_n| \leqslant \varepsilon \cdot 6M^2 \max(|\varphi|, |\psi|, |g_k|).$$

La propriété 3° est évidente. Démontrons la propriété 2°, et déduisons-en 1°. Supposons que le système

$$\tilde{u}_p = \varphi,$$

$$\tilde{a}_n \tilde{u}_{n-1} + \tilde{b}_n \tilde{u}_n + \tilde{c}_n \tilde{u}_{n+1} = g_n,$$

$$\tilde{u}_q = \psi$$

soit résoluble pour certains seconds membres. Fixant ceux-ci, posons

$$\mu = \max_{p \leqslant n \leqslant q} |\tilde{u}_n|$$

et déduisons pour μ l'inégalité :

$$\mu \leqslant 2M \max(|\varphi|, |\psi|, |g_k|).$$

Elle s'établit comme suit. Le système peut être recopié sous la forme :

$$\tilde{u}_p = \varphi,$$

$$\tilde{a}_n \tilde{u}_{n-1} + b_n \tilde{u}_n + c_n \tilde{u}_{n+1} =$$
$$= g_n + (a_n - \tilde{a}_n)\tilde{u}_{n-1} + (b_n - \tilde{b}_n)\tilde{u}_n + (c_n - \tilde{c}_n)\tilde{u}_{n+1},$$

$$\tilde{u}_q = \psi.$$

De cette écriture et du bon conditionnement du système initial résulte l'inégalité

$$\mu \leqslant M \max\left(|\varphi|, |\psi|, |g_k| + 3 \cdot \frac{1}{6M}\mu\right) \leqslant \frac{1}{2}\mu + M \max(|\varphi|, |\psi|, |g_k|)$$

de sorte que

$$\mu \leqslant 2M \max(|\varphi|, |\psi|, |g_k|),$$

$$\max|\tilde{u}_n| \leqslant 2M \max(|\varphi|, |\psi|, |g_k|).$$

Il résulte de cette inégalité que le système homogène avec φ, g_k, ψ nuls ne peut avoir que la solution nulle. Il est donc évident que le déterminant de ce système est non nul, si bien que le système est résoluble quels que soient les seconds membres. Les propriétés 1° et 2° sont démontrées. Reste à démontrer l'inégalité 4°. Recopiant le système sous la forme

$$\tilde{u}_p - u_p = \varphi - \varphi = 0,$$

$$a_n(\tilde{u}_{n-1} - u_{n-1}) + b_n(\tilde{u}_n - u_n) + c_n(\tilde{u}_{n+1} - u_{n+1}) =$$
$$= [(a_n - \tilde{a}_n)\tilde{u}_{n-1} + (b_n - \tilde{b}_n)\tilde{u}_n + (c_n - \tilde{c}_n)\tilde{u}_{n+1}] +$$
$$+ [\tilde{a}_n\tilde{u}_{n-1} + \tilde{b}_n\tilde{u}_n + \tilde{c}_n\tilde{u}_{n+1}] - [a_n u_{n-1} + b_n u_n + c_n u_{n+1}] =$$
$$= [(a_n - \tilde{a}_n)\tilde{u}_{n-1} + (b_n - \tilde{b}_n)\tilde{u}_n + (c_n - \tilde{c}_n)\tilde{u}_{n+1}] + g_n - g_n =$$
$$= (a_n - \tilde{a}_n)\tilde{u}_{n-1} + (b_n - \tilde{b}_n)\tilde{u}_n + (c_n - \tilde{c}_n)\tilde{u}_{n+1},$$

$$\tilde{u}_q - u_q = \psi - \psi = 0$$

et appliquant la propriété 2°, il vient

$$|u_n - \tilde{u}_n| \leqslant M \cdot 3\varepsilon \cdot 2M \cdot \max(|\varphi|, |\psi|, g_k|).$$

L'inégalité 4° est démontrée.

Envisageons à présent le système

$$\tilde{u}_p = \tilde{\varphi},$$

$$\tilde{a}_n\tilde{u}_{n-1} + \tilde{b}_n\tilde{u}_n + \tilde{c}_n\tilde{u}_{n+1} = \tilde{g}_n,$$

$$\tilde{u}_q = \tilde{\psi},$$

différant du système initial

$$u_p = \varphi,$$
$$a_n u_{n-1} + b_n u_n + c_n u_{n+1} = g_n,$$
$$u_q = \psi$$

non seulement par la perturbation des coefficients, mais aussi des seconds membres. Supposant que

$$|\tilde{a}_n - a_n| < \varepsilon, \quad |\tilde{\varphi} - \varphi| < \varepsilon,$$
$$|\tilde{b}_n - b_n| < \varepsilon, \quad |\tilde{g}_n - g_n| < \varepsilon,$$
$$|\tilde{c}_n - c_n| < \varepsilon, \quad |\tilde{\psi} - \psi| < \varepsilon, \quad \varepsilon < \frac{1}{6M},$$

il n'est pas difficile de montrer que

$$|\tilde{u}_n - u_n| \leqslant \varepsilon \cdot 6M^2 \max(|\varphi|, |\psi|, |g_n|) + \varepsilon \cdot 2M.$$

Indiquons seulement le schéma de la démonstration. Celle-ci se fait sans peine suivant ce schéma.

Modifiant d'abord seulement les coefficients et laissant les seconds membres inchangés, nous allons montrer moyennant la propriété 4° déjà démontrée que chacune des u_n varie au plus de $\varepsilon \cdot 6M^2 \times$ $\times \max(|\varphi|, |\psi|, |g_n|)$, puis, changeant dans le système aux coefficients perturbés seulement les seconds membres, nous nous assurerons, moyennant 2°, que les composantes u_n de la solution varient alors au plus de $\varepsilon \cdot 2M$. Nous avons démontré que si l'on change les coefficients et les seconds membres du système

$$u_0 = \varphi,$$
$$a_n u_{n-1} + b_n u_n + c_n u_{n+1} = g_n,$$
$$u_N = \psi$$

d'une quantité de l'ordre de ε, les solutions elles aussi varient d'une quantité de l'ordre de ε. En même temps que pour le système, la démonstration de la même propriété a été faite pour toutes ses « troncatures ». Le fait que nous avons démontré est pris d'ordinaire pour définition du « bon conditionnement ».

Il importe de noter que le nombre N d'équations envisagées ne figure pas dans les constantes évaluant le conditionnement.

Nous sommes maintenant en mesure d'étudier la méthode du double parcours auparavant décrite (§ 36). Soit à résoudre le système

$$u_0 = \varphi,$$
$$a_n u_{n-1} + b_n u_n + c_n u_{n+1} = g_n,$$
$$u_N = \psi.$$

Parallèlement à ce système, il nous sera commode d'envisager aussi le système perturbé

$$u_0 = \varphi,$$
$$\tilde{a}_n u_{n-1} + \tilde{b}_n u_n + \tilde{c}_n u_{n+1} = g_n,$$
$$u_N = \psi,$$
$$|a_n - \tilde{a}_n| < \varepsilon < \frac{1}{6M}, \quad |b_n - \tilde{b}_n| < \varepsilon, \quad |c_n - \tilde{c}_n| < \varepsilon$$

et de déduire des évaluations des coefficients de parcours qui conviendraient aussi bien pour le système initial que pour le système perturbé. Ce faisant, nous aurons en vue que pour les solutions de l'un et de l'autre système (avec toutes les troncatures) est observée l'évaluation

$$|u_n| < 2M \cdot \max\{|\varphi|, |\psi|, |g_h|\}.$$

Considérons le système tronqué suivant

$$u_0 = \varphi,$$
$$\tilde{a}_n u_{n-1} + \tilde{b}_n u_n + \tilde{c}_n u_{n+1} = g_n, \quad n = 1, 2, \ldots, l-1,$$
$$u_l = \psi.$$

Il est résoluble. Déduisons-en u_{l-1}. Il résulte de la formule de Cramer que u_{l-1} peut se mettre sous la forme :

$$u_{l-1} = L\psi + \sum_{i=1}^{l-1} \Lambda_i g_i + \Lambda_0 \varphi = L u_l + K.$$

En vertu du bon conditionnement, le coefficient L et la quantité K vérifient les inégalités

$$|L| < 2M,$$
$$K| < 2M \cdot \max(|g_h|, |\varphi|).$$

Il est commode d'affecter les quantités L et K de l'indice $l - 1/2$, et d'écrire la relation et les inégalités obtenues comme suit :

$$u_{l-1} = L_{l-1/2} u_l + K_{l-1/2},$$
$$|L_{l-1/2}| < 2M,$$
$$|K_{l-1/2}| < 2M \cdot \max(|g_h|, |\varphi|).$$

La même relation a été déduite lors de la description de la méthode du double parcours. Notons qu'il résulte de la formule de Cramer utilisée que d'après g_n, $\tilde{a}_n$, $\tilde{b}_n$, $\tilde{c}_n$, φ ($1 \leqslant n \leqslant l-1$) les coefficients $L_{l-1/2}$, $K_{l-1/2}$ sont univoquement déterminés, et que pour déterminer $L_{l-1/2}$ on n'a pas à connaître les seconds membres φ, g_1, g_2, ..., g_{l-1}. Il suffit d'utiliser les coefficients $\tilde{a}_n$, $\tilde{b}_n$, $\tilde{c}_n$.

Il en résulte que les coefficients $L_{l-1/2}$, $K_{l-1/2}$ coïncident avec les coefficients de parcours déduits, pour lesquels ont été écrites, au § 36, les formules de récurrence :

$$L_{1/2}=0, \quad K_{1/2}=\varphi,$$

$$L_{l+1/2}=-\frac{\overset{\smile}{c}_l}{\overset{\smile}{a}_l L_{l-1/2}+\overset{\smile}{b}_l}, \quad K_{l+1/2}=\frac{g_l-\overset{\smile}{a}_l K_{l-1/2}}{\overset{\smile}{a}_l L_{l-1/2}+\overset{\smile}{b}_l}.$$

Mais une réserve est à faire ici. Le fait est que, déduisant ces formules, nous avons supposé qu'aucun dénominateur n'était nul Nous allons justifier ce fait. On a pour $L_{3/2}$ la formule

$$L_{3/2}=-\frac{\overset{\smile}{c}_1}{\overset{\smile}{a}_1 L_{1/2}+\overset{\smile}{b}_1}=-\frac{\overset{\smile}{c}_1}{\overset{\smile}{a}_1\cdot 0+\overset{\smile}{b}_1}.$$

Montrons que $|\overset{\smile}{b}_1|>1/2M$. A cet effet, considérons le système « tronqué »

$$u_0=0,$$
$$\overset{\smile}{a}_1 u_0+\overset{\smile}{b}_1 u_1+\overset{\smile}{c}_1 u_2=1,$$
$$u_2=0.$$

Ce système étant résoluble, on a $\overset{\smile}{b}_1\neq 0$ et $u_1=1/\overset{\smile}{b}_1$. Par ailleurs, le bon conditionnement entraîne l'inégalité $|u_1|<2M\cdot 1$. L'inégalité formulée est ainsi démontrée. Il en résulte qu'on peut calculer d'après les formules de parcours les quantités $L_{3/2}$, $K_{3/2}$, et donc que celles-ci vérifient les inégalités :

$$|L_{3/2}|<2M,$$
$$|K_{3/2}|<2M\max(|g_k|, |\varphi|).$$

Supposons qu'on ait déjà montré la possibilté de calculer d'après les formules de parcours les quantités

$$L_{1/2}, L_{3/2}, \ldots, L_{l-1/2},$$
$$K_{1/2}, K_{3/2}, \ldots, K_{l-1/2},$$

et montrons qu'on peut alors calculer $L_{l+1/2}$, $K_{l+1/2}$. Pour cela, il suffit de montrer que

$$|\overset{\smile}{a}_l L_{l-1/2}+\overset{\smile}{b}_l|\geqslant\frac{1}{2M}.$$

Considérons le système d'équations

$$u_0=0,$$
$$\overset{\smile}{a}_i u_{i-1}+\overset{\smile}{b}_i u_i+\overset{\smile}{c}_i u_{i+1}=0, \quad i=1, 2, \ldots, l-1,$$
$$\overset{\smile}{a}_l u_{l-1}+\overset{\smile}{b}_l u_l+\overset{\smile}{c}_l u_{l+1}=1,$$
$$u_{l+1}=0.$$

En ce qui concerne la solution d'un tel système, on sait que $u_{l-1} = L_{l-1/2}u_l$, $|u_l| < 2M$. La solution de l'équation inhomogène étant unique, il s'ensuit que

$$(\hat{a}_l L_{l-1/2} + \hat{b}_l)\, u_l = 1.$$

Pour que le système soit résoluble, on doit avoir l'inégalité $\hat{a}_l L_{l-1/2} + \hat{b}_l \neq 0$ et l'égalité $u_l = \dfrac{1}{\hat{a}_l L_{l-1/2} + \hat{b}_l}$. L'affirmation $|\hat{a}_l L_{l-1/2} + \hat{b}_l| > 1/2M$ est à présent évidente.

Lors des calculs effectifs, à chaque pas du processus de calcul on commet des erreurs dues à l'arrondissement. De ce fait, le processus de calcul réel est mené suivant les formules

$$L_{1/2} = 0,$$

$$K_{1/2} = \varphi + \varkappa_{1/2},$$

$$L_{l+1/2} = -\frac{c_l}{a_l L_{l-1/2} + b_l} + \lambda_{l+1/2},$$

$$K_{l+1/2} = \frac{g_l - a_l K_{l-1/2}}{a_l L_{l-1/2} + b_l} + \varkappa_{l+1/2},$$

$$u_N = \psi + \nu_N,$$

$$u_l = L_{l+1/2} u_{l+1} + K_{l+1/2} + \nu_l.$$

Supposons qu'on ait pour toutes les erreurs de calcul les évaluations

$$|\varkappa_{l+1/2}| < \delta, \quad |\overline{\lambda_{l+1/2}}| < \delta, \quad |\nu_l| < \delta$$

δ étant suffisamment petit, et essayons d'évaluer le degré d'altération des résultats de calcul dû à ces erreurs.

Il est évident que le tableau de formules qu'on vient de donner peut être recopié comme suit :

$$L_{1/2} = 0,$$

$$K_{1/2} = \varphi + \varkappa_{1/2},$$

$$L_{l+1/2} = \frac{-[c_l - (a_l L_{l-1/2} + b_l)\lambda_{l+1/2}]}{a_l L_{l-1/2} + b_l},$$

$$\hat{K}_{l+1/2} = \frac{g_l - a_l(\hat{K}_{l-1/2} - \nu_{l-1})}{a_l L_{l-1/2} + b_l} + \varkappa_{l+1/2} + \nu_l =$$

$$= \frac{g_l + a_l \nu_{l-1} + (a_l L_{l-1/2} + b_l)(\varkappa_{l+1/2} + \nu_l) - a_l K_{l-1/2}}{a_l L_{l-1/2} + b_l},$$

$$u_l = L_{l+1/2} + \hat{K}_{l+1/2},$$

et être maintenant considéré comme un schéma du processus de calcul pour résoudre le système

$$u_0 = \tilde{\varphi},$$

$$\tilde{a}_n u_{n-1} + \tilde{b}_n u_n + \tilde{c}_n u_{n+1} = \tilde{g}_n,$$

$$u_N = \tilde{\psi},$$

avec les coefficients perturbés suivants :

$$\tilde{\varphi} = \varphi + \varkappa_{1/2},$$

$$\tilde{a}_l = a_l,$$

$$\tilde{b}_l = b_l,$$

$$\tilde{c}_l = c_l - (a_l L_{l-1/2} + b_l)\,\lambda_{l+1/2} \quad (L_{1/2} = 0),$$

$$\tilde{g}_l = g_l + a_l \nu_{l-1} + (a_l L_{l-1/2} + b_l)\,(\varkappa_{l+1/2} + \nu_l),$$

$$\tilde{\psi} = \psi + \nu_N.$$

Montrons que $|\tilde{c}_l - c_l| \leqslant M(2M+1)\,\delta$. La démonstration sera faite par récurrence en l.

Pour $l = 1$

$$|\tilde{c}_1 - c_1| = |a_1 L_{1/2} + b_1)\,\lambda_{3/2}| = |(a_1 \cdot 0 + b_1)\,\lambda_{3/2}| \leqslant M\delta < M(2M+1)\,\delta.$$

Supposons que pour $k = 1, 2, \ldots, l-1$ l'inégalité

$$|\tilde{c}_k - c_k| \leqslant M(2M+1)\,\delta$$

soit démontrée. Pour calculer les coefficients $L_{1/2}, L_{3/2}, \ldots, L_{l-1/2}$ nous n'utilisons que les coefficients a_i, b_i, c_i, avec $i = 1, 2, \ldots$ $\ldots, l-1$. Si bien que, si $M(2M+1)\,\delta < \frac{1}{6M}$, on peut affirmer que $|L_{l-1/2}| \leqslant 2M$, et que, par conséquent,

$$|\tilde{c}_l - c_l| = |-(a_l L_{l-1/2} + b_l)\,\lambda_{l+1/2}| \leqslant (M \cdot 2M + M)\,\delta = M(2M+1)\,\delta.$$

Ceci achève notre calcul par récurrence.

De la sorte, on a montré que si $\delta < \frac{1}{6M^2(2M+1)}$, on a alors $|\tilde{c}_l - c_l| \leqslant M(2M+1)\,\delta$ pour tous les l, et pour tous les coefficients de parcours sont vérifiées les inégalités

$$|L_{l-1/2}| \leqslant 2M, \quad |a_l L_{l-1/2} + b_l| \geqslant \frac{1}{2M}.$$

On voit que, tout au long de notre processus de calcul, on n'a jamais à diviser par zéro.

A présent de nos formules pour $\tilde{\varphi}$, $\tilde{\psi}$, $\tilde{g}_l$ résultent les inégalités

$$|\tilde{\varphi}-\varphi|<\delta, \quad |\tilde{\psi}-\psi|<\delta,$$

$$|\tilde{g}_l-g_l|<M\delta+M(2M+1)\cdot 2\delta=M(4M+3)\delta.$$

Il apparaît qu'admettant à chaque pas du processus de calcul des erreurs non supérieures à δ, nous avons par là même résolu le système à coefficients et seconds membres perturbés. Ces perturbations n'excèdent pas $M^*\delta$, où M^* dépend seulement de M et ne dépend pas du nombre d'équations du système :

$$M^* = \max\{1, (4M+3)M\}.$$

Comme nous l'avons démontré auparavant, une telle perturbation des coefficients et des seconds membres mène à des erreurs dans u_n non supérieures à $M^{**}\delta$. (Ici encore M^{**} ne dépend que de M.)

Nous avons par là même démontré que, commettant lors des calculs par la méthode du parcours des erreurs de l'ordre de δ à chaque pas du processus (le nombre de tels pas est $\approx N$), on obtient dans la réponse des erreurs n'excédant pas const $\cdot\delta$, la constante étant indépendante de N. Non seulement les erreurs ne croissent pas, même elles ne s'accumulent pas. Cette remarquable propriété du parcours est la raison de l'extension très large qu'il a trouvée.

§ 39. Processus itératifs pour résoudre le problème aux différences de Dirichlet

Schéma formel. Réduction de la question de la convergence au cas où les conditions aux limites sont nulles. Base orthonormale particulière dans l'espace des fonctions de réseau nulles à la frontière. Analogie avec le processus de nivellement des températures et son utilisation pour « inventer » des processus itératifs pour résoudre l'équation aux différences de Laplace. Choix du paramètre τ pour le processus itératif le plus simple. Evaluation du travail nécessaire pour réduire l'erreur un nombre donné de fois. Processus de Douglas et Rackford utilisant la « décomposition » de l'opérateur d'itération en opérateurs à une dimension. Variation cyclique des paramètres. Lemmes relatifs au produit des valeurs propres et évaluation de la vitesse de convergence.

Nous allons traiter dans ce paragraphe des méthodes de résolution du problème de Dirichlet pour l'équation aux différences de Laplace

$$\Delta_{xx}u+\Delta_{yy}u=0, \quad u|_\Gamma=\varphi.$$

Ici les symboles $\Delta_{xx}u$, $\Delta_{yy}u$ désignent pour abréger les analogues aux différences des dérivées secondes :

$$\Delta_{xx}u=\frac{u(x+h_x, y)-2u(x, y)+u(x-h_x, y)}{h_x^2},$$

$$\Delta_{yy}u=\frac{u(x, y+h_y)-2u(x, y)+u(x, y-h_y)}{h_y^2}.$$

Pour la simplicité, nous nous bornerons au cas où le domaine pour lequel on résout le problème est le carré unité $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, le réseau aux différences étant lui-même carré: $h_x = h_y = 1/N$.

Malheureusement, il n'existe pas actuellement de méthode directe commode de résolution d'un tel problème, méthode qui serait bonne lorsque le nombre de points du réseau est suffisamment grand, de l'ordre de N^2. (Un calcul exact montre que notre réseau contient $(N-1)^2$ points intérieurs et $4(N-1)$ points frontières; les 4 points sommets ne participent pas aux équations.) C'est pourquoi je me bornerai à envisager deux méthodes de résolution itératives. L'une d'elles est très simple et est connue depuis longtemps. On ne saurait la considérer comme satisfaisante, étant donné que sa vitesse de convergence ralentit essentiellement quand N croît. L'autre méthode que nous allons étudier a été proposée dans les années 50, après que les calculatrices ont reçu une très large extension. Sa convergence est plus rapide. Il existe actuellement tout une série d'autres méthodes convergeant plus vite encore. Toutefois, elles sont logiquement plus compliquées. En outre, l'idée posée à la base de la seconde méthode a reçu une extension très large. C'est pourquoi je m'arrête sur ces deux méthodes pour illustrer les questions qui se posent lors de l'analyse des méthodes de résolution des équations aux différences bidimensionnelles et raconter les astuces au moyen desquelles cette résolution est actuellement menée.

Les processus itératifs sont menés conformément au schéma suivant:

$$u^{(m)}(x, y) = P_m u^{(m-1)}(x, y).$$

Ici $u^{(0)}, u^{(1)}, \ldots, u^{(m)}, \ldots$ sont les approximations successives de la solution, les P_m sont certains opérateurs linéaires. Nous avons affecté ces opérateurs de l'indice m pour souligner que ces opérateurs peuvent éventuellement dépendre du numéro de l'itération. Pour que le processus soit facilement réalisable, il faut que ces opérateurs linéaires puissent s'appliquer aux fonctions de réseau $u^{(m-1)}$ moyennant un nombre non trop grand d'opérations arithmétiques. Supposons que les P_m vérifient les exigences suivantes:

1) $P_m u^{(m-1)}$ prend aux points du réseau sur la frontière du carré les mêmes valeurs que $u^{(m-1)}$.

2) Si la fonction de réseau $u(x, y)$ vérifie les équations

$$\Delta_{xx} u + \Delta_{yy} u = 0,$$

on a pour n'importe quel m

$$P_m u = u.$$

Soit à présent $u(x, y)$ la solution exacte du problème aux différences de Dirichlet

$$\Delta_{xx}u + \Delta_{yy}u = 0$$
$$u|_\Gamma = \varphi,$$

qui, on le sait, existe quelle que soit la fonction de réseau aux limites φ. Supposons que l'approximation initiale $u^{(0)}(x, y)$ du processus itératif vérifie les conditions aux limites $u^{(0)}|_\Gamma = \varphi$. Alors, d'après la propriété 1) des opérateurs P_m, pour toutes les itérations la condition aux limites $u^{(m)}|_\Gamma = \varphi$ sera vérifiée. Retranchant membre à membre les égalités

$$u^{(m)} = P_m u^{(m-1)},$$
$$u = P_m u,$$

on obtient $[u^{(m)} - u] = P_m [u^{(m-1)} - u]$.

La fonction de réseau $v^{(m)} = u^{(m)} - u$ s'annule sur la frontière et représente l'erreur de la solution approchée $u^{(m)}$.

Dès lors, pour étudier la vitesse de convergence de nos processus itératifs il suffira d'évaluer la vitesse de décroissance, quand m croît, de telle ou telle norme des fonctions $v^{(m)}$ liées par les égalités

$$v^{(m)}|_\Gamma = 0, \quad v^{(m)} = P_m v^{(m-1)}.$$

On prendra pour telle norme la norme euclidienne

$$\| v^{(m)} \| = \sqrt{4 \sum_{x, y} [v^{(m)}(x, y)]^2 h_x h_y}.$$

La somme sous la racine porte sur tous les points intérieurs du réseau aux différences (aux points de la frontière $v^{(m)}(x, y) = 0$). L'espace des fonctions de réseau s'annulant sur la frontière a $(N-1)^2$ dimensions. En effet, il est évident qu'il existe $(N-1)^2$ telles fonctions linéairement indépendantes, prenant en l'un des points intérieurs du réseau la valeur $1/2\sqrt{h_x h_y} = N/2$, et aux autres points la valeur zéro. La norme de chacune de ces fonctions est 1, et il n'est pas difficile de vérifier qu'elles sont orthogonales. Le produit scalaire des fonctions $v(x, y)$, $w(x, y)$ $(v|_\Gamma = 0, \ w|_\Gamma = 0)$ est

$$(v, w) = 4 \sum_{x, y} v(x, y) w(x, y) h_x h_y.$$

Lors de l'étude de ceux des opérateurs P_m que nous allons rencontrer il est commode de passer à une autre base dans le même espace à $(N-1)^2$ dimensions. Cette base est constituée par les fonctions

$$u^{(p, q)}(x, y) = \sin \pi p x \sin \pi q y$$
$$p = 1, 2, \ldots, N-1, \ q = 1, 2, \ldots, N-1.$$

Il est évident que ces fonctions sont exactement au nombre de $(N-1)^2$. Nous allons montrer que leurs produits scalaires sont donnés par les formules

$$(u^{(p_1, q_1)}, u^{(p_2, q_2)}) = \begin{cases} 1, \text{ si } p_1 = p_2,\ q_1 = q_2, \\ 0 \text{ dans le cas contraire.} \end{cases}$$

Il sera montré par là même que ces fonctions forment une base orthonormale. Par conséquent, toute fonction de réseau $v(x, y)$ s'annulant sur la frontière peut être mise de façon unique sous la forme

$$v(x, y) = \sum_{p, q=1}^{N-1} c_{p, q} u^{(p, q)},$$

et on a

$$\| v \|^2 = 4h_x h_y \sum_{x, y} v^2(x, y) = \sum_{p, q=1}^{N-1} c_{p, q}^2.$$

Les opérateurs P_m seront construits de façon que les vecteurs $u^{(p, q)}$ en soient des vecteurs propres avec certaines valeurs propres réelles $\lambda_m^{(p, q)}$. Ceci étant,

$$\| P_m v \| = \sqrt{\sum_{p, q} [\lambda_m^{(p, q)} c_{p, q}]^2} \leqslant$$

$$\leqslant \max_{p, q} | \lambda_m^{(p, q)} | \sqrt{\sum_{p, q} c_{p, q}^2} = \max_{p, q} | \lambda_m^{(p, q)} | \| v \|,$$

et la vitesse de convergence peut être évaluée à l'aide du plus grand nombre propre en module de l'opérateur P_m.

Nous allons démontrer l'orthonormalité de la base constituée par les fonctions $u^{(p, q)}$ à l'aide des trois lemmes suivants.

Lemme 1.

$$\sum_{n=0}^{n=N-1} \cos\left(n \frac{2\pi p}{N}\right) = \begin{cases} N, \text{ si } p/N \text{ est entier,} \\ 0, \text{ si } p/N \text{ est non entier,} \\ \quad p \text{ est entier,} \\ 1, \text{ si } p \text{ est demi-entier} \\ \quad (p/N \text{ n'étant pas alors entier}). \end{cases}$$

Démonstration. Si p/N est entier, $n \frac{2\pi p}{N}$ est multiple de 2π, de sorte que $\cos\left(n \frac{2\pi p}{N}\right) = 1$. L'assertion du lemme 1 est alors évidente. Si p/N est non entier, $e^{i \frac{2p\pi}{N}} \neq 1$, si bien qu'on peut faire le calcul suivant :

$$\sum_{n=0}^{N-1} \cos n \frac{2\pi p}{N} = \operatorname{Re}\left(\sum_{n=0}^{N-1} e^{in \frac{2\pi p}{N}}\right) = \operatorname{Re} \frac{e^{i \frac{2p\pi}{N} \cdot N} - 1}{e^{i \frac{2p\pi}{N}} - 1} = \operatorname{Re} \frac{e^{i2p\pi} - 1}{e^{i \frac{2p\pi}{N}} - 1}.$$

Si p est entier, $e^{i2p\pi}=1$, et donc $\sum_{n=0}^{N-1}\cos n\frac{2\pi p}{N}=0$. Si p est demi-entier, $e^{i2p\pi}=-1$,

$$\frac{e^{i2p\pi}-1}{e^{i\frac{2\pi p}{N}}-1}=\frac{-2}{e^{i\frac{2p\pi}{N}}-1}=\frac{-2\left(e^{-i\frac{2p\pi}{N}}-1\right)}{\left(e^{i\frac{2p\pi}{N}}-1\right)\left(e^{-i\frac{2p\pi}{N}}-1\right)}=$$

$$=\frac{-2\left(\cos\frac{2p\pi}{N}-i\sin\frac{2p\pi}{N}-1\right)}{2\left(1-\cos\frac{2p\pi}{N}\right)}=\frac{1-\cos\frac{2p\pi}{N}}{1-\cos\frac{2p\pi}{N}}+i\frac{\sin\frac{2p\pi}{N}}{1-\cos\frac{2p\pi}{N}}=$$

$$=1+i\frac{\sin\frac{2p\pi}{N}}{1-\cos\frac{2p\pi}{N}}.$$

Dans ce cas

$$\sum_{n=0}^{N-1}\cos n\frac{2\pi p}{N}=\operatorname{Re}\frac{e^{i2p\pi}-1}{e^{i\frac{2p\pi}{N}}-1}=\operatorname{Re}\left(1+i\frac{\sin\frac{2p\pi}{N}}{1-\cos\frac{2p\pi}{N}}\right)=1.$$

Le lemme est complètement démontré.

Lemme 2. *Soient k, l n'importe lesquels des nombres* $1, 2, 3, \ldots, N-1$. *Alors,*

$$\sum_{n=0}^{N-1}\cos\left(n\frac{k-l}{2}\cdot\frac{2\pi}{N}\right)=\begin{cases}N, & \text{si } k=l,\\ 0, & \text{si } k\neq l,\ k \text{ et } l \text{ étant de même parité } ((k-l)/2 \text{ est entier}),\\ 1, & \text{si } k\neq l,\ k \text{ et } l \text{ étant de parités différentes } ((k-l)/2 \text{ est demi-entier});\end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^{N-1}\cos\left(n\frac{k+l}{2}\cdot\frac{2\pi}{N}\right)=\begin{cases}0, & \text{si } k \text{ et } l \text{ sont de même parité},\\ 1, & \text{si } k \text{ et } l \text{ sont de parités différentes}.\end{cases}$$

Ce lemme se déduit du lemme 1. Pour déduire la première égalité il faudra poser $p=(k-l)/2$ et noter que $p=(k-l)/2$ peut prendre les valeurs

$$-\frac{N}{2}+1,\ -\frac{N}{2}+\frac{3}{2},\ \ldots,\ -\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{2},\ \ldots,\ \frac{N}{2}-\frac{3}{2},\ \frac{N}{2}-1.$$

Il est évident que pour tous ces p, sauf $p=0$, le rapport p/N est non entier. La valeur $p=0$ ne s'obtient que pour $k=l$. Pour justifier la seconde égalité, il suffit d'observer que la demi-somme $(k+l)/2$ ne peut prendre que les valeurs $p=1,3/2,2,5/2,3,\ldots$

$\ldots, N - 1/2, N - 1$, pour aucune desquelles le rapport p/N n'est entier.

Lemme 3. *Si k, l sont n'importe lesquels des nombres* $1, 2, \ldots$ $\ldots, N - 1$, *alors*

$$\sum_{n=1}^{N-1} \sin\left(n\frac{k\pi}{N}\right)\sin\left(n\frac{l\pi}{N}\right) = \begin{cases} \frac{N}{2}, & \text{si } k = l, \\ 0, & \text{si } k \neq l. \end{cases}$$

Pour le démontrer, il sera commode d'ajouter à la somme étudiée le terme nul $\sin 0 \frac{k\pi}{N} \sin 0 \frac{l\pi}{N}$ et de l'écrire comme suit:

$$\sum_{n=0}^{N-1} \sin n\frac{k\pi}{N} \sin n\frac{l\pi}{N} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N-1} \cos\left(n\frac{k-l}{2}\frac{2\pi}{N}\right) - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N-1} \cos\left(n\frac{k+l}{2}\frac{2\pi}{N}\right).$$

L'assertion du lemme 3 résulte de cette représentation obtenue à l'aide de l'identité élémentaire $\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}\cos(\alpha - \beta) - \frac{1}{2}\cos(\alpha + \beta)$, ainsi que du lemme 2.

Rappelons-nous à présent que nous considérons le réseau sur le carré unité $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$ de pas $h_x = 1/N$, $h_y = 1/N$. Fixant un certain y, on obtient une suite de points unidimensionnelle $x_n = n/N$. Ceci nous permet de recopier le lemme 3 sous la forme

$$\sum_{n=1}^{N-1} \sin k\pi x_n \sin l\pi x_n = \begin{cases} \frac{1}{2h_x}, & \text{si } k = l, \\ 0, & \text{si } k \neq l, \end{cases}$$

ou de façon plus symbolique

$$\sum_{x} \sin k\pi x \cdot \sin l\pi x = \begin{cases} \frac{1}{2h_x}, & \text{si } k = l, \\ 0, & \text{si } k \neq l, \end{cases}$$

$$l,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ \frac{1}{h_x} - 1.$$

La sommation concerne ici tous les points intérieurs x appartenant au réseau.

De même,

$$\sum_{y} \sin k\pi y \cdot \sin l\pi y = \begin{cases} \frac{1}{2h_y}, & \text{si } k = l, \\ 0, & \text{si } k \neq l, \end{cases}$$

$$k,\ l = 1,\ 2,\ \ldots,\ \frac{1}{h_y} - 1.$$

On peut à présent passer à la démonstration du fait que les fonctions $u^{(p,\,q)}(x,\,y)$ forment dans l'espace des fonctions de réseau une base orthonormale. Rappelons que $u^{(p,\,q)} = \sin(p\,x\pi)\sin(q\,y\pi)$ et que le produit scalaire $(u^{(p_1,\,q_1)},\ u^{(p_2,\,q_2)})$ se calcule ici suivant la formule $4h_xh_y\sum\limits_{x,\,y} u^{(p_1,\,q_1)}(x,\,y)\,u^{(p_2,\,q_2)}(x,\,y)$. Dès lors,

$$(u^{(p_1,\,q_1)},\ u^{(p_2,\,q_2)}) = 4h_xh_y\sum_{x,\,y}\sin p_1x\pi\sin q_1y\pi\sin p_2x\pi\sin q_2y\pi =$$

$$= \left(2h_x\sum_x \sin p_1\pi x\sin p_2\pi x\right)\left(2h_y\sum_y \sin q_1\pi y\sin q_2\pi y\right) =$$

$$= \begin{cases} 1, & \text{si } p_1 = p_2,\ q_1 = q_2, \\ 0 & \text{dans le cas contraire.} \end{cases}$$

Décrivons maintenant les opérateurs P_m qui vont participer à nos processus itératifs. Les processus dont je vais parler ont été inventés à l'aide de l'analogie physique élémentaire suivante.

Imaginons que l'on veuille construire la solution de l'équation $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ dans un certain domaine G, telle que $u|_\Gamma = \varphi$. Il est loisible de supposer que la fonction $u\,(x,\,y)$ est, comme on le sait, la distribution stationnaire de la température qui s'établit dans un corps cylindrique si l'on entretient pendant un temps prolongé sur la surface frontière la température φ. Cette interprétation de la solution induit la pensée suivante. Considérons l'équation de la chaleur non stationnaire $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ dans le même domaine G, avec la même condition aux limites $u|_\Gamma = \varphi$ (φ est indépendante de t). Il est naturel de supposer que, quelle que soit la distribution initiale de la température $u\,(x,\,y,\,0) = u_0\,(x,\,y)$, la solution du problème non stationnaire tend, lorsque $t \to \infty$, vers la distribution stationnaire décrite par l'équation de Laplace $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. Dès lors, on a naturellement l'idée d'utiliser les approximations aux différences de l'équation de la chaleur pour construire des processus aux différences qui tendent à s'établir vers la solution de l'équation aux différences de Laplace.

Le processus le plus simple s'obtient si l'on approche l'équation $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ à l'aide du schéma suivant

$$\frac{u\,(t+\tau,\ x,\ y) - u\,(t,\ x,\ y)}{\tau} = (\Delta_{xx} + \Delta_{yy})\,u\,(t,\ x,\ y).$$

Les valeurs $u\,(t,\,x,\,y)$ aux points frontières du réseau sont supposées données et indépendantes de t. Si l'on utilise nos équations aux différences, désignant $u\,(0,\,x,\,y)$ par $u^{(0)}$, et $u\,(t,\,x,\,y)$ par $u^m\,(x,\,y)$

$(m = t/\tau)$, on est conduit aux formules suivantes pour déterminer $u^{(m)}$ d'après $u^{(m-1)}$:

$$u^{(m)}(x, y) = \begin{cases} u^{(m-1)}(x, y) \text{ aux points frontières,} \\ u^{(m-1)}(x, y) + \tau(\Delta_{xx} + \Delta_{yy}) u^{(m-1)}(x, y) \\ \text{aux points intérieurs.} \end{cases}$$

Par là même nous avons déterminé l'opérateur P qui transforme $u^{(m-1)}$ en $u^{(m)}$: $u^{(m)} = Pu^{(m-1)}$. Dans le cas donné les opérateurs P_m ne dépendent pas du numéro de l'itération m : $P_1 = P_2 = \ldots$ $\ldots = P_m = P$.

Il est évident que l'opérateur ainsi défini satisfait aux exigences (1) et (2) posées au début du paragraphe, c'est-à-dire qu'il ne change pas les valeurs aux limites et qu'il ne change pas la solution exacte de l'équation $(\Delta_{xx} + \Delta_{yy}) u = 0$.

Voyons comment l'opérateur P transforme nos fonctions de base $u^{(p, q)}(x, y) = \sin px\pi \sin qy\pi$ $(p, q = 1, 2, \ldots, N - 1)$. Ces fonctions prennent sur la frontière des valeurs nulles.

Observons à présent que

$$\Delta_{xx} u^{(p, q)} = \sin qy\pi \Delta_{xx} \sin px\pi =$$

$$= \sin qy\pi \frac{\sin p(x + h_x)\pi - 2 \sin px\pi + \sin p(x - h_x)\pi}{h_x^2} =$$

$$= \sin qy\pi \frac{2}{h_x^2} [\cos(ph_x\pi) - 1] \sin px\pi =$$

$$= -\frac{4}{h_x^2} \sin^2 \frac{ph_x\pi}{2} u^{(p, q)}(x, y) = -4N^2 \sin^2 \frac{\pi p}{2N} u^{(p, q)}(x, y).$$

On établit de même que

$$\Delta_{yy} u^{(p, q)} = -4N^2 \sin^2 \frac{\pi q}{2N} u^{(p, q)}(x, y).$$

A présent, il est évident que

$$Pu^{(p, q)} = \left[1 - 4\tau N^2 \left(\sin^2 \frac{\pi p}{2N} + \sin^2 \frac{\pi q}{2N}\right)\right] u^{(p, q)}(x, y),$$

c'est-à-dire que la transformation P multiplie le vecteur $u^{(p, q)}$ par le facteur

$$\lambda^{(p, q)} = 1 - 4\tau N^2 \left(\sin^2 \frac{\pi p}{2N} + \sin^2 \frac{\pi q}{2N}\right).$$

Soient $c_{p, q}$ les coefficients de la décomposition de la fonction de réseau $v^{(m-1)}(x, y) = u^{(m-1)} - u$ suivant les fonctions de base $u^{(p, q)}(x, y)$

$$v^{(m-1)} = \sum c_{p, q} u^{(p, q)}(x, y), \text{ de sorte que } \| v^{(m-1)} \| = \sqrt{\sum c_{p, q}^2}.$$

Alors,

$$\| v^{(m)} \| = \sqrt{\sum |\lambda^{(p, q)}|^2 c_{p, q}^2} \leqslant \max_{p, q} |\lambda^{(p, q)}| \sqrt{\sum c_{p, q}^2} = \max_{p, q} |\lambda^{(p, q)}| \, \| v^{(m-1)} \|.$$

Les formules qui viennent d'être données montrent que la constante $\max_{p, q} |\lambda^{(p, q)}|$ dans l'évaluation $\frac{\| v^{(m)} \|}{\| v^{(m-1)} \|} \leqslant \max_{p, q} |\lambda^{(p, q)}|$ ne saurait être améliorée. Posant $\Lambda(\tau) = \max_{p, q} |\lambda^{(p, q)}|$, on obtient l'évaluation non améliorable pour la vitesse de décroissance de l'erreur $v^{(m)}$ lors des itérations:

$$\| v^{(m)} \| \leqslant [\Lambda(\tau)]^m \| v(0) \|.$$

Il est clair que si τ est tel que $\Lambda(\tau) > 1$, le processus divergera au moins pour certaines données initiales, et que pour $\Lambda(\tau) < 1$ la vitesse de convergence est d'autant plus grande que $\Lambda(\tau)$ est plus petit.

Calculons

$$\Lambda(\tau) = \max_{\substack{p=1, \ldots, N-1 \\ q=1, \ldots, N-1}} \left| 1 - 4\tau N^2 \left(\sin^2 \frac{\pi p}{2N} + \sin^2 \frac{\pi q}{2N} \right) \right|.$$

Remarquons pour cela que

$$\sin \frac{\pi}{2N} \leqslant \sin \frac{\pi p}{2N} \leqslant \sin \frac{\pi (N-1)}{2N} = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2N} \right) = \cos \frac{\pi}{2N} = \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\pi}{2N}},$$

et donc que

$$\sin^2 \frac{\pi}{2N} \leqslant \sin^2 \frac{\pi p}{2N} \leqslant 1 - \sin^2 \frac{\pi}{2N}.$$

De même

$$\sin^2 \frac{\pi}{2N} \leqslant \sin^2 \frac{\pi q}{2N} \leqslant 1 - \sin^2 \frac{\pi}{2N}$$

(les frontières supérieure et inférieure sont ici atteintes).

Il est évident que $\Lambda(\tau) \geqslant 1$ pour $\tau \leqslant 0$ si bien qu'il suffit d'envisager les τ positifs. On voit que

$$1 - 4\tau N^2 \left(2 - 2 \sin^2 \frac{\pi}{2N} \right) \leqslant 1 - 4\tau N^2 \left(\sin^2 \frac{\pi p}{2N} + \sin^2 \frac{\pi q}{2N} \right) \leqslant 1 - 8\tau N^2 \sin^2 \frac{\pi}{2N},$$

$$(1 - 8\tau N^2) + 8\tau N^2 \sin^2 \frac{\pi}{2N} \leqslant \lambda^{(p, q)} \leqslant 1 - 8\tau N^2 \sin^2 \frac{\pi}{2N},$$

$$\Lambda(\tau)=\max\left\{\begin{array}{l}\left|(1-8\tau N^2)+8\tau N^2\sin^2\frac{\pi}{2N}\right|\\ \left|1-8\tau N^2\sin^2\frac{\pi}{2N}\right|\end{array}\right.=$$

$$=\left\{\begin{array}{rl}1-8\tau N^2\sin^2\frac{\pi}{2N} & \text{pour } 8\tau N^2\leqslant 2,\\ -\left[(1-8\tau N^2)+8\tau N^2\sin^2\frac{\pi}{2N}\right] & \text{pour } 8\tau N^2>2.\end{array}\right.$$

Le graphique de $\Lambda(\tau)$ est représenté sur la fig. 87. La plus petite valeur de $\Lambda(\tau)$ est atteinte pour $\tau=\frac{1}{4N^2}$, valeur qui doit être considérée comme optimale. Alors,

$$\Lambda(\tau)=1-8\tau N^2\sin^2\frac{\pi}{2N}=1-2\sin^2\frac{\pi}{4N}.$$

Ainsi donc, nous avons obtenu la recommandation de mener le processus suivant les formules

$$u^{(m)}=\left\{\begin{array}{l}u^{(m-1)}(x,\ y) \text{ aux points de la frontière,}\\ u^{(m-1)}+\frac{1}{4N^2}\left[\Delta_{xx}u^{(m-1)}+\Delta_{yy}u^{(m-1)}\right] \text{ aux points intérieurs}\end{array}\right.$$

et l'évaluation

$$\|v^{(m)}\|\leqslant\left(1-2\sin^2\frac{\pi}{2N}\right)^m\|v(0)\|$$

pour la décroissance de l'erreur.

Si l'on remplace Δ_{xx}, Δ_{yy} par leurs expressions où $h_x=h_y=1/N$, les formules d'itération s'écrivent pour notre processus sous la forme élégante ci-après :

$$u^{(m)}(x,\ y)=\left\{\begin{array}{l}u^{(m-1)}(x,\ y) \text{ aux points de la frontière,}\\ \frac{1}{4}\left[u^{(m-1)}(x-h_x,\ y)+u^{(m-1)}(x,\ y-h_y)\right]+\\ +\frac{1}{4}\left[u^{(m-1)}(x+h_x,\ y)+u^{(m-1)}(x,\ y+h_y)\right]\\ \qquad\qquad\text{aux points intérieurs.}\end{array}\right.$$

A chaque itération la valeur en un point intérieur $(x,\ y)$ doit être remplacée par la moyenne arithmétique aux quatre points voisins.

Evaluons le nombre d'itération m qu'il faut dans ce processus pour que l'erreur $\|v^{(m)}\|$ soit inférieure à $\varepsilon\|v^{(0)}\|$. Il faut pour cela tirer m de l'équation

$$\varepsilon=\left(1-2\sin^2\frac{\pi}{2N}\right)^m.$$

Par conséquent,

$$m=\frac{\ln\varepsilon}{\ln\left(1-2\sin^2\frac{\pi}{2N}\right)}=\frac{\ln\varepsilon^{-1}}{\frac{\pi^2}{2N^2}+O\left(\frac{1}{N^2}\right)}\approx\frac{2N^2}{\pi^2}\ln\frac{1}{\varepsilon}.$$

Le nombre d'itérations, pour la même réduction de l'erreur, augmente comme N^2 lorsque le nombre de points croît. C'est là un grave défaut du processus très simple et commode qui vient d'être décrit. De ce fait, on ne pourra se servir des itérations qui viennent d'être étudiées que si le nombre des points du réseau n'est pas grand.

Nous allons passer maintenant à la description d'un autre processus, qui ne possède pas ce défaut. Dans ce processus le passage

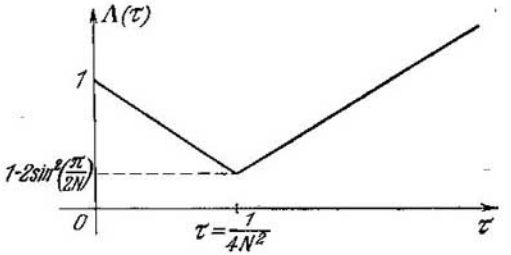

Fig. 87

de $u^{(m-1)}$ à $u^{(m)}$ se fait en deux fois. On trouve d'abord la fonction auxiliaire $u^{(m-1/2)}$ en résolvant le système d'équations aux différences

$$\Delta_{xx}u^{(m-1/2)} + \Delta_{yy}u^{(m-1)} = \frac{u^{(m-1/2)} - u^{(m-1)}}{\tau},$$

$$u^{(m-1/2)}|_\Gamma = u^{(m-1)}.$$

Ces équations ne permettent pas d'écrire d'emblée les formules pour $u^{(m-1/2)}(x, y)$, mais elles peuvent être résolues à l'aide de la méthode du parcours. En effet, chacune des équations aux différences relie les valeurs des inconnues $u^{(m-1/2)}$ aux trois points $(x - h_x, y)$, (x, y), $(x + h_x, y)$. Les équations se « stratifient », formant des systèmes indépendants l'un de l'autre pour chaque y fixé. Chacun de ces systèmes est exactement du même type que celui exigé pour l'application de la variante étudiée de la méthode du parcours.

Une fois $u^{(m-1/2)}$ trouvée, on trouve la fonction $u^{(m)}$ en résolvant le système suivant :

$$\Delta_{yy}(u^{(m)} - u^{(m-1)}) = \frac{u^{(m)} - u^{(m-1/2)}}{\tau}, \quad u^{(m)}|_\Gamma = u^{(m-1/2)}.$$

Ce système pour $u^{(m)}$ se stratifie lui aussi en systèmes (chacun pour x fixé) qui se résolvent par la méthode du parcours.

Il apparaît que de toutes les équations apportées on peut éliminer $u^{(m-1/2)}$ et obtenir les équations qui lient directement $u^{(m)}$ et

$u^{(m-1)}$. L'introduction de $u^{(m-1/2)}$ n'est nécessaire que pour ramener la résolution des équations aux différences aux équations de parcours unidimensionnelles.

Tirons $u^{(m-1/2)}$ du second système :

$$u^{(m-1/2)} = u^{(m)} - \tau\Delta_{yy}\left(u^{(m)} - u^{(m-1)}\right)$$

et substituons cette expression dans le premier. On obtient l'égalité

$$\Delta_{xx}u^{(m)} + \Delta_{yy}u^{(m)} = \frac{u^{(m)} - u^{(m-1)}}{\tau} + \tau\Delta_{xx}\Delta_{yy}\left(u^{(m)} - u^{(m-1)}\right).$$

Ceci aux points intérieurs. Sur la frontière, $u^{(m)} = u^{(m-1)}$. Il est assez clair que pour les τ petits ces équations peuvent à nouveau être considérées comme une certaine approximation de l'équation de la chaleur. C'est ainsi qu'elles ont été conçues. Un fait très important pour la réalisation du processus est que ces équations à deux dimensions se « stratifient » en équations unidimensionnelles indépendantes. Actuellement, de tels schémas stratifiables sont construits pour toutes les équations fondamentales pluridimensionnelles de la physique mathématique.

Lors de l'étude du processus itératif déterminé par le système écrit, nous ferons abstraction de l'analogie physique avec l'équation de la chaleur et nous n'exigerons nullement que le paramètre τ soit petit. Cette analogie n'était nécessaire que pour suggérer ce processus.

Nous allons construire une suite d'opérateurs $P_1, P_2, \ldots$, d'après la même règle décrite plus haut, avec la seule différence qu'à chaque valeur m correspondra une certaine valeur bien déterminée du paramètre $\tau = \tau_m$ qui figure dans la description de l'opérateur P :

1) Aux points de la frontière les valeurs de la fonction $w = Pu$ coïncident avec les valeurs de u.

2) Aux points intérieurs on trouve les valeurs de $w = Pu$ en tant que solutions de l'équation aux différences :

$$\Delta_{xx}w + \Delta_{yy}w = \frac{w-u}{\tau} + \tau\Delta_{xx}\Delta_{yy}(w-u).$$

Montrons que l'opérateur P est déterminé par ces conditions et qu'il vérifie les conditions 1), 2) formulées au début du paragraphe. Il est évident que l'exigence 1), qui est la coïncidence des valeurs aux limites, est satisfaite. Nous allons maintenant vérifier que l'exigence 2) est satisfaite, c'est-à-dire la coïncidence de w et u dans le cas où $\Delta_{xx}u + \Delta_{yy}u = 0$, en même temps que nous démontrerons la résolubilité des équations pour w et l'unicité de la solution.

Désignons par z la différence $w - u$. Cette différence s'annule sur la frontière et satisfait aux équations

$$\Delta_{xx}z + \Delta_{yy}z - \frac{z}{\tau} - \tau\Delta_{xx}\Delta_{yy}z = -(\Delta_{xx}u + \Delta_{yy}u) = f(x, y).$$

Ici la fonction $f(x, y)$ est déterminée seulement aux points intérieurs du réseau et on peut la prolonger par des zéros aux points de la frontière. Si l'on démontre que l'opérateur linéaire $\Delta_{xx} + \Delta_{yy} - \frac{1}{\tau} - \tau\Delta_{xx}\Delta_{yy}$ est non dégénéré dans le sous-espace à $(N-1)^2$ dimensions des fonctions de réseau dans notre carré, nulles sur la frontière, on aura par là même démontré la résolubilité des équations pour z, l'unicité de cette solution et l'égalité $z = 0$ dans le cas $\Delta_{xx}u + \Delta_{yy}u = 0$. Nous rappelant que $z = w - u$, nous nous assurerons que toutes les propriétés de P que nous voulons vérifier sont vraies.

Pour démontrer la non-dégénération de

$$\Delta_{xx} + \Delta_{yy} - \frac{1}{\tau} - \tau\Delta_{xx}\Delta_{yy}$$

il suffit de trouver pour cet opérateur $(N-1)^2$ fonctions propres avec des valeurs propres non nulles. Les $u^{(p, q)}(x, y)$ sont précisément de telles fonctions propres. En effet, il résulte des égalités

$$\Delta_{xx}u^{(p, q)} = -4N^2 \sin^2 \frac{\pi p}{2N}\, u^{(p, q)},$$

$$\Delta_{yy}u^{(p, q)} = -4N^2 \sin^2 \frac{\pi q}{2N}\, u^{(p, q)}$$

que

$$\left(\Delta_{xx} + \Delta_{yy} - \frac{1}{\tau} - \tau\Delta_{xx}\Delta_{yy}\right) u^{(p, q)} =$$

$$= -\left(4N^2 \sin^2 \frac{\pi p}{2N} + 4N^2 \sin^2 \frac{\pi q}{2N} + \frac{1}{\tau} + \right.$$

$$\left. + \tau \cdot 16N^4 \sin^2 \frac{\pi p}{2N} \sin^2 \frac{\pi q}{2N}\right) u^{(p, q)}.$$

Cette égalité montre que $u^{(p, q)}$ est vecteur propre avec une valeur propre non nulle (quel que soit τ fini).

Toutes les propriétés requises de l'opérateur P sont vérifiées. Calculons à présent toutes ses valeurs propres dans l'espace des fonctions nulles sur la frontière. Les fonctions propres sont à nouveau $u^{(p, q)}(x, y)$. Soit $v|_\Gamma = 0$, alors $\tilde{v} = Pv$ est déterminée par les égalités suivantes:

$$\tilde{v}|_\Gamma = 0, \quad \Delta_{xx}\tilde{v} + \Delta_{yy}\tilde{v} = \frac{\tilde{v} - v}{\tau} + \tau\Delta_{xx}\Delta_{yy}(\tilde{v} - v).$$

Posons $v = u^{(p, q)}$ et cherchons à vérifier cette équation à l'aide de

$$\tilde{v} = \lambda u^{(p, q)} = \lambda^{(p, q)} u^{(p, q)}.$$

Si l'on y réussit, il résultera de l'unicité qu'il n'y a pas d'autres solutions et que $u^{(p, q)}$ est vecteur propre avec les valeurs propres $\lambda^{(p, q)}$.

En substituant directement et utilisant les égalités

$$\Delta_{xx}u^{(p,\,q)} = -4N^2 \sin^2 \frac{\pi p}{2N}\, u^{(p,\,q)},\ \Delta_{yy}u^{(p,\,q)} = -4N^2 \sin^2 \frac{\pi q}{2N}\, u^{(p,\,q)}$$

on déduit que λ doit satisfaire à l'équation

$$-4N^2 \left(\sin^2 \frac{p\pi}{2N} + \sin^2 \frac{q\pi}{2N}\right) \lambda = \frac{\lambda - 1}{\tau} + \\ + \tau (\lambda - 1)\, 16N^4 \sin^2 \frac{p\pi}{2N} \sin^2 \frac{q\pi}{2N},$$

laquelle est, d'évidence, résoluble et a la solution

$$\lambda = \lambda^{(p,\,q)} = \frac{1 + \tau^2 \cdot 16N^4 \sin^2 \frac{\pi p}{2N} \sin^2 \frac{\pi q}{2N}}{1 + \tau \cdot 4N^2 \left(\sin^2 \frac{\pi p}{2N} + \sin^2 \frac{\pi q}{2N}\right) + \tau^2 \cdot 16N^4 \sin^2 \frac{p\pi}{2N} \sin^2 \frac{q\pi}{2N}}.$$

Il est évident que pour les τ positifs tous les $\lambda^{(p,\,q)}$ sont inférieurs à l'unité et le processus convergera quel que soit le τ choisi. Or, une analyse détaillée de la dépendance de $\lambda^{(p,\,q)}$ par rapport à τ permet de proposer une variante de processus convergeant essentiellement plus vite que le processus précédemment examiné.

Fixons un certain N suffisamment grand et définissons la suite décroissante de paramètres τ:

$$\tau_1 = \frac{1}{4 \cdot 9},\ \tau_2 = \frac{1}{16 \cdot 4 \cdot 9},\ \tau_3 = \frac{1}{16^2 \cdot 4 \cdot 9},\ \ldots,\ \tau_s = \frac{1}{16^{s-1} \cdot 4 \cdot 9},\ \ldots$$

Nous choisirons dans cette suite un nombre fini k de paramètres $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k$ d'après la règle suivante: τ_k est le premier paramètre de notre suite, qui soit inférieur ou égal à $1/N^2$:

$$\tau_s > \frac{1}{N^2} \text{ pour } s = 1,\ 2,\ \ldots,\ k-1,\ \tau_k \leqslant \frac{1}{N^2}.$$

Il résulte de notre procédé de construction de la suite que

$$\tau_k = \frac{\tau_{k-1}}{16} > \frac{1}{16N^2},\quad \frac{1}{16^{k-1} \cdot 4 \cdot 9} > \frac{1}{16N^2}\quad 16^{k-1} < \frac{4N^2}{9},$$

c'est-à-dire que $k = O(\ln N)$. Par exemple, pour $N = 100$ il suffit de prendre $k = 4$. Nous démontrerons que, quels que soient $p, q = 1, 2, \ldots, N-1$, on a toujours l'inégalité

$$0 < \lambda^{(p,\,q)}(N, \tau_1) \times \lambda^{(p,\,q)}(N, \tau_2) \times \ldots \times \lambda^{(p,\,q)}(N, \tau_k) \leqslant 0{,}68. \quad (1)$$

Ce fait entraîne la conséquence suivante. Si l'on réalise les itérations d'après le procédé décrit avec les valeurs du paramètre τ: $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k$, l'erreur à l'issue de ce cycle sera 0,68 fois l'erreur initiale. Répétant ce cycle, on obtient une erreur n'excédant pas $(0{,}68)^2$ fois l'erreur initiale, etc.

Changeant cycliquement les paramètres $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{k-1}, \tau_k, \tau_1, \ldots, \tau_k$, nous réduirons en m pas l'erreur de plus de $(0{,}68)^{-m/k}$ fois. Pour réduire l'erreur de $1/\varepsilon$ fois, il suffit d'avoir $(0{,}68)^{m/k} = \varepsilon$, c'est-à-dire d'avoir $m = k\frac{\ln \varepsilon}{\ln 0{,}68} \asymp \ln N \ln \frac{1}{\varepsilon}$. Quand le nombre de points croît, le nombre d'itérations croît ici non pas comme N^2, mais seulement comme $\ln N$, incomparablement moins vite comme on le voit. Ainsi, il nous reste à démontrer l'inégalité (1). Introduisant les notations $\xi_p = 4N^2 \sin^2 \frac{\pi p}{2N}$, nous recopierons la formule pour $\lambda^{(p,q)}$ sous la forme suivante plus compacte

$$\lambda^{(p,q)} = \frac{1+\tau^2\xi_p\xi_q}{(1+\tau\xi_p)(1+\tau\xi_q)}.$$

Il est évident que pour N suffisamment grand

$$9 < \pi^2 - O\left(\frac{1}{N^2}\right) \leqslant \xi_p = 4N^2 \sin^2 \frac{\pi p}{2N} \leqslant 4N^2.$$

Ainsi donc, on a

$$9 \leqslant \xi_p \leqslant 4N^2, \quad 9 \leqslant \xi_q \leqslant 4N^2.$$

Les nombres $\tau_k\xi_p, \tau_{k-1}\xi_p, \ldots, \tau_1\xi_p$ forment, pour tout p fixé, une progression géométrique croissante de raison 16. Le plus grand d'entre eux, $\tau_1\xi_p$, est plus grand que $\frac{1}{4}$ $\left(\text{étant donné que } \xi_p\tau_1 \geqslant \geqslant 9 \cdot \frac{1}{4 \cdot 9} = \frac{1}{4}\right)$, et le plus petit inférieur à 4 $\left(\text{étant donné que } \xi_p\tau_k \leqslant \leqslant 4N^2 \frac{1}{N^2} = 4\right)$. Par conséquent, l'un au moins des nombres $\tau_1\xi_p, \tau_2\xi_p, \ldots, \tau_k\xi_p$ est situé à l'intérieur du segment $[1/4, 4]$. Ainsi, nous avons démontrer que, pour tout p, on trouve $1 \leqslant s \leqslant k$ tel que $1/4 \leqslant \tau_s\xi_p \leqslant 4$. Montrons que $0 < \lambda^{(p,p)}(N, \tau_s) \leqslant 0{,}68$. Pour cela, considérons la formule

$$\lambda^{(p,p)}(N, \tau_s) = \frac{1+\tau_s^2 \cdot \xi_p^2}{(1+\tau_s\xi_p)^2} = \frac{1+z^2}{(1+z)^2} = F(z),$$

où $1/4 \leqslant z = \tau_s \cdot \xi_p \leqslant 4$. Primo, notons que

$$F(z) = \frac{1+z^2}{(1+z)^2} = \frac{\frac{1+z^2}{z^2}}{\left(\frac{1+z}{z}\right)^2} = \frac{1+\frac{1}{z^2}}{\left(1+\frac{1}{z}\right)^2} = F\left(\frac{1}{z}\right).$$

Si bien qu'il suffit de s'assurer qu'on a l'inégalité $0 \leqslant F(z) \leqslant 0{,}68$ pour $1 \leqslant z \leqslant 4$. Or, ceci résulte aussitôt de la représentation suivante:

$$0 < \frac{1}{2} \leqslant F(z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{1+z}\right)^2 \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{1+4}\right)^2 = 0{,}68.$$

Utilisant à présent le fait que

$$0<\lambda^{(p,\,p)}(N,\,\tau_1)<1, \qquad 0<\lambda^{(p,\,p)}(N,\,\tau_s)\leqslant 0{,}68,$$
$$0<\lambda^{(p,\,p)}(N,\,\tau_2)<1, \qquad 0<\lambda^{(p,\,p)}(N,\,\tau_{s+1})<1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$0<\lambda^{(p,\,p)}(N,\,\tau_{s-1})<1, \qquad 0<\lambda^{(p,\,p)}(N,\,\tau_k)<1,$$

on déduit de là l'inégalité

$$0<\lambda^{(p,\,p)}(N,\,\tau_1)\,\lambda^{(p,\,p)}(N,\,\tau_2)\ldots\lambda^{(p,\,p)}(N,\,\tau_k)<0{,}68.$$

La partie là plus difficile de notre étude est terminée. On déduit de l'inégalité $2\xi_p\xi_q\leqslant\xi_p^2+\xi_q^2$ que

$$(1+\tau^2\xi_p\xi_q)^2-(1-\tau^2\xi_p^2)(1-\tau^2\xi_q^2)+2\tau^2\xi_p\xi_l\leqslant$$
$$\leqslant(1+\tau^4\xi_p^2\xi_q^2)+\tau^2(\xi_p^2+\xi_q^2)=(1+\tau^2\xi_p^2)(1+\tau^2\xi_q^2),$$
$$0<\frac{1+\tau^2\xi_p\xi_q}{(1+\tau\xi_p)(1+\tau\xi_q)}\leqslant\sqrt{\frac{1-\tau^2\xi_p^2}{(1+\tau\xi_p)^2}\cdot\frac{1+\tau^2\xi_q^2}{(1+\tau\xi_q)^2}},$$
$$\lambda^{(p,\,q)}(\tau,\,N)=\sqrt{\lambda^{(p,\,p)}(N,\,\tau)\,\lambda^{(q,\,q)}(N,\,\tau)}.$$

Il en résulte de façon évidente que

$$0<\lambda^{(p,\,q)}(N,\,\tau_1)\,\lambda^{(p,\,q)}(N,\,\tau_2)\ldots\lambda^{(p,\,q)}(N,\,\tau_k)\leqslant$$
$$\leqslant\sqrt{\lambda^{(p,\,p)}(N,\,\tau_1)\,\lambda^{(p,\,p)}(N,\,\tau_2)\ldots\lambda^{(p,\,p)}(N,\,\tau_k)}\times$$
$$\times\sqrt{\lambda^{(q,\,q)}(N,\,\tau_1)\ldots\lambda^{(q,\,q)}(N,\,\tau_k)}<\sqrt{0{,}68}\cdot\sqrt{0{,}68}=0{,}68.$$

La démonstration promise de l'inégalité pour les valeurs propres est faite, et ainsi est justifié le processus itératif cyclique proposé par Douglas et Rackford dans un travail de 1956.

INDEX

Approximation d'une équation 383, 406, 413, 414

Bicaractéristiques 145

Caractéristique amplitude-fréquence 307
Caractéristiques 58, 59, 80-87, 90-93, 112
— incidentes 157
— partantes 157
Coefficient de conductivité thermique 25, 26
Complétude de l'ensemble des fonctions propres 352
Condition de résolubilité du problème de Dirichlet 263
— initiale 58, 65
Conditions aux limites dissipatives 161
— — — pour un système hyperbolique 154-161
— — — strictement dissipatives 162
— d'accord 154, 155
Cône des caractéristiques 151
— des normales caractéristiques 90, 143
Critérium de Schwarz 263, 270

Diffusivité 27
Domaine d'influence (de dépendance) aux différences 391-393
— d'unicité des solutions des équations de l'acoustique 148-153
Données initiales 58, 66, 160, 206

ε-entropie 188
Equation de la chaleur 25, 26-28, 49, 93, 116
Equation de la filtration 50
— de Laplace 8, 10, 92, 94, 113, 237
— de Poisson 8, 11, 15, 17
— des ondes 206
— des petites vibrations d'une corde 62, 92
— d'Hamilton-Jacobi 142, 143
— elliptique du second ordre 93
Equations de Cauchy et Riemann 17, 82, 99, 114, 118
— de l'acoustique 50, 86, 88, 113, 145-153
— de la théorie de l'élasticité 138
— de Maxwell 67, 68, 77, 124
Erreur d'approximation 400, 407-409
Exemple d'Hadamard 252, 256

Facteur régularisant 288
Fonction harmonique 15, 16, 17, 244
— logarithmiquement convexe 297
Fonctions propres associées 351
— — du problème aux limites 102, 110, 111
— — pour un système auto-adjoint du second ordre 367
— — pour un système conservatif 358
Forme canonique du système hyperbolique 123, 124
Formule de d'Alembert 63, 108
— de Kirchhoff 212
— de Poisson pour l'équation bidimensionnelle des ondes 217
Formule de Poisson pour l'équation de Laplace 21, 22, 99

Indice de la condition aux limites 284
— du problème aux limites 292
Inégalité d'Hamilton-Jacobi 142
— d'Harnack 246

Intégrale de Dirichlet 239, 252
— de Duhamel 305
— d'énergie (loi de conservation de l'énergie) pour un système t-hyperbolique symétrique 89, 124, 126
— — pour l'équation de la chaleur 46, 51
— — pour les équations de l'acoustique 64, 65, 227
— — pour les équations de Maxwell 77
— de Poisson pour l'équation de la chaleur 37, 42
Interpolation des fonctions de réseau 193
Invariants de Riemann 61, 123, 157

Lacune 218
Lemme de Jordan 311
Loi de conservation de l'énergie (cf. intégrale d'énergie)

Méthode de Fourier 94, 352
— — — pour l'équation de Laplace dans le cercle 99
— — — pour les équations de l'acoustique 100, 104, 108, 112
— — — pour les petites vibrations d'une corde 109
— — — pour un système auto-adjoint du second ordre 369
Méthode de Fourier pour un système conservatif 363
— de Ritz 372, 373
— du double parcours 406

Ondes stationnaires 104, 107-109, 350
Ordre de l'approximation 409

Pas d'un réseau 174
Potentiel logarithmique 18
— newtonien (volumique) 11, 14, 17
— retardé 224
Principe de Dirichlet 249-262, 266, 277, 283
— du maximum pour l'équation de la chaleur 29, 30
— — — pour l'équation de Laplace 15-17
— — — renforcé 247
Problème à dérivée oblique 291
— conservatif 355
— de Cauchy pour l'équation de Laplace 294, 295
Problème de Cauchy pour l'équation des ondes 206
— — — pour l'équation des petites vibrations d'une corde 63
— — — pour les équations de l'acoustique 62, 219, 220
— — — pour un système d'équations du premier ordre 78, 84
— — — pour un système hyperbolique 82
— de Dirichlet pour l'équation de Laplace 15, 24, 97, 261, 284
— de Neumann 292
Problème d'Hilbert pour le système de Cauchy et Riemann 283, 290, 291
— mixte pour un système hyperbolique 164
Problèmes bien posés 115
— mal posés 115, 296

Relation sur une caractéristique 80, 81, 84, 92
Réseau ε fini 188

Solutions généralisées de l'équation de la chaleur 52, 53
— — de l'équation $u_t + u_x = 0$ 225, 228
— — des équations de l'acoustique 150-153
Système aux différences explicite 396, 400
Schéma aux différences implicite 396, 401
— — instable 392, 402
— — rigide 395
Système auto-adjoint du second ordre 363
— bien conditionné d'équations aux différences 417, 418, 420
— d'équations du mouvement barotrope d'un gaz 84
— elliptique d'équations 93
— hyperbolique 82, 83, 118, 123
— mixte réversible 171, 172
— quasi linéaire 83
— t-hyperbolique 86
— t-hyperbolique symétrique 87, 88

Théorème d'Arzelà 186, 187
— de la majorante discontinue 248
— de la moyenne arithmétique 242
— d'existence de la solution du problème de Cauchy pour un système hyperbolique 203-205
— d'unicité de la solution du problème de Cauchy pour un système d'équations hyperbolique 128-130
— de Liouville 247
— d'inversion de la transformation de Laplace 307, 308, 312
— (premier) d'Harnack 245
Transformation de Laplace 307
— unitaire 356
Triangle caractéristique 59

Valeurs propres du problème aux limites 102, 340
— — pour un système conservatif 355
— — pour un système du second ordre auto-adjoint 363
Vitesse du son 52

TABLE DES MATIÈRES

Avant-propos 5

Chapitre premier. PRÉLIMINAIRES 7

§ 1. Potentiel newtonien 7
Quelques remarques préliminaires sur le caractère des équations étudiées dans ce cours. Remarques historiques sur les travaux de Laplace qui l'ont conduit à l'équation du potentiel de gravitation. Potentiel de distribution continue de masses (ou de charges). Le potentiel est continu et continûment dérivable. Le potentiel vérifie l'équation de Poisson. Il décroît à l'infini.

§ 2. Problème de Dirichlet pour l'équation de Laplace dans le cercle 15
Principe du maximum pour les fonctions harmoniques et théorème d'unicité pour le potentiel newtonien décroissant à l'infini. Notion de potentiel logarithmique dans le plan. Fonctions analytiques et harmoniques de deux variables. Quelques solutions particulières de l'équation de Laplace et déduction heuristique de la formule de Poisson qui détermine une fonction harmonique dans un cercle d'après ses valeurs aux limites. Différentes écritures de cette formule et quelques propriétés du noyau. Démonstration de la formule de Poisson donnant la solution de l'équation de Laplace. Position du problème de Dirichlet. Théorème d'unicité de la solution du problème de Dirichlet. L'existence de la solution découle de la démonstration de la formule de Poisson.

§ 3. Equation de la chaleur 25
Déduction de l'équation de la chaleur. Problème de Dirichlet en tant que problème de la détermination de la distribution stationnaire de la température d'après la température de la frontière du domaine. Position des problèmes pour l'équation de la chaleur à une dimension. Principe du maximum pour cette équation. Théorèmes d'unicité des problèmes 1 et 2 pour l'équation de la chaleur dans différentes hypothèses relatives à la solution et à la fonction initiale.

§ 4. Equation de la chaleur (suite) 37
Formule de Poisson pour l'équation de la chaleur et sa justification. Résolution à l'aide de l'intégrale de Poisson du problème le plus simple pour l'équation de la chaleur sur un segment fini. Déduction non rigoureuse heuristique de la formule intégrale pour la solution de l'équation de la chaleur. Exemples de solutions particulières des équations de la chaleur linéaire et non linéaire.

§ 5. Equations hyperboliques 53
Exemples simples d'équations aux dérivées partielles hyperboliques:

$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$. équations pour les ondes sonores et électromagnétiques. Problème de Cauchy pour ces équations et sa résolution à l'aide des caractéristiques. Equation hyperbolique du second ordre. Formule de d'Alembert. Intégrale d'énergie pour les ondes sonores. Démonstration de l'unicité de la solution en utilisant l'intégrale d'énergie. Intégrale d'énergie pour les équations de Maxwell unidimensionnelles. Schéma de la déduction des équations de Maxwell.

§ 6. Caractéristiques 76
Définition des caractéristiques pour un système général d'équations du premier ordre à deux variables indépendantes. Relations sur les caractéristiques. Caractéristiques complexes des équations de Cauchy-Riemann. Définition des caractéristiques dans le cas d'un plus grand nombre de variables indépendantes. Définition d'un système t-hyperbolique du premier ordre. Systèmes t-hyperboliques du premier ordre symétriques. Exemple des équations des ondes sonores. Invariance de la notion de caractéristiques par rapport aux transformations non dégénérées des fonctions inconnues et par rapport au remplacement des équations par des combinaisons linéaires équivalentes. Cône des normales caractéristiques. Définition des caractéristiques pour une équation du second ordre. Position du problème de Cauchy pour une telle équation. Exemples. Définition du système elliptique et de l'équation elliptique.

§ 7. Méthode de Fourier 94
Schéma de la méthode de Fourier pour l'équation de Laplace et sa légitimation. Méthode de Fourier pour le système hyperbolique des équations de l'acoustique. Représentation des solutions par une somme d'ondes stationnaires. Récit emprunté au chapitre d'introduction de l'ouvrage de Riemann consacré à l'histoire de la méthode de Fourier. Orthogonalité des vecteurs fonctions propres et calcul des coefficients de Fourier.

§ 8. Correction 112
Lien entre les racines de l'équation caractéristique et les propriétés des ondes courtes. Exemple d'Hadamard. Notion de problèmes posés correctement et incorrectement. Problème incorrect pour l'équation de la chaleur. Remarques sur l'objet du cours d'équations de la physique mathématique.

Chapitre II. ÉQUATIONS HYPERBOLIQUES 120

§ 9. Intégrale d'énergie 120
Réduction à la forme canonique au voisinage d'un point d'un système hyperbolique à deux variables indépendantes. Invariants de Riemann. Ces invariants ne sont pas univoquement déterminés. La forme canonique est un cas particulier d'un système symétrique au sens de Friedrichs. Identité de l'« intégrale d'énergie » pour les solutions régulières des systèmes t-hyperboliques symétriques. Exemple: la loi de conservation de l'énergie pour les équations de l'acoustique. Lemme relatif à une inégalité intégrale.

§ 10. Théorème d'unicité et évaluations des solutions des systèmes hyperboliques 128
Utilisation de l'intégrale d'énergie pour évaluer les solutions des systèmes hyperboliques symétriques. Les évaluations sont faites dans un domaine du demi-espace $t > 0$ délimité supérieurement par la surface d'une « calotte » dont on sait que sur elle l'intégrale d'énergie est non négative. La vérification de cette condition n'est

pas explicitée ici. Théorème d'unicité pour les domaines envisagés. Déduction d'évaluations pour les dérivées par application de la technique étudiée aux systèmes élargis comprenant les équations pour les dérivées qu'on se propose d'évaluer. Méthode particulière d'élargissement en incluant seulement les équations pour les dérivées par rapport à t.

§ 11. Condition de non-négativité de la forme quadratique liée à l'intégrale d'énergie 134
Cône des vecteurs liés aux formes quadratiques définies non négatives de l'intégrale d'énergie. Sa convexité. Méthode pour calculer la frontière de ce cône. L'inégalité $\tau + H(\xi, \eta) \geqslant 0$ et la définition de $H(\xi, \eta)$. Homogénéité et l'égalité qui en découle $\xi H_\xi + \eta H_\eta = H$. Exemples: système hyperbolique à deux variables indépendantes x, t sous forme canonique et équations de la théorie de l'élasticité. Remarque relative au cas où les coefficients sont variables.

§ 12. Equation d'Hamilton-Jacobi 141
Inégalité et équation d'Hamilton-Jacobi. Description schématique de la méthode d'intégration de cette équation. Bicaractéristiques et équations canoniques d'Hamilton pour leur construction. Cône des normales caractéristiques pour les équations de l'acoustique et pour l'équation d'Hamilton-Jacobi pour ce système. Description des domaines d'unicité du système. Cône des caractéristiques et cône des normales caractéristiques. Exemple: équations de l'acoustique.

§ 13. Position du problème mixte pour le système hyperbolique . . . 154
Etude (sur un exemple) de la position des conditions aux limites pour un système hyperbolique. Nombre de conditions que l'on doit se donner sur telle ou telle frontière pour que le problème ait une solution unique. Conditions de concordance des données initiales et des conditions aux limites (sur un exemple). Conditions aux limites dissipatives. Un système hyperbolique peut être réduit à à la forme canonique de telle façon que les conditions aux limites deviennent dissipatives.

§ 14. Théorème d'unicité de la solution du problème mixte 163
Position du problème mixte avec des conditions aux limites dissipatives. Evaluation de la solution et théorème d'unicité. Elargissement du système d'équations et des conditions aux limites du problème. Déduction des évaluations des dérivées. Aperçu des évaluations des solutions pour les systèmes hyperboliques symétriques. Conditions de concordance des données initiales et des conditions aux limites. Dépendance continue des solutions par rapport aux conditions du problème. Notions de problèmes réversibles. Exemples d'étude de positions de conditions aux limites pour les systèmes hyperboliques.

§ 15. Evaluation des solutions d'équations aux différences pour le problème mixte 173
Schéma aux différences de la solution du problème mixte pour le système hyperbolique. Evaluation des solutions des équations aux différences dans le cas de conditions aux limites dissipatives. Les données initiales doivent vérifier les conditions aux limites.

§ 16. Compacité des solutions des équations aux différences 182
Suite de la déduction des évaluations des solutions des équations aux différences. Evaluation de rapports aux différences. Inégalités intégrales assurant l'égale continuité des fonctions dans un rectangle. Théorème d'Arzelà sur la compacité. ε-entropie.

§ 17. Théorème d'existence de la solution du problème mixte 192
La démonstration du théorème d'existence de la solution d'un système hyperbolique commence par la description du prolongement à tout le rectangle des fonctions de réseau. Evaluations de ces prolongements ou « interpolations » en tant que conséquences des évaluations des fonctions de réseau. Vérification des conditions initiales et aux limites pour les fonctions limites. Démonstration de la dérivabilité des fonctions limites. Formulation du problème, passage à la limite dans les équations aux différences. Théorème d'existence. Inégalités déduites chemin faisant pour les solutions et pour leurs dérivées. Quelques remarques pour le théorème d'existence et d'unicité du problème mixte pour le système hyperbolique:
1) renoncement à la dissipation des conditions au limites,
2) cas où les coefficients sont indépendants du temps,
3) théorème d'existence de la solution du problème de Cauchy dans le triangle caractéristique.

§ 18. Equation des ondes. Formule de Kirchhoff 205
Problème de Cauchy et théorème d'unicité pour l'équation des ondes. Formule pour la solution du problème de Cauchy dans le cas d'une seule variable spatiale. Déduction de la formule de Kirchhoff pour la solution dans le cas de trois variables spatiales. Démonstration de cette formule. Méthode de la descente et déduction de la formule de Poisson pour la solution de l'équation des ondes à deux dimensions. Résumé des formules pour les espaces à une, deux et trois dimensions. Lacune dans le domaine de dépendance dans le cas tridimensionnel. Fronts avant et arrière brusques dus à une perturbation dans un domaine borné. Autre situation dans les cas d'une et de deux dimensions. Diffusions d'ondes. Onde sonore à symétrie sphérique. Régularité nécessaire des données initiales. Potentiels retardés.

§ 19. Solutions généralisées 224
Solution généralisée pour les équations de l'acoustique. Lien de la définition de la solution généralisée avec les lois de conservation. Notion de solution généralisée pour l'équation hyperbolique la plus simple $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$. Solution généralisée en tant que limite de solutions régulières. Définition de S. Sobolev. Equivalence de cette définition et de la définition classique pour les solutions régulières. Définition plus précise. Théorème d'unicité. Théorème d'existence.

Chapitre III. ÉQUATION DE LAPLACE 237

§ 20. Propriétés des fonctions harmoniques 237
Invariance de l'équation de Laplace et de l'intégrale de Dirichlet dans les transformations conformes du plan. Nouvelle déduction de la formule de Poisson pour la solution du problème de Dirichlet dans le cercle, laquelle déduction utilise cette invariance. Deux théorèmes sur la moyenne arithmétique pour les fonctions harmoniques. Conséquence: évaluation d'une fonction harmonique au centre d'un cercle au moyen de l'intégrale de son carré. La convergence en moyenne d'une suite de fonctions harmoniques entraîne la convergence uniforme dans un certain sous-espace. La solution du problème de Dirichlet dans un cercle est indéfiniment dérivable en tous les points intérieurs. Evaluation de ses dérivées au centre du cercle. Théorème de Harnack sur la convergence uniforme et sur l'harmonicité de la limite. Convergence des dérivées aux points

intérieurs. Inégalité de Harnack pour les fonctions harmoniques non négatives. Théorème de Liouville. Principe du maximum renforcé. Théorème de la majorante discontinue. Singularités levables.

§ 21. Principe variationnel de Dirichlet 249
Formule pour calculer l'intégrale de Dirichlet d'une fonction harmonique dans un cercle d'après les coefficients de Fourier des valeurs aux limites. Exemple de fonction harmonique continue dans un cercle et ayant une intégrale de Dirichlet infinie. Inégalité pour les intégrales de Dirichlet de deux fonctions prenant sur la frontière d'un cercle les mêmes valeurs, l'une de ces fonctions étant harmonique. Exemple d'Hadamard d'une fonction continue sur la frontière d'un cercle et ne pouvant être prolongée à l'intérieur avec une intégrale de Dirichlet finie. Méthode variationnelle de résolution du problème de Dirichlet. Quelques remarques historiques. Exemple de problème variationnel irrésoluble. Unicité de la fonction extrémale. Principe de Dirichlet pour le cercle et pour les domaines les plus simples qui s'en déduisent par des transformations conformes.

§ 22. Méthode de Schwarz 262
La méthode alternée de Schwarz de la démonstration de l'existence de la solution du problème de Dirichlet pour des domaines composés. Critérium de Schwarz. Enoncé du théorème et sa démonstration. Utilisation de la méthode de Schwarz pour la démonstration du principe de Dirichlet. Exemple de déduction du théorème d'existence de la solution du problème de Dirichlet et du principe de Dirichlet dans un polygone non simplement connexe. Vérification du critérium de Schwarz à l'aide de la « condition de lunule » géométrique. Schéma de la démonstration du principe de Dirichlet et de la résolubilité du problème de Dirichlet pour des domaines polygonaux quelconques.

§ 23. Démonstration du principe de Dirichlet 273
Restrictions imposées au domaine et aux fonctions. Lemme relatif au comportement des fonctions admissibles au voisinage de la frontière et (lemme 2) évaluation de l'intégrale du carré d'une fonction s'annulant sur la frontière d'après son intégrale de Dirichlet.
Construction d'une suite particulière minimisante et étude de ses propriétés. Passage à la limite légitimant le principe de Dirichlet.

§ 24. Problème d'Hilbert pour les équations de Cauchy-Riemann . . . 283
Position du problème et exemples. Indice de la condition aux limites. Normalisation (régularisation) de la condition aux limites dans le problème d'Hilbert. Théorème d'existence de la solution dans le cas où l'indice de la condition aux limites est non négatif. Etude de la non-unicité lorsque l'indice des conditions aux limites est positif ou nul. Unicité et conditions de résolubilité lorsque l'indice est négatif. Problème avec une dérivée oblique et sa réduction au problème d'Hilbert. Problème de Neumann. Indice du problème et indice des conditions aux limites. Notion d'indice pour un système d'équations algébriques linéaires.

§ 25. Problèmes incorrects 293
Examen de la possibilité de résoudre des problèmes incorrects sur l'exemple du problème de Cauchy pour les solutions périodiques de l'équation de Laplace. Développement de ces solutions en séries de Fourier. Fonctions logarithmiquement convexes et obtention au moyen de ces fonctions d'inégalités pour les fonctions harmoniques.

Correction conventionnelle dans la classe des solutions bornées. Régularisation des approximations pour les données initiales et recherche de la solution bornée par une constante connue pour un problème incorrect.

Chapitre IV. TRANSFORMATION DE LAPLACE ET MÉTHODE DE FOURIER POUR LES SYSTÈMES HYPERBOLIQUES 304

§ 26. Systèmes d'équations différentielles 304
Étude des formules pour la résolution des systèmes d'équations différentielles à coefficients constants à l'aide de considérations qui serviront à légitimer la méthode de Fourier. Intégrale de Duhamel et transformation de Laplace. Caractéristique amplitude-fréquence. Formulation du théorème d'inversion de la transformation de Laplace et son application à la représentation de la solution sous la forme d'une somme d'exponentielles.

§ 27. Théorème d'inversion de la transformation de Laplace 312
Enoncé des théorèmes d'inversion de la transformation de Laplace et sa généralisation au cas des fonctions qui croissent (modérément). Les trois premiers lemmes et leurs conséquences conduisent à une identité importante contenant une intégrale trigonométrique. On étudie le caractère du reste dans cette identité. Fin de la démonstration du théorème.

§ 28. Transformation de Laplace pour les solutions d'un système hyperbolique 320
Description de la position des problèmes mixtes réversibles pour un système hyperbolique. L'existence des solutions et leurs évaluations ont été étudiées au § 17. Transformée de Laplace $v_i(x, \lambda)$ de la solution pour des Re λ suffisamment grands. Son analyticité. Equations différentielles ordinaires vérifiées par la transformée. Evaluation. Utilisation de l'inversibilité. Exposé du schéma de l'étude ultérieure. Propriétés principales de $v_i(x, \lambda)$ qui seront démontrées dans les paragraphes suivants, et obtention à l'aide de ces propriétés de la formule d'inversion contenant une intégrale sur un contour formé.

§ 29. Comportement asymptotique des solutions d'équations différentielles ordinaires 329
Formules asymptotiques (en λ) de la solution du problème de Cauchy pour les équations différentielles ordinaires liées à la transformation de Laplace. Ces formules se déduisent des représentations explicites des solutions d'un système contenant deux équations indépendantes. Les lemmes suivants conduisent progressivement à un caractère de plus en plus compliqué de l'enchaînement des équations.

§ 30. Fonctions propres du problème aux limites 337
Étude dans la bande $|\operatorname{Re}\lambda| <$ const de fonctions analytiques de λ qui dépendent du paramètre x. Ces fonctions vérifient des équations différentielles ordinaires en x et des conditions aux limites. Déduction de formules asymptotiques pour la solution du problème aux limites à partir des formules pour la solution du problème de Cauchy obtenues au paragraphe précédent. La fonction $D(\lambda)$. Ses zéros sont les valeurs propres du système. $D(\lambda)$ n'a pas de zéros en dehors de la bande $|\operatorname{Re}\lambda| \leqslant K$. Comportement asymptotique des zéros de $D(\lambda)$. Prolongement analytique de la transformation de Laplace de la solution d'un système hyperbolique dans tout le plan complexe avec des pôles aux zéros de $D(\lambda)$.

§ 31. Complétude du système de fonctions propres 347
Rappel des faits démontrés aux paragraphes précédents sur les

propriétés des $v_l(x, \lambda)$, fonctions analytiques de λ, et sur la représentation approchée de la solution du problème mixte par une intégrale de contour. Calculs de divers résidus.
La solution est approchée par la somme d'un nombre fini d'« ondes stationnaires ». Modifications dans le cas de pôles multiples. Remarques sur la possibilité d'étendre la théorie à des systèmes non réduits à la forme canonique. Théorème de complétude des fonctions propres. Exemples montrant l'importance de la réversibilité du problème pour l'application de la méthode de Fourier.

§ 32. Série de Fourier pour un système conservatif 355
Problème hyperbolique conservatif pour un système de deux équations. Intégrale d'énergie pour les solutions réelles et complexes. Espaces euclidiens complexes tendus sur les vecteurs fonctions propres. Unitarité de la transformation liée à la translation du temps. Propriétés des transformations unitaires. Déduction à partir de ces propriétés de l'orthogonalité des fonctions propres et démonstration du fait que les λ_h sont imaginaires pures. Utilisation de l'orthogonalité lors de l'approximation des données initiales par des ondes stationnaires. Formule pour les coefficients dans le développement de la solution en série de Fourier. Exemple.

§ 33. Système auto-adjoint du second ordre 363
Sa réduction à un système symétrique du premier ordre. Ce système est conservatif. Energies « cinétique » et « potentielle » pour les solutions de ce système. Vecteurs fonctions propres et valeurs propres du problème aux limites correspondant pour le système d'équations différentielles ordinaires. Les fonctions propres sont orthogonales en métrique « potentielle » et en métrique « cinétique ». Formules pour la solution approchée du problème. Remarques sur la méthode de Ritz.

Chapitre V. MÉTHODES AUX DIFFÉRENCES POUR RÉSOUDRE LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES 375

§ 34. Problème de Dirichlet pour l'équation de Laplace dans un rectangle 375
Equation aux différences vérifiée par la solution exacte. Equation aux différences approchée. Majorantes et inégalités pour la solution de l'équation aux différences de Poisson. Résolubilité du système aux différences. Evaluation de l'erreur.

§ 35. Schéma aux différences pour un système hyperbolique à deux variables indépendantes 383
Le schéma antérieurement utilisé pour démontrer un théorème d'existence s'étudie à peu près de la même façon qu'au paragraphe précédent a été étudiée l'équation aux différences de Laplace.
Nécessité de l'inégalité $\frac{\tau k}{h} \leqslant 1$. Comparaison des domaines d'influence des équations aux dérivées partielles et aux différences et condition nécessaire de convergence résultant de cette comparaison. Exemple montrant l'insuffisance de cette condition. Schéma rigide dont les solutions peuvent, les pas décroissant, converger vers les solutions de différentes équations.

§ 36. Schémas aux différences implicites 396
Lemme sur la résolubilité d'un système d'équations à matrice à trois diagonales. Schéma aux différences implicite pour l'équation hyperbolique et évaluation de ses solutions. Etude de la convergence. Schémas explicite et implicite pour l'équation de la chaleur. Description de la méthode du double parcours pour la résolution des équations aux différences qui apparaissent dans les schémas implicites les plus simples.

DANS LA MÊME COLLECTION

ouvrage paru

RECUEIL D'EXERCICES D'ALGÈBRE SUPÉRIEURE

par

D. Faddéev et I. Sominski

Le présent recueil est le fruit de l'expérience acquise par des auteurs ayant professé durant de nombreuses années un cours d'algèbre supérieure à l'Université d'Etat de Léningrad et dans des instituts pédagogiques de l'U.R.S.S. Il s'adresse aux étudiants des facultés de physique et mathématiques et à tous ceux qui désirent élever le niveau de leur formation mathématique.

Le recueil comporte un grand nombre d'exercices destinés à développer les automatismes de calcul et à illustrer le matériel théorique, ainsi que des problèmes dont la résolution implique un certain degré d'ingéniosité et un esprit d'initiative.

Les problèmes sont accompagnés de réponses et les plus difficiles de solutions détaillées ou d'indications adéquates.

Ce recueil a été élaboré avec une grande maîtrise pédagogique: il est très populaire en U.R.S.S. et constitue un complément indispensable au «Cours d'algèbre supérieure» du professeur Kurosh, qui a paru en langue française aux Editions Mir de Moscou en 1971.

DANS LA MÊME COLLECTION

ouvrage paru

MÉTHODES DE LA THÉORIE DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE COMPLEXE

par

M. Lavrentiev

de l'Académie des Sciences de l'U.R.S.S.

et

B. Chabat

docteur ès sciences physiques et mathématiques, professeur

Ce manuel s'adresse aux étudiants des Facultés de mécanique et de physique des Universités scientifiques et techniques. Sa lecture exige la connaissance des fondements d'analyse du niveau des deux premiers tomes du Cours de mathématiques supérieures de Vladimir Smirnov publiés en français par les Editions Mir.

Les auteurs exposent dans ce livre les méthodes principales de la théorie des fonctions d'une variable complexe sous l'angle de leurs applications physiques et techniques.

De nombreux exemples illustrent l'application de la théorie des fonctions aux divers problèmes physiques et guident le lecteur dans le choix des méthodes adéquates à chaque branche scientifique.

Des interprétations géométriques explicites liées à une haute rigueur scientifique de l'exposé rehaussent la valeur de cet ouvrage très connu en Union Soviétique.

Le texte original est celui de la troisième édition russe remaniée et complétée par les auteurs.

DANS LA MÊME COLLECTION

à paraître

ÉLÉMENTS DE LA THÉORIE DES FONCTIONS ET DE L'ANALYSE FONCTIONNELLE

par

A. Kolmogorov

de l'Académie des Sciences de l'U.R.S.S

et

S. FOMINE

docteur ès sciences physiques et mathématiques, professeur

Ce manuel est destiné aux étudiants en physique et mathématiques des Universités scientifiques déjà versés dans l'analyse mathématique et l'algèbre linéaire.

Les auteurs y étudient les éléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle, ces bases essentielles des mathématiques modernes.

En associant dans leur exposé les mathématiques abstraites de la théorie des ensembles, des espaces métriques et topologiques, des espaces linéaires, les fonctionnelles et des opérateurs, etc., aux problèmes de l'analyse classique et à ses applications les auteurs visaient un double but : 1) montrer aux étudiants la logique interne des mathématiques modernes et 2) inculquer dans leur esprit qu'un lien interne unit ces matières abstraites à l'analyse classique. Malgré le haut niveau scientifique de cet ouvrage son style reste simple et accessible aux étudiants.